Очный отборочный тур в регионах, осень 2018
11 класс (второй выезд)

Вариант № 1

1. Знаменатель геометрической прогрессии b_n равен q, а при некотором натуральном $n \geq 2$

$$\log_2 b_2 + \log_2 b_3 + \ldots + \log_2 b_n = 2 \cdot \log_2 b_1 .$$

Найти наименьшее возможное значение $\log_q b_1^2$, если известно, что оно целое. При каком n это значение достигается?

2. Решить уравнение $3[\sin x] + 2[\cos x] = [\sin 2x]$, где $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Доказать, что дробь $\dfrac{2a^4 + 4a^2 + 1}{2a^3 + 3a}$ несократимая при любых натуральных a.

4. На отрезке длины L случайным образом взяты две точки, разделившие его на три части. Найти вероятность того, что длина одной из этих частей окажется не меньшей $5L/12$.

5. При каких a система

$$\begin{cases} (x-7)\sin a - (y-1)\cos a = 0 \\ \left((x-4)^2 + (y-4)^2 - 1\right)\left((x-4)^2 + (y-4)^2 - 4\right) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Точки P, Q и K расположены на боковых ребрах SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ так, что

$$SP : SA = 1:2,\ SQ : SB = 2:3,\ SK : SC = 3:5 .$$

Объем пирамиды $SABC$ равен 15. Точка M принадлежит треугольнику ABC основания пирамиды. Найти максимально возможное значение объема пирамиды $MPQK$.

Ответы и решения

1. Согласно свойствам логарифмов получаем после преобразований

$$\log_2(b_2 b_3 \ldots b_n) = \log_2 b_1^2$$

$$b_2 b_3 \ldots b_n = b_1^2$$

Используя формулу общего члена геометрической прогрессии, получаем

$$b_2 = b_1 q,\; b_3 = b_1 q^2,\; \ldots\;,\; b_n = b_1 q^{n-1}$$

и с помощью этих соотношений и формулы суммы арифметической прогрессии

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

приводим полученное уравнение к виду

$$b_1^{n-1} q^{1+2+\ldots+(n-1)} = b_1^2 \;\Rightarrow\; b_1^{n-3} q^{n(n-1)/2} = 1$$

Логарифмируя по основанию q, находим

$$(n-3)\log_q b_1 + \frac{n(n-1)}{2} = 0$$

$$\frac{n-3}{2}\log_q b_1^2 + \frac{n(n-1)}{2} = 0$$

$$\log_q b_1^2 = -\frac{n(n-1)}{n-3}$$

Так как

$$\frac{n(n-1)}{n-3} = \frac{n(n-3) + 2(n-3) + 6}{n-3} = n + 2 + \frac{6}{n-3},$$

то

$$\log_q b_1^2 = -n - 2 - \frac{6}{n-3}.$$

Согласно условию задачи величина

$$\frac{6}{n-3}$$

должна быть целым числом. Это возможно только при

$$n \in \{2;4;5;6;9\}.$$

Подставляя в полученную выше формулу указанные значения, находим все возможные значения искомой величины

$$n=2 \ \Rightarrow \ \log_q b_1^2 = 2$$

$$n=4 \ \Rightarrow \ \log_q b_1^2 = -12$$

$$n=5 \ \Rightarrow \ \log_q b_1^2 = -10$$

$$n=6 \ \Rightarrow \ \log_q b_1^2 = -10$$

$$n=9 \ \Rightarrow \ \log_q b_1^2 = -12$$

Отсюда видно, что наименьшее значение искомой величины равно −12 и оно достигается для двух значений: n=4 и n=9.

Ответ: -12 при $n=4$ и $n=9$.

2. Имеем следующие значения

$3[\sin 2x] \in \{-3;0;3\}$, $2[\cos x] \in \{-2;0;2\}$, $[\sin 2x] \in \{-1;0;1\}$.

