Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика,
10 класс.

Вариант № 1

1. Привокзальные часы имеют три электронных циферблата, которые показывают текущее время в часах, минутах и секундах соответственно. Очередные сутки начинаются, когда на табло часов светятся три нуля, а заканчиваются в 23 часа 59 минут 59секунд. Сколько раз в течении суток сумма числа часов и минут на них равняется числу секунд?

2. При каких a уравнение $2\cos 2x + 4a\sin x = 3$ имеет решения?

3. Члены последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ определяются по правилу: для каждого натурального m $a_{m+1} = a_m \cdot p_m$, , где $p_m > 1$ – наименьшее простое число, не делящее a_m. Первый член последовательности $a_1 = 2$. Найти m, для которого $a_{m+2} - a_m = 29820$.

4. Даны два отрезка длины 1 и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ соответственно. С помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{5}$.

5. На гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет в три раза больше другого, во внешнюю сторону построен правильный треугольник. В каком отношении биссектриса прямого угла делит его площадь?

Вариант № 2

1. Привокзальные часы имеют три электронных циферблата, которые показывают текущее время в часах, минутах и секундах соответственно. Очередные сутки начинаются, когда на табло часов светятся три нуля, а заканчиваются в 23 часа 59 минут 59секунд. Сколько раз в течении суток количество часов на табло в два раза меньше суммы числа минут и секунд?

2. При каких a уравнение $\cos 2x - 2(a+4)\cos x + 5 + 8a = 0$ не имеет решений?

3. Члены последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ определяются по правилу: для каждого натурального m $a_{m+1} = a_m \cdot p_m$, , где $p_m > 1$ – наименьшее простое число, не делящее a_m. Первый член последовательности $a_1 = 2$. Найти наибольшее целое число b, при котором a_m может быть корнем уравнения $x^2 + bx + 9240 = 0$ для некоторого m.

4. Есть два отрезка длины 1 и $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ соответственно. С помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{11}$.

5. На гипотенузе прямоугольного треугольника с острым углом 30^0 во внешнюю сторону построен правильный треугольник. В каком отношении биссектриса прямого угла делит его площадь?

Вариант № 3

1. Привокзальные часы имеют три электронных циферблата, которые показывают текущее время в часах, минутах и секундах соответственно. Очередные сутки начинаются, когда на табло часов светятся три нуля, а заканчиваются в 23 часа 59 минут 59секунд. Сколько раз в течении суток количество секунд на табло в два раза меньше суммы числа часов и минут?

2. При каких a уравнение $\cos 2x - 2(a-2)\cos x = 2a - 5$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$?

3. Члены последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ определяются по правилу: для каждого натурального m $a_{m+1} = a_m \cdot p_m$, , где $p_m > 1$ – наименьшее простое число, не делящее a_m. Первый член

последовательности $a_1 = 2$. Найти целое число b, при котором оба корня уравнения $x^2 + bx + 1260 = 0$ являются членами последовательности a_m.

4. Есть два отрезка длины 1 и $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ соответственно. С помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{13}$.

5. На гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет в два раза больше другого, во внешнюю сторону построен правильный треугольник. В каком отношении биссектриса прямого угла делит его площадь?

Вариант № 4

1. Привокзальные часы имеют три электронных циферблата, которые показывают текущее время в часах, минутах и секундах соответственно. Очередные сутки начинаются, когда на табло часов светятся три нуля, а заканчиваются в 23 часа 59 минут 59секунд. Сколько раз в течении суток количество часов на табло равно сумме числа минут и секунд?

2. При каких a уравнение $\cos 2x - 2(a-4)\sin x = 2a + 9$ имеет два решения на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$?

3. Члены последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ определяются по правилу: для каждого натурального m $a_{m+1} = a_m \cdot p_m$, , где $p_m > 1$ – наименьшее простое число, не делящее a_m. Первый член последовательности $a_1 = 2$. Найти наименьшее по модулю целое число b, при котором a_m может быть корнем уравнения $x^2 + bx - 6930 = 0$ для некоторого m.

