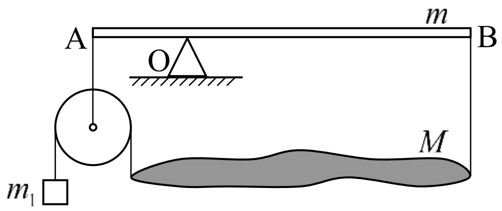
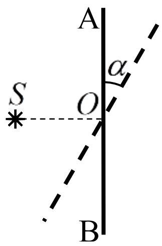
Решения Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 11 класс, 2017-2018 учебный год, комплект 2

1. Рычаг АВ массой m находится в равновесии на точечной опоре О. Плечи рычага относятся как АО:ОВ=1:2. К концам рычага с помощью невесомых нитей прикреплены невесомый блок и неоднородное тело массой M. Ко второму концу тела прикреплена нить с грузом, переброшенная через блок. Найти массу груза m_1.

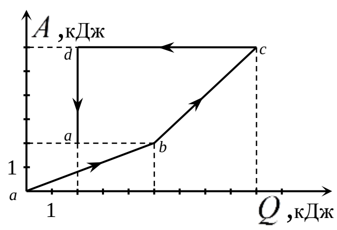


2. Точечное тело начинает движение из точки $x=0$ в положительном направлении оси x. Известно, что координата тела x и его скорость в процессе движения связаны соотношением $x=Av_x^2+B$, где $A=-2$ с^2/м, $B=2$ м. Вернется ли тело в точку $x=0$ и если да, то через какое время после выхода из нее?

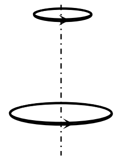
3. Точечный источник света S находится на расстоянии $d=15$ см от зеркала АВ (см. рисунок). Зеркало вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через основание перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало (через точку О). Найти мгновенную скорость и мгновенное ускорение изображения источника в зеркале в тот момент, когда зеркало повернулось на угол $\alpha=30°$ по сравнению с первоначальным положением.



4. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс a-b-c-d-a (начальное и конечное состояния газа совпадают). Дан график зависимости работы, совершенной газом с начала процесса, от количества теплоты, полученного газом с начала процесса. Качественно построить график зависимости давления газа от его объема в этом процессе и объяснить построение. Найти КПД процесса.



5. Имеется два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найти силу взаимодействия колец.



Решения

1. Пусть сила натяжения левой нити (привязанной к телу) - T_1, правой - T_2. Тогда условие равновесия тела дает

$$Mg = T_1 + T_2$$

С другой стороны, из условия равновесия груза имеем $T_1 = m_1 g$. Из условия равновесия блока находим силу натяжения нити T_3, связывающей левый конец рычага с осью блока $T_3 = 2T_1 = 2m_1 g$. Поэтому из условия равновесия рычага имеем

$$\frac{1}{3}T_3 = \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{3}m_1 g = \frac{2}{3}\left(Mg - m_1 g\right) + \frac{1}{6}mg$$

Отсюда находим

$$m_1 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{8}m$$

2. Поскольку тело начинает движение из точки $x = 0$, то его начальную скорость можно найти из уравнения, связывающего координату и скорость, подставляя в него значение $x = 0$:

$$v_{0,x} = \sqrt{-\frac{B}{A}}$$

(с учетом отрицательного значения B и положительного A под корнем положительное число, перед корнем взят знак «+», поскольку по условию тело начало движение в положительном направлении оси x).