Для решения уравнения они дают всего три варианта

$$[\sin x] = -1,\ [\cos x] = 1,\ [\sin 2x] = -1$$

$$[\sin x] = 0,\ [\cos x] = 0,\ [\sin 2x] = 0$$

$$[\sin x] = 1,\ [\cos x] = -1,\ [\sin 2x] = 1$$

Рассмотрм первый вариант.

$$\begin{cases} [\sin x] = -1 \\ [\cos x] = 1 \\ [\sin 2x] = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \sin x < 0 \\ \cos x = 1 \\ -1 \le \sin 2x < 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что

$$\sin x = 0$$

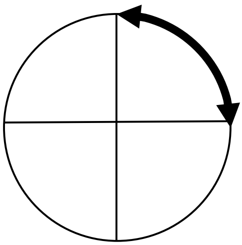
И это противоречит первому уравнению. В данном варианте решения отсутствуют. Рассмотрим второй вариант

$$\begin{cases}[\sin x]=0\\ [\cos x]=0\\ [\sin 2x]=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le \sin x<1\\ 0\le \cos x<1\\ 0\le \sin 2x<1\end{cases}$$

Из первого и второго соотношений системы следует, что

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \ge 0,$$

а так как $\sin 2x \le 1$, то из решений первых двух двойных неравенств системы нужно только выбросить точки в которых $\sin 2x = 1$. Решения первых двух указанных неравенств определяют первую четверть на тригонометрическом круге:



Решение уравнения $\sin 2x = 1$ имеют вид

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

Таким образом, решения для второго варианта имеют вид

$$x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

Рассмотрим последний вариант.

$$\begin{cases}[\sin x]=1\\ [\cos x]=-1\\ [\sin 2x]=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1\\ -1\le \cos x<0\\ \sin 2x=1\end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $\cos x = 0$, что противоречит второму соотношению системы. Эта система также как и первая решений не имеет.

Ответ: $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

3. Пусть $2a^4+4a^2+1$ и $2a^3+3a$ делятся на *d*. Тогда

$$2a^4+3a^2=(2a^3+3a)a$$

Также делится на *d*. Отсюда следует, что на *d* делится разность

$$(2a^4+4a^2+1)-(2a^4+3a^2)=a^2+1.$$

Следовательно величина

$$2a^3+2a=(a^2+1)\cdot 2a$$

также делится на *d*. Так как согласно первоначальному предположению величина $2a^3+3a$ делится на *d* и $2a^3+2a$ также делится на *d* , то на *d* делится их разность

$$(2a^2+3a)-(2a^2+2a)=a.$$

Поэтому на *d* делится также и a^2. Но выше было показано, что на *d* делится величина a^2+1, отсюда следует, что разность

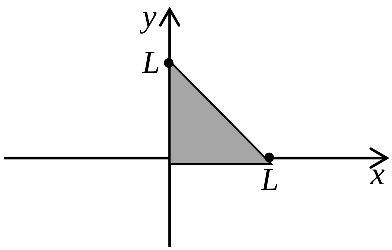
$$(a^2+1)-a^2=1$$

должна делится на *d*, но это означает, что *d*=1, что и означает несократимость исходной дроби. Утверждение задачи доказано.

4. Пусть *x* и *y* – длины двух отрезков с левой стороны. Длина третьего отрезка равна $L-(x+y)$. Пространство элементарных событий состоит их всех пар (x,y), для которых

$$\begin{cases} 0\le x\le L \\ 0\le y\le L \\ 0\le L-(x+y)\le L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le L \\ 0\le y\le L \\ 0\le x+y\le L \end{cases}$$

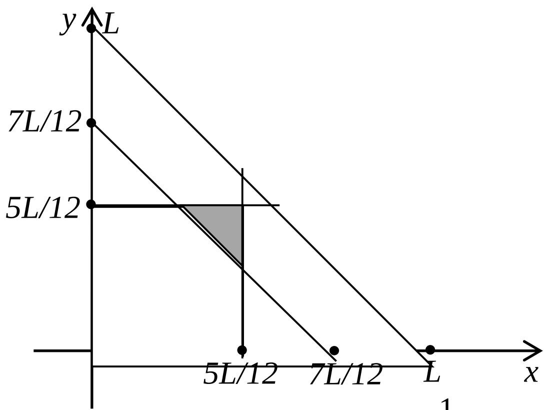
На координатной плоскости они образуют треугольник с вершинами $(0,0),\ (L,0),\ (0,L)$:



