Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2018
7 класс

Вариант № 1

1. В мешке деда Мороза находится 30 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 5 желтых, 10 красных и 15 синих. Петя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Петя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет различных цветов?

2. На столе разложены 17 карточек, на каждой из которых написаны различные числа от 5 до 21. Карточки перевернули так, чтобы чисел не было видно, перемешали и предложили Саше и Маше взять по 8 карточек. Оказалось, что сумма чисел на карточках, отобранных Машей, на 72 больше, чем сумма чисел на карточках Саши. Какое число написано на карточке, оставшейся на столе?

3. Возвести в квадрат числа $a = 11$, $b = 111$. Извлечь квадратный корень из числа $c = 12345678787654321$.

4. Циклической перестановкой $P(a)$ натурального числа $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, $a_n \neq 0$ называют число $b = \overline{a_n a_1 a_2 ... a_{n-1}}$ записанное теми же цифрами, но в другом порядке: последняя цифра становится первой, а остальные сдвигаются на разряд вправо. Сколько существует шестизначных чисел a, для которых $P(P(a)) = a$? Найти эти числа. Доказать, что при простом $n > 2$ уравнение $P(P(a)) = a$ не имеет решений a, в записи которых присутствуют различные цифры.

Ответы и решения

1. Если Петя возьмет 5 и более конфет, то, возможно, в корзине не останется ни одной желтой конфеты, и условие задачи не будет выполнено. Если Петя возьмет не более 4 конфет, то в мешке останется не менее трех конфет различных цветов.

Ответ: 4 конфеты.

2. Максимальная разница между суммами Саши и Маши получится, если один заберет 8 карточек с наименьшими числами $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, а другой − 8 карточек с наибольшими числами $14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21$. В этом случае эта разница составит

$$\Delta = (14+15+16+17+18+19+20+21) -$$
$$-(5+6+7+8+9+10+11+12) = 35\cdot 4 - 17\cdot 4 = 72,$$

что и требуется по условию. Осталась карточка с числом 13. При любом другом выборе карточек Сашей и Машей наименьшая сумма увеличивается, а наибольшая − уменьшается, поэтому разница между тх суммами уменьшится и будет меньше, чем 72, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 13.

3. Пусть $c_n = \underbrace{11...1}_{n}$ – число, в десятичной записи которого присутствует n единиц. Тогда $c_{n+1} = 10\cdot c_n + 1,$. Поэтому

$$c_{n+1}^2 = 100\cdot c_n^2 + \underbrace{22...2}_{n}\cdot 10 + 1 \qquad (*)$$

Например,

$$c_2^2 = 11^2 = (10\cdot 1 + 1)^2 = 100 + 2\cdot 10 + 1 = 121,$$
$$c_3^2 = 111^2 = 100\cdot 11^2 + 220 + 1 = 12100 + 220 + 1 = 12321,$$
$$c_4^2 = 1111^2 = 100\cdot 111^2 + 2220 + 1 = 1232100 + 2220 + 1 = 1234321,$$

и т.д.

Заметим, что для всех выписанных чисел c_2^2, c_3^2, c_4^2 цифра, относительно которой эти числа симметричны (2 − в случае c_2^2, 3 − в случае c_3^2, 4 − в случае c_4^2) совпадает с количество единиц в числе,которое возводили в квадрат.Данное в задаче число $c = 123456787654321$ также симметрично относительно цифры 8, т.е. можно предположить, что оно является квадратом числа

$c_8 = 11111111$. Это можно проверить умножением в столбик, либо с использованием рекуррентного соотношения (*).

Ответ: 1) $a^2 = 121$; 2) $b^2 = 12321$; 3) $\sqrt{c} = 11111111$.

4. Если $a = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$, то $P(a) = \overline{a_6 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$, $P(P(a)) = \overline{a_5 a_6 a_1 a_2 a_3 a_4}$ при этом $a_5 \neq 0, a_6 \neq 0, a_1 \neq 0$. Из равенства $P(P(a)) = a$ следует, что $a_1 = a_5$, $a_2 = a_6$, $a_3 = a_1$, $a_4 = a_2$, $a_5 = a_3$, $a_6 = a_4$, то есть $a_1 = a_3 = a_5 = t, t = 1, 2, ..., 9$ и $a_2 = a_4 = a_6 = u, u = 1, 2, ..., 9$. Таким образом, искомые $a = \overline{tututu}$ и таких различных чисел 81(t и u могут принимать любые значения цифр десятичной системы счисления от 1 до 9).

