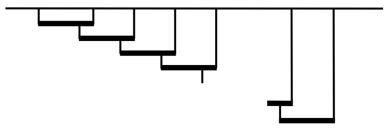
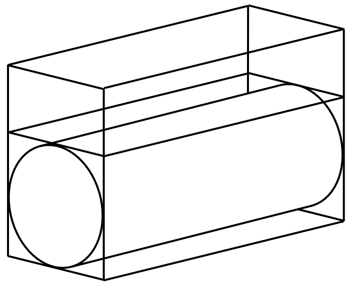
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс, 2017-2018 учебный год, комплект 3

1. Амперметр подключают к источнику, имеющему некоторое внутреннее сопротивление, и он показывает силу тока $I_1 = 1$ А. Если параллельно первому амперметру подключить второй, точно такой же, то сумма показаний амперметров будет равна $I_2 = 1,2$ А. Найти сумму показаний 8 точно таких же амперметров, подключенных к этому же источнику параллельно.

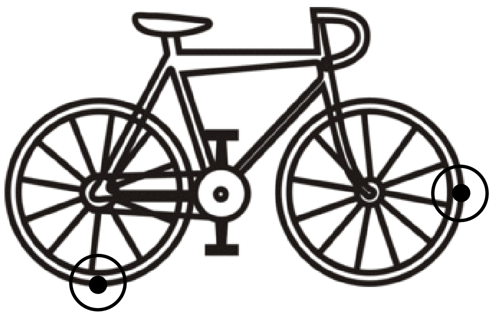
2. Имеется 2018 одинаковых стержней массой $m = 1$ кг. Каждый стержень подвешен на двух нитях, прикрепленных к его концам. Левый стержень подвешен к горизонтальному потолку. Все остальные стержни подвешены так, что одна из нитей прикреплена к потолку, вторая – к «предыдущему» стержню в точке, отстоящей на одну пятую часть его длины от его правого конца (см. рисунок). Найти силу натяжения самой левой нити. Считать, что $g = 10$ м/с^2.



3. Однородный цилиндр радиусом R и высотой h положили в кювету в форме прямоугольного параллелепипеда, длина которой на очень небольшую величину превосходит длину цилиндра h, а ширина – диаметр цилиндра, так, что цилиндр можно положить в кювету с очень небольшими зазорами между ним и стенками кюветы. Затем в кювету налили воду, которая только-только покрывает цилиндр (см. рисунок). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды? Плотность воды ρ, плотность материала цилиндра 6ρ.



4. В протекторе покрышек переднего и заднего колес велосипеда застряли два маленьких камня. В тот момент, когда камень на заднем колесе касается земли, камень на переднем находится в крайнем переднем положении (см. рисунок; камни обведены кружками). Найти минимальное расстояние между камнями в процессе движения велосипеда. Через какое минимальное время после положения, показанного на рисунке, расстояние между камнями достигает минимального значения? Скорость велосипеда v, радиус колес R, расстояние между центрами колес - $3R$. Колеса не проскальзывают по дороге.



5. Два тела с теплоемкостями $2C$ и C имеют температуры T и $3T$ соответственно. Какая минимальная температура может установиться в этой системе, если тела использовать в качестве нагревателя и холодильника теплового двигателя, а произведенная механическая работа будет «уходить» из системы? Какую максимальную работу можно получить в такой системе тел? Других потерь энергии в рассматриваемой системе нет.

Решения

1. Очевидно, что амперметры неидеальны. Действительно, если бы сопротивление амперметров равнялось бы нулю, то сумма токов через все амперметры (которая равна току через источник) определялся бы ЭДС и внутренним сопротивлением самого источника. А эта величина не меняется при подключении дополнительных амперметров. У нас же ток через источник при подключении одного амперметра и сумма токов через два амперметра – разная.

Пусть сопротивление амперметра - R, сопротивление источника - r. Тогда для тока через источник (или суммы токов через амперметры) получим из закона Ома для замкнутой цепи в первом и втором случае

$$R+r=\frac{\varepsilon}{I_1}$$

$$\frac{R}{2}+r=\frac{\varepsilon}{I_2}$$

где ε - ЭДС источника, $R/2$ - общее сопротивление двух амперметров. Из этой системы уравнений находим

$$R=\frac{2\varepsilon\left(I_2-I_1\right)}{I_1I_2}, \qquad r=\frac{\varepsilon\left(2I_1-I_2\right)}{I_1I_2}$$