Площадь этого треугольника равна $L^2/2$. Для решения задачи удобнее вычислить вероятность неблагоприятных событий, которые определяются системой неравенств

$$\begin{cases} x \le \dfrac{5}{12}L \\ y \le \dfrac{5}{12}L \\ L-(x+y) \le \dfrac{5}{12}L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{12}L \\ y \le \dfrac{5}{12}L \\ x+y \ge \dfrac{7}{12}L \end{cases}$$

На координатной плоскости они также образуют прямоугольный треугольник с катетами $L/4$:



Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{32}L^2$. Вероятность неблагоприятных событий равна отношению площадей

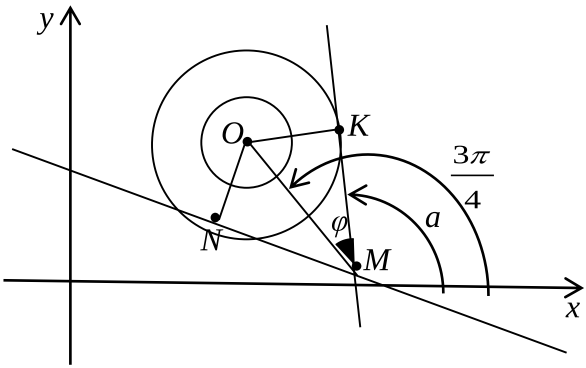
$$q = \frac{\frac{1}{32}L^2}{\frac{1}{2}L^2} = \frac{1}{16}$$

А искомая вероятность

$$p = 1 - q = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Ответ: $\dfrac{15}{16}$.

5. Первое уравнение системы определяет семейство прямых, проходящих через точку $M(7;1)$ и имеющих угловой коэффициент, равный $k = \operatorname{tg} a$. Второе уравнение определяет пару концентрических окружностей с центром $O(4;4)$ и радиусами 1 и 2. Система будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда прямая касается окружности большего радиуса. Таких прямых две:



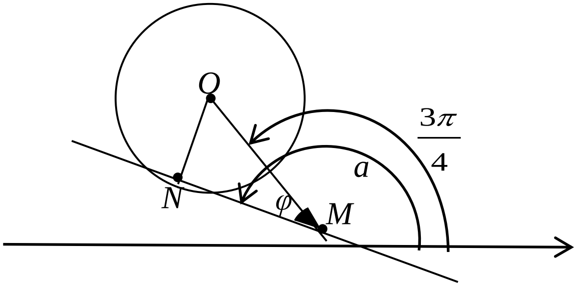
Вектор $\overrightarrow{MO}$ имеет координаты {4-7;4-1}={-3;3} и поэтому прямая MO образует угол $3\pi/4$ с осью абсцисс. По теореме Пифагора длина отрезка MO равна $3\sqrt{2}$. Длина отрезка OK (K – точка касания) равна 2 (радиус большей окружности). Поэтому из прямоугольного треугольника OMK находим величину угла

$$\varphi = \angle OMK = \arcsin\frac{2}{3\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Теперь находим величину искомого угла

$$a = \left(\frac{3\pi}{4} + \pi n\right) - \varphi = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3} + \pi n.$$

Аналогично находим значение параметра a для второй прямой



Так как треугольники OMK и OMN равны, то величина угла $\angle OMN$ также равна

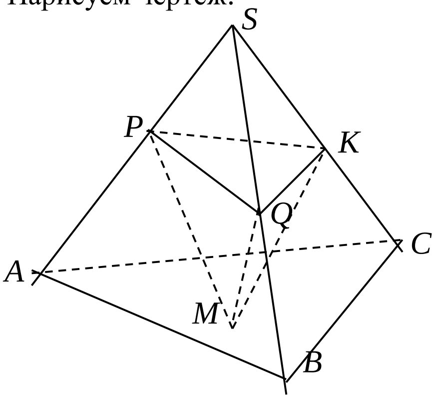
$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Следовательно

$$a = \left(\frac{3\pi}{4} + \pi n\right) + \varphi = \frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3} + \pi n.$$

Ответ: $a = \frac{3\pi}{4} \pm \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

6. Нарисуем чертёж:



Обозначим заданные в задаче отношения следующим образом $SP:SA = \lambda_1, SQ:SB = \lambda_2, SA:SC = \lambda_3.$ Пусть V – объем пирамиды $SABC$. Вычислим объем V_1 пирамиды $SPQK$. Пусть у пирамииды $SABC$ основанием будет треугольник SAB, а вершиной точка C. Тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{SAB} h_C,$$