4. Есть два отрезка длины 1 и $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ соответственно. С помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{19}$.

5. На гипотенузе прямоугольного треугольника, отношение катетов которого $3:4$, во внешнюю сторону построен правильный треугольник. В каком отношении биссектриса прямого угла делит его площадь?

Решения и ответы

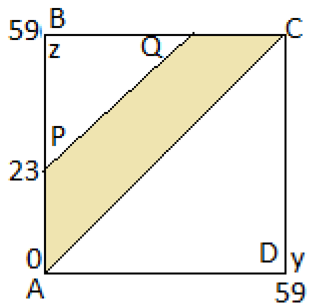
Вариант 1

Задача 1 Ответ: 1164 раза

Решение. Пусть x, y и z значения часов, минут и секунд соответственно. По условию:

$$\begin{cases} x + y = z \\ 0 \le x \le 23 \\ 0 \le y \le 59, 0 \le z \le 59 \end{cases} \to x = z - y \to 0 \le z - y \le 23 \to y \le z \le y + 23$$

На рис изображено множество (трапеция $APQC$) целочисленных пар $(y; z)$, удовлетворяющих условию задачи.



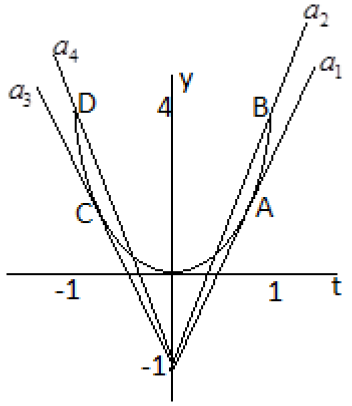
Значению $x = 0$ соответствуют точки $(y; z)$, лежащие на диагонали AC. Таких точек 60. На параллельной прямой, соответствующей $x = 1$ находится точки с координатами $(0;1), (1;2), \ldots, (58;59)$, т.е. 59 точек и т.д. На отрезке PQ, соответствующему $x = 23$, находится 37 точек с координатами $(0;23), (1;24), \ldots, (36;59)$. Всего допустимых точек $60 + 59 + \ldots + 37 = 97 \cdot 12 = 1164$.

Задача 2 Ответ: $|a| \ge 1$

Решение. Сделаем замену $t = \sin x \in [-1;1]$. Относительно t уравнение примет вид:

$$2(1-2t^2) + 4at - 3 = 0 \to 4t^2 = 4at - 1$$

На рис изображена парабола $y = 4t^2$ на отрезке $t \in [-1;1]$ и прямая $y = 4at - 1$. Искомые значения параметра соответствуют прямым, имеющим с параболой общие точки.



Параметр a_1 (a_3) соответствует касанию прямой с параболой в точке A (C):

$4t^2 - 4at + 1 = 0 \to D/4 = 4a^2 - 4 = 0 \to a_1 = 1, a_3 = -1$.

Для значений параметра a, для которых $|a| \ge 1$ прямые $y = 4at - 1$ пересекают параболу $y = 4t^2$ на отрезке $t \in [-1;1]$ и уравнение имеет бесконечное число решений.

Задача 3 Ответ: $m = 4$

Решение

$a_{m+2} - a_m = a_m \left(p_m \cdot p_{m+1} - 1 \right) = 29820 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$

Так как a_m равно произведению последовательных простых чисел, то

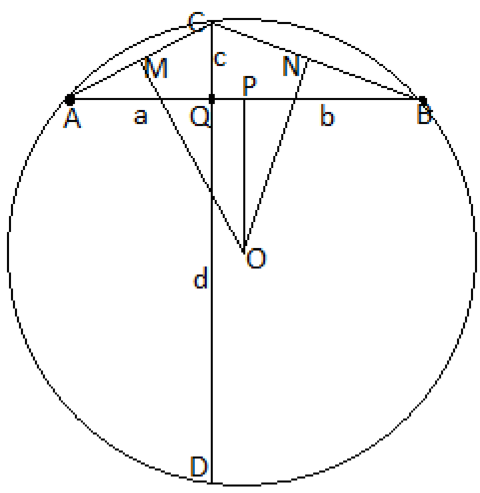
$$a_1 = 2,\ a_2 = 2 \cdot 3,\ a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5,\ a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \to m \le 4.$$