Пусть $n > 2 -$ простое число, $a = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n}$. Тогда

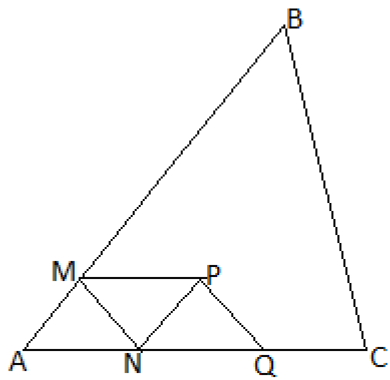
$$P(a) = \overline{a_n a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1}},$$

$$P(P(a)) = \overline{a_{n-1} a_n a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-3} a_{n-2}}.$$

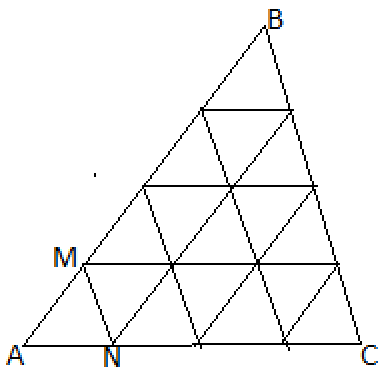
Свойство $P(P(a)) = a$ дает соотношения $a_1 = a_{n-1} = a_{n-3} = ... = a_1$. При простом $n > 2$ в цепочку входят все цифры числа a, поэтому они все равны друг другу.

Ответ: 1) 81 число; 2) $a = \overline{tututu}, t, u,$ где $t, u -$ произвольные цифры, не равные нулю.

5. Пусть треугольник ABC разбит на n равных треугольников и один из них AMN имеет вершину в точке A.



По условию задачи к нему примыкает равный ему треугольник MNP,, при этом линии разреза MP и NP параллельны сторонам AB и AC треугольника ABC. Для того чтобы треугольник разбиения с вершиной в точке C был равен треугольнику AMN необходимо чтобы угол MNA был равен углу BCA. Аналогично, устанавливается равенство углов AMN и CBA. Таким образом, все разрезы должны производится по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC.



Если к стороне AC прилегают k треугольников разбиения, то к сторонам AB и BC прилегает такое же количество треугольников разбиения. С учетом целочисленности сторон, число k является общим делителем чисел a,b,c, а общее число треугольников разбиения равно $n=1+3+5+(2k-1)=k^2$. Их наибольшее количество соответствует $k=НОД\left(a,b,c\right)$, а наибольшим числом равных треугольников с целочисленными длинами сторон является число $n_{\max}=\left(НОД\left(a,b,c\right)\right)^2$

Ответ: 16.

Вариант № 2

1 В мешке деда Мороза находится 34 одинаковых по форме карандашей разного цвета: 6 черных, 8 красных и 20 голубых. Вова, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько карандашей. Какое максимальное количество карандашей может взять Вова, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех карандашей каждого из цветов?

Ответ: 3 карандаша.

2. На столе разложены 21 карточка, на каждой из которых написаны различные числа от 7 до 27. Карточки перевернули так, чтобы чисел не было видно, перемешали и предложили Коле и Оле взять по 10 карточек. Оказалось, что сумма чисел на карточках, отобранных Колей, на 110 больше, чем сумма чисел на карточках Оли. Какое число написано на карточке, оставшейся на столе?

Ответ: 17.

3. Возвести в квадрат числа $a = 101,\ b = 10101$. Извлечь квадратный корень из числа $c = 102030405060504030201$.

Ответ: $1) a^2 = 10201;\ 2)\ b^2 = 102030201;\ 3) \sqrt{c} = 10101010101$.

4. Циклической перестановкой $P(a)$ натурального числа $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, $a_n \neq 0$ называют число $b = \overline{a_n a_1 a_2 ... a_{n-1}}$ записанное теми же цифрами, но в другом порядке: последняя цифра становится первой, а остальные сдвигаются на разряд вправо. Сколько существует восьмизначных чисел a, для которых $P(P(P(P(a)))) = a$? Найти эти числа. Доказать, что при простом $n > 3$ уравнение $P(P(P(P(a)))) = a$ не имеет решений a с различными цифрами.

Ответ: 1) 9^4 число; 2) $a = \overline{tuvwtuvw}, t, u, v, w$ – произвольные цифры, не равные нулю.