где h_C − высота, опущенная из вершины C. Площадь основания

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin(\angle S).$$

Площадь SPQ равна

$$S_{SPQ} = \frac{1}{2} SP \cdot SQ \cdot \sin(\angle S).$$

Следовательно

$$\frac{S_{SPQ}}{S_{SAB}} = \frac{\frac{1}{2} SP \cdot SQ \cdot \sin(\angle S)}{\frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin(\angle S)} = \frac{SP}{SA} \cdot \frac{SQ}{SB} = \lambda_1 \lambda_2$$

Так, что

$$S_{SPQ} = \lambda_1 \lambda_2 S_{SAB}.$$

Объем пирамиды $SPQK$

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{SPQ} h_K,$$

где h_K − высота, опущенная на плоскость SAB из вершины K.

Так как $SA : SC = \lambda_3$, то также и

$$\frac{h_K}{h_C} = \lambda_3 \Rightarrow h_K = \lambda_3 h_C.$$

Таким образом

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{SPQ} h_K = \frac{1}{3} \left(\lambda_1 \lambda_2 S_{SAB} \right) \left(\lambda_3 h_C \right) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left(\frac{1}{3} S_{SAB} h_C \right),$$

т.е.

$$V_1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 V.$$

Объем пирамиды $MPQK$ равен произведению одной трети площади треугольника PQK на расстояние от точки M до плоскости PQK. Следовательно объем пирамиды $MPQK$ будет максимальным в том случае когда точка M находится на наибольшем расстоянии от плоскости PQK. Нетрудно видеть, что для этого точка M должна совпадать с той вершиной треугольника ABC, которая находится дальше всего от плоскости PQK. Обозначим искомый в задаче объем пирамиды $MPQK$ через V_2. Если точка M совпадает с вершиной A, то поскольку у пирамид $MPQK$ и $SPQK$ одно и то же основание PQK, то отношение их объемов равно

$$\frac{AP}{SP} = \frac{SA - SP}{SP} = \frac{SA}{SP} - 1 = \lambda_1 - 1.$$

Следовательно

$$V_2 = (\lambda_1 - 1)V_1.$$

Аналогично в том случае, когда точка M совпадает с вершиной B, то

$$V_2 = (\lambda_2 - 1)V_1,$$

а если когда точка M совпадает с вершиной C, то

$$V_2 = (\lambda_3 - 1)V_1,$$

Таким образом наибольшее значение объема

$$V_2 = \max\left\{\frac{1}{\lambda_1} - 1, \frac{1}{\lambda_2} - 1, \frac{1}{\lambda_3} - 1\right\}V_1,$$

т.е.

$$V_2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \max\left\{\frac{1}{\lambda_1} - 1, \frac{1}{\lambda_2} - 1, \frac{1}{\lambda_3} - 1\right\}V.$$

Для данного варианта

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{2}{3},\ \lambda_3 = \frac{3}{5},\ V = 15,$$

что дает значение

$$V_2 = 3.$$

Ответ: 3.

Вариант № 2

1. Знаменатель геометрической прогрессии b_n равен q, а при некотором натуральном $n \geq 2$

$$\log_3 b_2 + \log_3 b_3 + \ldots + \log_3 b_n = 3 \cdot \log_3 b_1 .$$

Найти наибольшее возможное значение $\log_q b_1^2$, если известно, что оно целое. При каком n это значение достигается?

Ответ: 6 при $n = 3$.

2. Решить уравнение $[\sin 2x] - 2[\cos x] = 3[\sin 3x]$, где $[a]$ − целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

Ответ:

$$x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$$

3. Доказать, что дробь $\dfrac{2a^2 + a + 1}{2a^3 + a^2 + 2a}$ несократимая при любых натуральных a.

4. На отрезке длины L случайным образом взяты две точки, разделившие его на три части. Найти вероятность того, что длина одной из этих частей окажется не меньшей $3L/4$.

Ответ: $\dfrac{3}{16}$

5. При каких a система

$$\begin{cases} x \sin a - (y-6)\cos a = 0 \\ \left((x-3)^2 + (y-3)^2 - 1\right)\left((x-3)^2 + (y-3)^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет два решения?