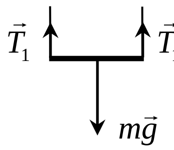
Тогда закон Ома для замкнутой цепи в случае восьми амперметров, подключенных к источнику параллельно, дает

$$\frac{\varepsilon}{I_3}=\frac{R}{8}+r=\frac{\varepsilon\left(I_2-I_1\right)}{4I_1I_2}+\frac{\varepsilon\left(2I_1-I_2\right)}{I_1I_2}=\frac{\varepsilon\left(7I_1-3I_2\right)}{4I_1I_2}$$

где I_3 - ток через источник (сумма токов через амперметры). Отсюда

$$I_3=\frac{4I_1I_2}{7I_1-3I_2}=1,41 \text{ А}$$

2. На самый правый стержень действует сила тяжести и две силы натяжения. Из симметрии задачи очевидно, что последние одинаковы. Поэтому



Первый стержень

$$T_1=\frac{mg}{2}$$

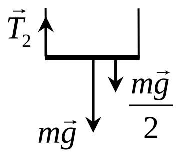
Из условия равенства нулю моментов сил, действующих на второй стержень относительно правой нити, получим (чтобы не загромождать рисунок сила натяжения правой нити на рисунке не показана)

$$T_2l=mg\frac{l}{2}+\frac{mg}{2}\frac{l}{5}=\frac{mgl}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)$$

Отсюда находим

$$T_2=\frac{mg}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)$$

Условие равенства нулю моментов сил, действующих на третий стержень (относительно его правого) получим



Второй стержень

$$T_3l=mg\frac{l}{2}+T_2\frac{l}{5}=\frac{mgl}{2}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\right)$$

Теперь ясна и дальнейшая структура формул. Сила натяжения левой нити, привязанной к n-ому стержню, будет определяться суммой конечной геометрической прогрессии

$$T_n=\frac{mg}{2}\left(1+\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

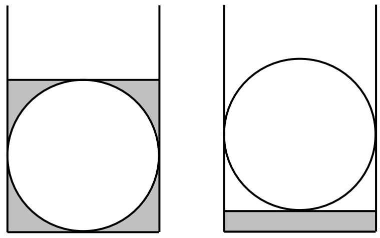
Используя формулу суммы прогрессии и учитывая, что $\left(1/5\right)^{2018}$ - чудовищно малое число, получим

$$T_{2018}=\frac{mg}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2018}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5mg}{8}=6,25\ \text{Н}$$

3. Работу, которую нужно совершить найдем как изменение потенциальной энергии воды и цилиндра при его вытаскивании из воды.

Кювета в разрезе, перпендикулярном высоте цилиндра, показана на рисунке, из которого заключаем, что объем налитой в кювету воды V равен разности объема параллелепипеда с основанием $2R\times 2R$ и высотой h. То есть

$$V=\left(4-\pi\right)R^2h$$



Минимальная высота Δh, на которую нужно поднять цилиндр, чтобы он полностью вытащить его из воды (см. рисунок), находится из очевидного соотношения

$$\left(4-\pi\right)R^2h=2R\Delta hh\qquad\Rightarrow\qquad\Delta h=\frac{\left(4-\pi\right)}{2}R$$

Поэтому потенциальная энергия цилиндра возрастает на величину

$$\Delta\Pi_{ц}=Mg\Delta h=3\rho\pi R^2hg\frac{\left(4-\pi\right)}{2}R=\frac{3\pi\left(4-\pi\right)}{2}\rho ghR^3$$

Центр тяжести воды находился в центре сечения цилиндра, а будет находиться на высоте $\Delta h/2$ от дна кюветы. Поэтому потенциальная энергия воды уменьшится на величину

$$\Delta\Pi_{в}=mg\left(R-\frac{\Delta h}{2}\right)=\rho\left(4-\pi\right)R^2hg\left(R-\frac{\left(4-\pi\right)}{4}R\right)=\frac{\rho\left(4-\pi\right)\pi R^3hg}{4}$$

Поэтому работа, которую необходимо совершить для вытаскивания цилиндра из воды (равная увеличению потенциальной энергии системы цилиндр-вода), равна

$$A=\Delta\Pi_{ц}-\Delta\Pi_{в}=\frac{3\pi\left(4-\pi\right)}{2}\rho ghR^3-\frac{\rho\left(4-\pi\right)\pi R^3hg}{4}=\frac{5\rho\left(4-\pi\right)\pi R^3hg}{4}$$

4. Поскольку колеса имеют одинаковые размеры и не проскальзывают, они вращаются с одинаковыми угловыми скоростями ω, которые определяются соотношением:

$$\omega=\frac{v}{R},\qquad(1)$$

где v - скорость велосипеда, R - радиус колеса. Поэтому угол между радиусами-векторами камней $\vec r_1$ и $\vec r_2$ относительно центров колес в любой момент времени составляет $90°$ (см. рисунок 1).