5. Длины сторон треугольника ABC – целые числа a, b, c, для которых $НОД\left(a, b, c\right) = 5$. На какое максимальное число равных треугольников можно разрезать треугольник ABC, если длины их сторон выражаются целыми числами?

Ответ: 25.

Вариант № 3

1. В мешке деда Мороза находится 45 одинаковых по форме шариков для елки разных цветов: 8 золотых, 12 серебряных, 18 красных и 7 зеленых. Катя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько шаров. Какое максимальное количество шаров может взять Катя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее двух шаров каждого из цветов?

Ответ: 5 шаров.

2. На столе разложены 23 карточки, на каждой из которых написаны различные числа от 9 до 31. Карточки перевернули так, чтобы чисел не было видно, перемешали и предложили Дане и Ване взять по 11 карточек. Оказалось, что сумма чисел на карточках, отобранных Даней, на 132 больше, чем сумма чисел на карточках Вани. Какое число написано на карточке, оставшейся на столе?

Ответ: 20.

3. Возвести в квадрат числа $a = 1001,\ b = 1001001$. Извлечь квадратный корень из числа $c = 1002003004005004003002001$.

Ответ:

$$1)a^2 = 1002001;\ 2)\,b^2 = 1002003002001;\ 3)\sqrt{c} = 1001001001001.$$

4. Циклической перестановкой $P(a)$ натурального числа $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, $a_n \neq 0$ называют число $b = \overline{a_n a_1 a_2 ... a_{n-1}}$ записанное теми же цифрами, но в другом порядке: последняя цифра становится первой, а остальные сдвигаются на разряд вправо. Сколько существует шестизначных чисел a, для которых $P(P(P(a))) = a$? Найти эти числа. Доказать, что при простом $n > 3$ уравнение $P(P(P(a))) = a$ не имеет решений a с различными цифрами.

Ответ: 1) 9^3 число; 2) $a = \overline{tuvtuv}$, где t, u, v – произвольные цифры, не равные нулю.

5. Длины сторон треугольника ABC – целые числа a, b, c , для которых $НОД\left(a, b, c\right) = 6$. На какое максимальное число равных треугольников можно разрезать треугольник ABC, если длины их сторон выражаются целыми числами?

Ответ: 36.

Вариант № 4

1. В мешке деда Мороза находится 28 одинаковых по форме кукол, отличающихся по цвету волос: 9 блондинок, 8 брюнеток и 11 шатенок. Маша, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько кукол. Какое максимальное количество кукол может взять Маша, чтобы быть уверенной в том, что в мешке останется не менее трех кукол, среди которых есть блондинка, брюнетка и шатенка?

Ответ: 7 кукол.

2. На столе разложены 25 карточек, на каждой из которых написаны различные числа от 4 до 28. Карточки перевернули так, чтобы чисел не было видно, перемешали и предложили Кате и Свете взять по 12 карточек. Оказалось, что сумма чисел на карточках, отобранных Катей, на 156 больше, чем сумма чисел на карточках Светы. Какое число написано на карточке, оставшейся на столе?

Ответ: 16.

3. Возвести в квадрат числа $a = 10001,\ b = 100010001$. Извлечь квадратный корень из числа $c = 1000200030004000300020001$.

Ответ:

1)$a^2 = 100020001$; 2) $b^2 = 10002000300020001$; 3)$\sqrt{c} = 1000100010001$.

4. Циклической перестановкой $P(a)$ натурального числа $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, $a_n \neq 0$ называют число $b = \overline{a_n a_1 a_2 ... a_{n-1}}$ записанное теми же цифрами, но в другом порядке: последняя цифра становится первой, а остальные сдвигаются на разряд вправо. Сколько существует девятизначных чисел a, для которых $P(P(P(P(P(P(a)))))) = a$? Найти эти числа. Доказать, что при простом $n > 6$ уравнение $P(P(P(P(P(P(a)))))) = a$ не имеет решений a с различными цифрами.

Ответ: 1) 9^3 число; 2) $a = \overline{tuvtuvtuv}$, где t, u, v – произвольные цифры, не равные нулю.

5. Длины сторон треугольника ABC – целые числа a,b,c, для которых $НОД(a,b,c)=7$. На какое максимальное число равных треугольников можно разрезать треугольник ABC, если длины их сторон выражаются целыми числами?

Ответ: $n = 99$.