Определим теперь характер движения тела. Для этого продифференцируем данную функцию по времени и найдем, таким образом, связь его скорости и ускорения

$$\frac{dx}{dt} = 2Av_x \frac{dv_x}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad v_x = 2Av_x a_x \qquad \Rightarrow \qquad a_x = \frac{1}{2A} = \text{const} \qquad (*)$$

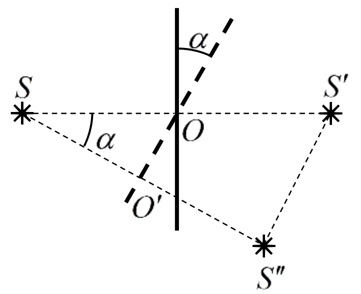
где a_x - проекция ускорения на ось x. Из формулы (*) следует, что проекция ускорения постоянна и отрицательны. Поэтому тело движется равноускоренно сначала в положительном направлении оси x с торможением, а затем, разгоняясь, в отрицательном направлении оси x. Поэтому тело обязательно попадет в точку $x = 0$. Чтобы найти время движения до этой точки воспользуемся аналогией с движением вблизи поверхности земли. Если тело бросить вертикально вверх с начальной скоростью v_0, оно упадет на землю через время

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}$$

Поэтому наше тело вернется в точку $x = 0$ через время

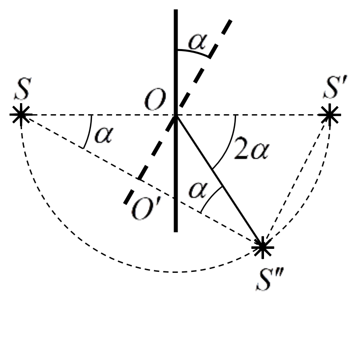
$$\Delta t = \frac{2v_{0,x}}{|a_x|} = 2\sqrt{-\frac{B}{|A|}}\,2|A| = 4\sqrt{B|A|} = 8 \text{ с}$$

3. Определим характер движения изображения. Построение старого (S') и нового (S''; после поворота зеркала на угол α) изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол $SS''S'$ - прямой. Действительно, треугольники $SO'O$ и $SS''S'$ подобны, так как у них общий угол α, а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны



$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$

А поскольку угол $SO'O$ - прямой, то прямым является и угол $SS''S'$. Причем независимо от угла поворота зеркала. Это значит, что изображение источника движется по такой кривой, что угол $SS''S'$ все время остается прямым. Отсюда следует, что изображение источника движется по окружности, для которой отрезок SS' является диаметром. А потому радиус этой окружности равен расстоянию от источника до зеркала в начальный момент, т.е. $R = SO = d$. Эта окружность показана на рисунке справа.



Найдем теперь угловую скорость вращения изображения. Пусть зеркало повернулось на угол α. Тогда (поскольку траектория движения изображения – окружность) $OS = OS''$ и $\angle OSS'' = \angle OS''S = \alpha$ (эти углы отмечены на рисунке). Поэтому $\angle S'OS'' = 2\alpha$, и, следовательно, изображение вращается с постоянной угловой скоростью ω', которая вдвое больше угловой скорости зеркала

$$\omega' = 2\omega$$

Поэтому ускорение изображения является центростремительным, его величина постоянна (т.е. не зависит от данного в условии угла α) и равна

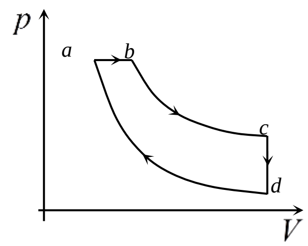
$$a' = (2\omega)^2 R = 4\omega^2 d = 0,6 \text{ м/с}^2$$

4. Из графика видим, что для первого процесса a-b (начало процесса – в начале координат) выполнено условие