Рудиус-вектор второго камня относительно первого $\vec r_{21}$ можно найти из очевидного векторного равенства

$$\vec r_{21}=\vec r_0+\vec r_2-\vec r_1.\qquad(2)$$

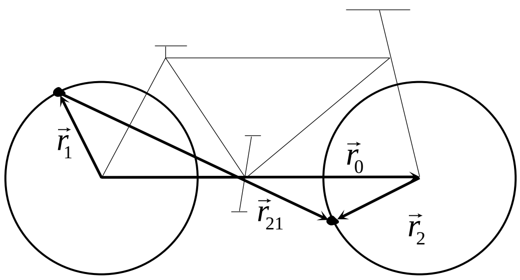


Рисунок 1.

где $\vec r_0$ - радиус-вектор центра переднего колеса относительно центра заднего. Так как угол между векторами $\vec r_1$ и $\vec r_2$ всегда равен $90°$, то вектор $\vec r_2-\vec r_1$ имеет длину $\sqrt{2}R$ (R - радиус колес), и вращается с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости колес. Таким образом, радиус-вектор второго камня относительно первого можно найти как сумму вектора $\vec r_0$ и вектора, имеющего длину $\sqrt{2}R$ и вращающегося с угловой скоростью (1). Сложение этих векторов показано на рисунке 2, причем концы векторов $\vec r_2-\vec r_1$ и $\vec r_{21}$ лежат на окружности радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в конце вектора $\vec r_0$.

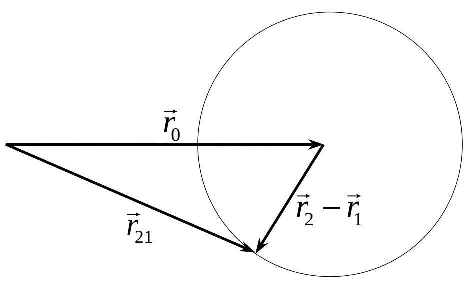


Рисунок 2.

Из рисунка 2 следует, что минимальную длину вектор $\vec r_{21}$ (2) имеет в тот момент времени, когда вектор $\vec r_2-\vec r_1$ направлен противоположно вектору $\vec r_0$, максимальную – когда вектор $\vec r_2-\vec r_1$ направлен так же, как и вектор $\vec r_0$. Поэтому

$$r_{21}^{\min} = 3R - \sqrt{2}R = R\left(3-\sqrt{2}\right); \qquad r_{21}^{\max} = 3R + \sqrt{2}R = R\left(3+\sqrt{2}\right)$$

Вычитание векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, отвечающее этим двум случаям, показано на рисунке 3а и 3б соответственно. Поэтому длина вектора $\vec{r}_{21}$ будет минимальна, когда вектор $\vec{r}_2$ повернется на угол $5\pi/4$, а максимальна – на угол $\pi/4$ по сравнению с начальным положением. Отсюда находим моменты времени $t^{\min}$ и $t^{\max}$, когда расстояние между камнями достигает минимального и максимального значения

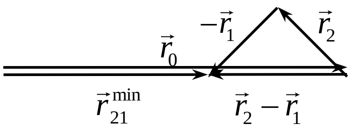


Рисунок 3а.

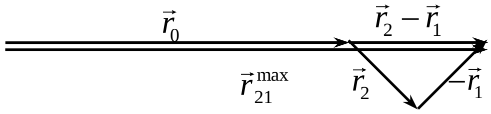


Рисунок 3б.

$$t^{\min} = \frac{5\pi}{4\omega} = \frac{5\pi R}{4v}, \qquad t^{\max} = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi R}{4v}.$$

5. Обычно, когда рассматривают принципы работы тепловой машины, считают, что температуры нагревателя и холодильника в процессе отдачи или получения тепла не изменяются. Это верно для бесконечно больших теплоемкостей нагревателя и холодильника. Если же теплоемкости этих тел конечны, необходимо учитывать, что их температуры в процессе работы машины будут изменяться. Очевидно, что, в конце концов, температуры нагревателя и холодильника сравняются. Действительно, в процессе работы машины рабочее тело берет некоторое количество теплоты у нагревателя, часть его превращает в работу, оставшуюся часть передает холодильнику. Другими словами, происходит теплообмен между горячим нагревателем и холодным холодильником, но с одновременным «уходом» части энергии из этой системы тел в виде механической работы. Учтем этот «уход» в уравнениях теплового баланса.

