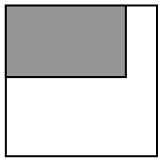
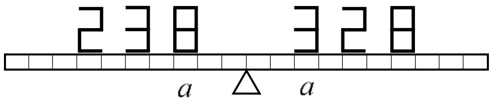
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 9 класс
2017-2018 учебный год

1 вариант



1. Кубик составили из двух частей, имеющих разную плотность (см. рисунок). Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объема кубика, но четвертую часть его массы. Найдите плотность второй части кубика.



2. Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры – один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на конце второго коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?

3. В калориметр налита вода комнатной температуры - $t_1 = 20°$С. Объем воды составляет половину объема калориметра. Когда в калориметр доливают столько же воды, имеющей температуру $t_2 = 30°$ С, в нем устанавливается температура $t_0 = 24°$С. Другой точно такой же калориметр, находящийся при комнатной температуре, содержит воду, объем которой составляет одну треть объема калориметра. Какая установится температура в этом калориметре, если его доверху заполнить водой с температурой t_2. Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

4. Минутная стрелка часов в 2 раза длиннее часовой. В некоторый момент времени стрелки совпали. Через какое время после этого конец часовой стрелки будет удаляться от конца минутной с максимальной скоростью?

5. Тело начинает движение из состояния покоя с ускорением a_0 и далее движется прямолинейно. Из-за действия силы сопротивления воздуха ускорение тела падает с увеличением его скорости v по закону $a = a_0 v_0 / (v + v_0)$, где v_0 - известная постоянная. Через какое время скорость тела достигнет значения $2v_0$?

Решения

1. Пусть объем всего кубика V , а плотность его второй части - ρ_2 . Тогда из условия имеем

$$\rho_1 \frac{V}{3} + \rho_2 \frac{2V}{3} = 4\rho_1 \frac{V}{3}$$

Решая это уравнение относительно ρ_2 , получаем

$$\rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1$$

2. Конечно, массы макетов чисел 238 и 328 равны, но при их сравнении на коромысельных весах сравниваются не силы тяжести, действующие на макеты чисел, а моменты сил тяжести относительно опоры. Посчитаем моменты сил, действующих на правое и левое плечо коромысла. «Двойка» (слева) и «восьмерка» (справа). У «восьмерки» есть два лишних стержня, расположенных на расстояниях $6a$ и $7a$ относительно опоры. Значит, для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем $\Delta M_{пр} = 6amg + 7amg = 13amg$. «Тройка» (слева) и «двойка» (справа). У «двойки» есть лишний стержень на расстоянии $5a$ от опоры, и не хватает стержня на расстоянии $4a$ от опоры. Следовательно, избыточный момент, действующий на правое плечо коромысла весов, есть $\Delta M_{пр} = 13amg + 5amg - 4amg = 14amg$. «Восьмерка» (слева) и «тройка» справа. У восьмерки есть 2 лишних стержня на расстоянии $2a$ от опоры. Поэтому для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{пр} = 14amg - 4amg = 10amg$$

Следовательно, число 328 справа от опоры перевесит. Поскольку восстанавливающий равновесие весов груз нужно положить на самый конец левого колена коромысла (плечо $10a$) для его массы m_0 имеем

$$10am_0g = 10amg$$

Откуда находим

$$m_0 = m$$

3. Поскольку температура жидкости, получившейся при смешивании равных количеств горячей и холодной жидкости не равна среднему арифметическому температур жидкостей, а потери тепла в окружающее пространство не учитываются, нужно учитывать нагревание калориметра. Пусть теплоемкость калориметра C , C_1 - теплоемкость воды, занимающей половину калориметра. Тогда уравнение теплового баланса для первого смешивания воды дает

$$(C + C_1)(t_0 - t_1) = C_1(t_2 - t_0)$$

Отсюда находим отношение теплоемкостей калориметра и половинного количества воды в калориметре

$$\frac{C}{C_1} = \frac{t_2 + t_1 - 2t_0}{t_0 - t_1} = \frac{1}{2} \qquad (*)$$

Рассмотрим теперь второе смешивание горячей и холодной воды в калориметре. Уравнение теплового баланса в этом случае дает

