

Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2018
8 класс

Вариант № 1

1. Решить уравнение $f(f(f(x))) = x$, где $f(x) = 2x - 3$.

2. Петя выбрал четыре цифры: 3, 5, 7 и 8 и только с их помощью записал все возможные трехзначные числа. Например, 335, 777, 875 и т.п. Далее у каждого числа он перемножил цифры, участвующие в его десятичной записи, а затем полученные результаты сложил. Какое число получил Петя?

3. В строке записаны один за другим целые числа, начиная с 2, причем каждое последующее число, кроме первого, является суммой двух соседних с ним чисел. Сумма первых 999 чисел равна 6. Какое число стоит в строке на 275-ом месте?

4. Взаимно простые целые числа $(x; y)$, являются координатами точки на параболе $y = x^2 + 2x + 6$. Сколько таких точек лежит на параболе с абсциссами $x \in [1204; 1789]$?

5. Петя нарисовал на плоскости восемь параллельных прямых и пересек их семейством из семи параллельных между прямыми. Посмотрев внимательно на рисунок, он стал пересчитывать образованные этими прямыми параллелограммы. Сколько параллелограммов мог обнаружить Петя?

Ответы и решения

1. По условию $f(x) = 2x - 3$. Вычислим $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$:

$$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9,$$

$$f(f(f(x))) = 2f(f(x)) - 3 = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21.$$

Тогда уравнение примет вид: $8x - 21 = x$. Отсюда находим $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

2. Искомое число равно

$$(3+5+7+8) \cdot (3+5+7+8) \cdot (3+5+7+8) = 23^3 = 12167.$$

Ответ: $23^3 = 12167$.

В строке записаны один за другим целые числа, начиная с 2, причем каждое последующее число, кроме первого, является суммой двух соседних с ним чисел. Сумма первых 999 чисел равна 6. Какое число стоит в строке на 275-ом месте?

3. Обозначим второе число через x . Тогда, согласно условиям задачи, получаем следующую последовательность целых чисел:

$$2, x, x-2, -2, -x, 2-x, 2, x, \dots$$

Заметим, что на седьмом месте снова стоит число 2, следовательно, значения членов последовательности будут повторяться с периодом 6, причем сумма первых 6 чисел равна нулю. Так как $999 = 6 \cdot 166 + 3$, то сумма первых 999 чисел равна сумме первых трех чисел, что дает $2 + x + x - 2 = 2x$. По условию эта сумма равна 6, следовательно, $x = 3$. Так как $275 = 6 \cdot 45 + 5$, то на 275 месте стоит то же число, что и на 5 месте, то $-x = -3$.

Ответ: -3 .

4. По условию задачи целые числа x и $x^2 + 2x + 6$ являются взаимно простыми. Отсюда следует, что числа x и 6 взаимно простые, то есть x не делится на 2 и 3.

Вычислим количество целых чисел на отрезке $[1204; 1789]$:

$$N = 1789 - 1204 + 1 = 586.$$

Вычислим количество целых чисел на отрезке $[1204; 1789]$, делящихся на 2. Их число находим из условия

$$1204 \leq 2k \leq 1789 \text{ или } 602 \leq k \leq 894.$$

Таким образом, количество этих чисел равно

$$N_1 = 894 - 602 + 1 = 293.$$

Вычислим количество целых чисел на отрезке $[1204; 1789]$, делящихся на 3. Их число находим из условия

$$1204 \leq 3k \leq 1789 \text{ или } 402 \leq k \leq 596.$$

Таким образом, количество этих чисел равно

$$N_2 = 596 - 402 + 1 = 195.$$

В сумме $N_1 + N_2$ дважды посчитаны числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3, то есть делятся на 6. Число таких чисел находим из условия

$$1204 \leq 6k \leq 1789 \text{ или } 201 \leq k \leq 298.$$

Таким образом, количество этих чисел равно

$$N_3 = 298 - 201 + 1 = 91.$$

Искомое число чисел равно

$$N - (N_1 + N_2) + N_3 = 586 - (293 + 195) + 98 = 196.$$

Ответ: 196.

5. Параллелограммы образуются при пересечении двух пар параллельных прямых из разных семейств. Из первого семейства восьми параллельных прямых две прямые можно выбрать

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ способами (одну из них – 8 способами, вторую – 7}$$

способами, но нужно учесть дублирование – произведение $8 \cdot 7$ разделить на 2). Из второго семейства семи параллельных прямых две прямые можно выбрать

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ способами (одну из них – 7 способами, вторую – 6}$$

способами, с учетом дублирования – произведение $7 \cdot 6$ делим на 2). Таким образом, Петя мог максимально насчитать $28 \cdot 21 = 588$ параллелограммов.