Пусть в какой-то момент времени температура нагревателя равна T_1, холодильника - T_2. Поскольку нужно найти минимальную температуру тел, необходимо «увести» из системы максимальную работу. Поэтому проведем на этих телах цикл Карно. Возьмем малое количество теплоты δQ у нагревателя (чтобы его температура практически не изменилась). Поскольку кпд цикла Карно при температурах нагревателя и холодильника T_1 и T_2, равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{1}$$

то работа двигателя составит

$$\delta A = \eta \delta Q = \delta Q - \frac{T_2}{T_1}\delta Q \tag{2}$$

Поэтому более холодному телу будет передано количество теплоты δQ_1, равное

$$\delta Q_1 = \delta Q - \delta A = \frac{T_2}{T_1}\delta Q \tag{3}$$

Таким образом, тепловой баланс в системе тел с учетом «ухода» из системы механической работы выглядит так: если горячее отдает количество теплоты δQ, холодное получает количество теплоты δQ_1 (3).

Найдем теперь, как изменятся температуры тел после осуществления рассмотренного процесса. Так как нагреватель отдает количество теплоты δQ, его температура уменьшится на величину $\delta Q / C$ (C - теплоемкость нагревателя) и составит

$$T_1' = T_1 - \frac{\delta Q}{C} \tag{4}$$

Температура холодильника возрастет на величину $\delta Q_1 / 2C$ ($2C$ - теплоемкость холодильника) и составит

$$T_2' = T_2 + \frac{T_2}{T_1}\frac{\delta Q}{2C} \tag{5}$$

Возводя уравнение (5) в квадрат и учитывая, что δQ - малая величина, и потому слагаемое, содержащее δQ^2, является малым, и им можно пренебречь, получим

$$\left(T_2'\right)^2 \approx \left(T_2\right)^2 + \frac{\left(T_2\right)^2}{T_1}\frac{\delta Q}{C} \qquad (6)$$

Перемножим теперь почленно формулы (4) и (6). Имеем

$$T_1'\left(T_2'\right)^2 = T_1\left(T_2\right)^2 - \left(T_2\right)^2\frac{\delta Q}{C} + \left(T_2\right)^2\frac{\delta Q}{C} + \frac{\left(T_2\right)^2}{T_1}\frac{\delta Q^2}{C^2} \approx T_1\left(T_2\right)^2 \qquad (7)$$

(в формуле (7) снова отброшено слагаемое, квадратичное по величине δQ). Равенство (7) означает, что в рассмотренном процессе не меняется произведение температуры нагревателя на квадрат температуры холодильника. А поскольку этот результат будет иметь место при любых температурах тел, то он будет иметь место и для конечной температуры нагревателя и холодильника T_x:

$$3T\left(T\right)^2 = T_x\left(T_x\right)^2 = T_x^3 \qquad \Rightarrow \qquad T_x = \sqrt[3]{3}T = 1{,}442\,T \qquad (8)$$

Таким образом, в результате работы рассмотренной тепловой машины в течение длительного времени температуры нагревателя и холодильника сравняются и станут равными величине (8).

Если бы энергия не уходила из системы, то в результате теплообмена между нагревателем и холодильником их температуры также сравнялись бы, но установившаяся температура была бы больше величины (8). Установившуюся в этом случае температуру тел T_y можно найти из «обычного» уравнения теплового баланса: количество теплоты, отданное нагревателем, равно количеству теплоты, полученному холодильником, при этом указанные количества теплоты можно стандартным образом связать с начальной и конечной температурами тел и их теплоемкостями:

$$C\left(3T - T_y\right) = 2C\left(T_y - T\right) \qquad (9)$$

Из формулы (9) получаем

$$T_y = \frac{5}{3}T = 1{,}667\,T \qquad (10)$$

Энергия, связанная с разностью установившихся температур $T_y - T_x$ (10), (11), и есть полная механическая работа, совершенная двигателем до того момента, как температуры нагревателя и холодильника сравняются, и двигатель больше не сможет совершать работу. Поскольку суммарная теплоемкость тел равна $3C$, то эта работа равна

$$A = 3C\cdot\left(T_y - T_x\right) = CT\left(5 - 3\sqrt[3]{3}\right) = 0{,}675CT$$