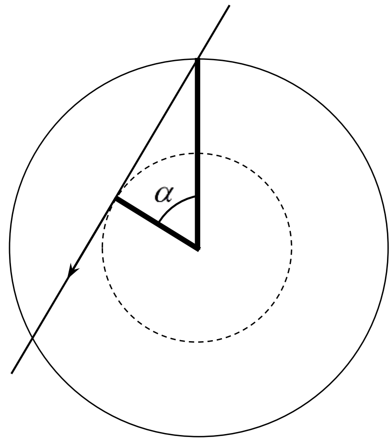
$$\left(C + \frac{2}{3}C_1\right)(t_x - t_1) = \frac{4}{3}C_1(t_2 - t_x)$$

где t_x - искомая температура смеси. Отсюда с учетом (*) получаем

$$t_x = \frac{7t_1 + 8t_2}{15} = 25{,}3^\circ\,\mathrm{C}$$

4. Скорость удаления конца часовой стрелки от конца часовой стрелки определяется тем, как растет расстояние между концами стрелок и потому не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается их движение. Перейдем в систему отсчета, в которой минутная стрелка не вращается. В ней часовая стрелка вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью

$\omega_{мин} - \omega_{час}$, где $\omega_{мин}$ и $\omega_{час}$ - угловые скорости минутной и часовой стрелок, и, следовательно, ее конец движется с постоянной по величине скоростью. Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной тогда, когда вектор скорости часовой стрелки направлен вдоль прямой, соединяющей концы стрелок (см. рисунок). Поэтому в этот момент прямая, проведенная из конца минутной стрелки к концу часовой является касательной к окружности, по которой движется конец часовой стрелки. А поскольку длина часовой стрелки вдвое меньше длины минутной, угол между стрелками составляет $\alpha = 60°$. А поскольку этот угол составляет шестую часть полного угла, то стрелка пройдет его за шестую часть времени, за которое она совершает полный оборот вокруг минутной стрелки, которое в свою очередь равно



$$T = \frac{2\pi}{\omega_{мин} - \omega_{час}} = \frac{60 \cdot 12}{11} = 65,5 \text{ мин}$$

Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной через 1/6 часть этого времени, т.е. через

$$\Delta t = \frac{2\pi / 6}{\omega_{мин} - \omega_{час}} = \frac{60 \cdot 12}{11 \cdot 6} = 10,9 \text{ мин}$$

5. Поскольку при прямолинейном движении мгновенное ускорение тела определяется как

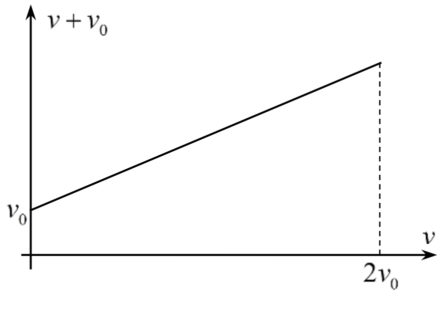
$$a = \frac{v_к - v_н}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

где $v_к$ и $v_н$ скорость тела в начале и в конце малого интервала времени Δt, то изменение скорости тела за малый интервал времени Δt равно $\Delta v = a\Delta t$. Если просуммировать изменения скорости тела за все малые интервалы времени, но которые можно разбить полное время движения, получится полное изменение скорости, которая из-за равенства нулю начальной скорости равна конечной скорости тела

$$\sum_n \frac{\Delta v_n}{a_n} = \sum_n \Delta t_n$$

где a_n - ускорение тела внутри малого интервала времени Δt_n. Подставляя в эту формулу зависимость ускорения от скорости, найдем

$$\frac{1}{a_0 v_0} \sum_n \Delta v_n \left(v_n + v_0 \right) = \sum_n \Delta t_n$$



где v_n - значение внутри n-ого интервала времени Δt_n. Сумма в правой части дает значение времени τ в тот момент, когда скорость станет равна $2v_0$. Сумма в левой части имеет графический образ как площадь под графиком зависимости $f(v) = v + v_0$ (ср. с вычислением работы переменной силы). Вычисляя эту площадь (см. рисунок), получим

$$\tau = \frac{4v_0}{a_0}$$