Ответ:

$$a \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{6} + \pi n \right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{6} + \pi n; \pi + \pi n \right), \ n \in Z$$

6. Точки P, Q и K расположены на боковых ребрах SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ так, что

$$SP : SA = 2 : 3, SQ : SB = 1 : 4, SK : SC = 1 : 3.$$

Объем пирамиды $SABC$ равен 12. Точка M принадлежит треугольнику ABC основания пирамиды. Найти максимально возможное значение объема пирамиды $MPQK$.

Ответ: 2.

Вариант № 3

1. Знаменатель геометрической прогрессии b_n равен q, а при некотором натуральном $n \geq 2$

$$\log_4 b_2 + \log_4 b_3 + \ldots + \log_4 b_n = 4 \cdot \log_4 b_1 .$$

Найти наименьшее возможное значение $\log_q b_1^2$, если известно, что оно целое. При каком n это значение достигается?

Ответ: -30 при $n = 6$ и $n = 25$.

2. Решить уравнение $[\cos 3x] + 2[\sin 2x] = [\cos x]$, где $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z \\ x\in\left[2\pi n;\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z \\ x\in\left[\pi+2\pi n;\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z \end{array}\right.$

3. Доказать, что дробь $\dfrac{6a^4+6a^2+1}{6a^3+3a}$ несократимая при любых натуральных a.

4. На отрезке длины L случайным образом взяты две точки, разделившие его на три части. Найти вероятность того, что длина одной из этих частей окажется не меньшей $4L/9$.

Ответ: $\dfrac{8}{9}$

5. При каких a система

$$\begin{cases} (x-5)\sin a-(y-5)\cos a=0 \\ \left((x+1)^2+(y+1)^2-4\right)\left((x+1)^2+(y+1)^2-16\right)=0 \end{cases}$$

имеет три решения?

Ответ: $a=\dfrac{\pi}{4}\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{6}+\pi n,\ n\in Z$

6. Точки P, Q и K расположены на боковых ребрах SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ так, что

$$SP:SA=2:5,\ SQ:SB=1:2,\ SK:SC=4:9.$$

Объем пирамиды $SABC$ равен 45. Точка M принадлежит треугольнику ABC основания пирамиды. Найти максимально возможное значение объема пирамиды $MPQK$.

Ответ: 6.

Вариант № 4

1. Знаменатель геометрической прогрессии b_n равен q, а при некотором натуральном $n \geq 2$

$$\log_5 b_2 + \log_5 b_3 + \ldots + \log_5 b_n = 5 \cdot \log_5 b_1 .$$

Найти наибольшее возможное значение $\log_q b_1^2$, если известно, что оно целое. При каком n это значение достигается?

Ответ: 20 при $n = 5$.

2. Решить уравнение $2[\cos 2x] - [\sin x] = 3[\sin 4x]$, где $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

Ответ: $$\left[\begin{array}{l} x \in \left(2\pi n; \dfrac{\pi}{8} + 2\pi n\right),\ n \in Z \\ x = \left(\dfrac{\pi}{8} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right],\ n \in Z \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

3. Доказать, что дробь $\dfrac{2a^2 + a + 1}{2a^3 + 3a^2 + 2a}$ несократимая при любых натуральных a.

4. На отрезке длины L случайным образом взяты две точки, разделившие его на три части. Найти вероятность того, что длина одной из этих частей окажется не меньшей $2L/3$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$

5. При каких a система

$$\begin{cases} (x-8)\sin a - (y+2)\cos a = 0 \\ \left((x-3)^2 + (y-3)^2 - 1\right)\left((x-3)^2 + (y-3)^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет четыре решения?

Ответ:

$$a \in \left(\frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n \right),\ n \in Z.$$

6. Точки P, Q и K расположены на боковых ребрах SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ так, что

$$SP : SA = 3:5,\ SQ : SB = 2:3,\ SK : SC = 1:6\ .$$

Объем пирамиды $SABC$ равен 24. Точка M принадлежит треугольнику ABC основания пирамиды. Найти максимально возможное значение объема пирамиды $MPQK$.

Ответ: 8.