Ответ: 588.

Вариант № 2

1. Решить уравнение $f(f(f(x))) = 2(x-1)$, где $f(x) = 3x - 4$.

Ответ: $x = 2$.

2. Маша выбрала пять цифр: 2, 3, 5, 8 и 9 и только с их помощью записала все возможные четырехзначные числа. Например, 2358, 8888, 9235 и т.п. Далее у каждого числа она перемножила цифры,

участвующие в его десятичной записи, а затем полученные результаты сложила. Какое число получила Маша?

Ответ: $27^4 = 531441$.

3. В строке записаны один за другим целые числа, начиная с 3, причем каждое последующее число, кроме первого, является суммой двух соседних с ним чисел. На 1947-ом месте оказалось число равное 7.

Ответ: $\Sigma_{851} = 7$.

4. Целые числа $(x; y)$, для которых $\text{НОД}(x, y) = 2$, являются координатами точки на параболе $y = 2x^2 + 3x + 8$. Сколько таких точек лежит на параболе с абсциссами $x \in [476; 1991]$?

Ответ: 379 точек.

5. Саша нарисовала на плоскости шесть параллельных прямых и пересекла их семейством из пяти параллельных прямых. Посмотрев внимательно на рисунок, она стала пересчитывать образованные этими прямыми параллелограммы. Сколько параллелограммов могла обнаружить Саша?

Ответ: 150.

Вариант № 3

1. Решить уравнение $f(f(f(x))) = 2 - 3x$, где $f(x) = 2x + 5$.

Ответ: $x = -3$

2. Егор выбрал три цифры: 1, 3 и 5 и только с их помощью записал все возможные пятизначные числа. Например, 33511, 11111, 53131 и т.п. Далее у каждого числа он перемножил цифры, участвующие в его десятичной записи, а затем полученные результаты сложил. Какое число получил Егор?

Ответ: $9^5 = 59049$.

3. В строке записаны один за другим целые числа, начиная с 4, причем каждое последующее число, кроме первого, является суммой двух соседних с ним чисел. Сумма первых 723 чисел равна 14. Какое число стоит в строке на 159-ом месте?

Ответ: $a_{159} = 3$.

4. Целые числа $(x; y)$, для которых $\text{НОД}(x, y) = 3$, являются координатами точки на параболе $y = 4x^2 + x + 9$. Сколько таких точек лежит на параболы с абсциссами $x \in [1495; 1880]$?

Ответ: 86 точек.

5. Даня нарисовал на плоскости девять параллельных прямых и пересек их семейством из четырех параллельных прямых. Посмотрев внимательно на рисунок, он стал пересчитывать образованные этими прямыми параллелограммы. Сколько параллелограммов мог обнаружить Даня?

Ответ: 216.

Вариант № 4

1. Решить уравнение $f(f(f(x))) = -34x$, где $f(x) = 2 - 3x$.

Ответ: $x = -2$.

2. Даша выбрала четыре цифры: 2, 3, 4 и 5 и только с их помощью записала все возможные трехзначные числа. Например, 234, 222, 533 и т.п. Далее у каждого числа она перемножила цифры, участвующие в его десятичной записи, а затем полученные результаты сложила. Какое число получила Даша?

Ответ: $14^3 = 2744$.

3. В строке записаны один за другим целые числа, начиная с 5, причем каждое последующее число, кроме первого, является суммой двух соседних с ним чисел. На 623-ем месте оказалось число равное 6. Найти сумму первых 429 чисел.

Ответ: $\Sigma_{429} = -12$.

4. Целые числа $(x; y)$, для которых $\text{НОД}(x, y) = 4$, являются координатами точки на параболы $y = 3x^2 + 7x + 8$. Сколько таких точек лежит на параболы с абсциссами $x \in [1799; 2000]$?

Ответ: 25 точек.

5. Маша нарисовала на плоскости десять параллельных прямых и пересекла их семейством из шести параллельных прямых.

Посмотрев внимательно на рисунок, она стала пересчитывать образованные этими прямыми параллелограммы. Сколько параллелограммов могла обнаружить Маша?

Ответ: 675.