$$A_{a-b} = \frac{5}{2} Q_{a-b}$$

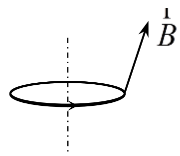
где A_{a-b} - работа газа, Q_{a-b} - количество теплоты, полученное газом. Такая связь работы и количества теплоты, полученного одноатомным газом, характерна для изобарического процесса. Поэтому процесс a-b – изобарический, в котором газ получил количество теплоты $Q_{a-b} = 5$ кДж. В процессе b-c $A_{b-c} = Q_{b-c}$, поэтому $\Delta U_{b-c} = 0$, и, следовательно, процесс b-c – изотермический, в котором газ получил количество теплоты $Q_{b-c} = 4$ кДж. На участке c-d работа газа, совершенная с начала процесса, не меняется, следовательно, $A_{c-d} = 0$ - процесс c-d изохорический, в котором газ отдает количество теплоты $Q_{c-d} = 4$ кДж. После состояния d количество теплоты, полученное газом с начала процесса не меняется, $Q_{d-a} = 0$, процесс d-a – адиабатический, в котором газ совершает работу $A_{d-a} = -4$ кДж. Таким образом, за цикл газ совершил положительную работу $A_{a-b-c-d-a} = 2$ кДж, а получил от нагревателя (участки a-b-c, на которых газ получал тепло) следующее количество теплоты $Q_{a-b-c} = Q_{a-b} + Q_{b-c} = 9$ кДж. Поэтому КПД циклического процесса a-d-c-d-a равен

$$\eta_{a-b-c-d-a} = \frac{A_{a-b-c-d-a}}{Q_{a-b-c}} = \frac{2}{9} = 0,22$$



Качественный график процесса a-d-c-d-a в координатах $p - V$ приведен на рисунке, в котором процесс a-b – изобара, b-c – изотерма, c-d – изохора, d-a – адиабата. Поскольку работа и количество теплоты не являются функциями состояния, и в условии не задано количество вещества газа, определить параметры этого цикла (объемы, давления, температуры) по данным условия невозможно.

5. Найдем индукцию магнитного поля, созданного кольцом радиуса $2R$ в области второго кольца, а затем по закону Ампера найдем силу взаимодействия колец.



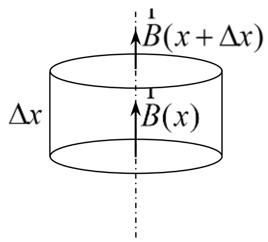
Индукция магнитного поля кольца на его оси направлена вдоль оси, а в точках, расположенных на некотором расстоянии от оси (т.е. в области второго кольца) под некоторым углом к оси (см. рисунок). Используя далее, закон взаимодействия магнитного поля и тока (закон Ампера), заключаем, что суммарная сила Ампера, действующая на кольцо радиуса R со стороны магнитного поля второго кольца, направлена вдоль оси колец и определяется составляющей вектора $\vec{B}$, направленной перпендикулярно оси

$$F = 2\pi RIB_{\perp} \tag{1}$$

где $B_{\perp}$ - составляющая вектора индукции, перпендикулярная оси кольца. Найдем $B_{\perp}$.

Используем известное выражение для индукции магнитного поля кольца на его оси на расстоянии x от его плоскости

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I(2R)^2}{\left((2R)^2 + x^2\right)^{3/2}} \tag{2}$$



где I - ток в кольце, $2R$ - его радиус. Рассмотрим вспомогательную цилиндрическую поверхность соосную оси кольца, с радиусом, равным радиусу второго кольца R, и малой высотой Δx (см. рисунок). Т.к. величина индукции на оси кольца уменьшается с ростом расстояния от кольца, то поток вектора магнитной индукции через верхнее основание цилиндрической поверхности меньше потока через нижнее. А поскольку поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю (отсутствуют магнитные заряды), то разница потоков через основания

$$\Delta\Phi = \pi R^2 \left(B(x) - B(x + \Delta x) \right) \qquad (3)$$

(πR^2 - площадь оснований цилиндра) равна потоку вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра

$$\Delta\Phi = B_{\perp} 2\pi R \Delta x \qquad (4)$$

где $2\pi R \Delta x$ - площадь его боковой поверхности. Из формул (3), (4) находим

$$B_{\perp} = -\frac{R}{2} \frac{\left(B(x + \Delta x) - B(x) \right)}{\Delta x} \qquad (5)$$

Т.к. Δx мало, то выражение (5) сводится к производной величины индукции на оси кольца (2) по x. Дифференцируя функцию (2), находим по формулам (5), (1) в пределе x ? R

$$F = 6\pi\mu_0 \frac{I^2 R^4}{x^4}.$$