Условию задачи удовлетворяет только $m = 4$, поскольку

$$a_{m+2} = a_6 = a_4 \cdot 11 \cdot 13 \to a_6 - a_4 = a_4 \left(11 \cdot 13 - 1 \right) = 142 \cdot a_4$$

Задача 4 Решение. Необходимо уметь с помощью циркуля и линейки строить: 1) перпендикуляр из точки на прямую; 2) делить отрезок пополам; 3) проводить прямую через точку, параллельную данной прямой; 4) окружность через три точки.

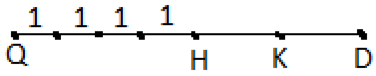
1 шаг построения. С помощью отрезков с длинами $a = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 1, b = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 1, c = 1$ строим точки A, B, C:



На прямой откладываются отрезки AQ длины a, QB длины b и QC перпендикулярно AB с длиной c. Через точки A, B, C проводится окружность с центром в точке O. Прямая CQ пересекает окружность в точке D. Длина отрезка QD равна d. По свойствам хорд окружности

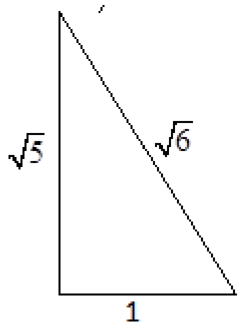
$$a\cdot b=c\cdot d\to d=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)=4+2\sqrt{6}$$

Шаг 2. Откладываем на отрезке QD четыре раза отрезок длины 1, а оставшуюся часть отрезка делим пополам.



Построенный отрезок KD имеет длину $\sqrt{6}$.

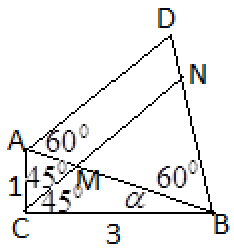
Шаг 3. Строим прямоугольный треугольник с гипотенузой KD и QC



Тогда второй катет имеет длину $\sqrt{5}$.

Задача 5 Ответ: $(4\sqrt{3}-1):9$.

Решение.



Поскольку искомое отношение не зависит от преобразования подобия, полагаем $a=BC=3, b=AC=1$.Если $\alpha<45^0$, то биссектриса пересекает сторону BD в точке N , в противном случае – сторону AD. На рис изображен угол α , для которого $tg\alpha=\dfrac{1}{3}$.

$$c=AB=AD=BD=\sqrt{10}\ ,BM:MA=3:1\to BM:AB=BM:c=3:4$$

Из $\triangle CNB$: $\dfrac{BN}{\sin 45^0}=\dfrac{3}{\sin(105^0+\alpha)}\to BN=\dfrac{3\sin 45^0}{\sin(105^0+\alpha)}$

Вычисления:

$$\sin 105^0=\sin(60^0+45^0)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4};\ \cos 105^0=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4};\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}};\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin(105^0+\alpha)=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{3}{\sin(105^0+\alpha)}=6\sqrt{5}\cdot(2-\sqrt{3})\to\frac{BN}{c}=3(2-\sqrt{3})<1$$

Отношение площадей:

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABD}}=\frac{BC}{c}\cdot\frac{BN}{c}=\frac{3}{4}\cdot 3(2-\sqrt{3})=\frac{9(2-\sqrt{3})}{4}\approx 0,6;\ \frac{S_{ADNM}}{S_{ABD}}=1-\frac{9(2-\sqrt{3})}{4}=\frac{9\sqrt{3}-14}{4}\approx 0,4$$

Ответ: $\left(9\sqrt{3}-14\right):\left(18-9\sqrt{3}\right)=(4\sqrt{3}-1):9\approx 0,66$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 576 раз

Задача 2 Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{7}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Задача 3 Ответ: $b = -254$

Решение. Пусть a_m удовлетворяет уравнению $a_m^2 + b \cdot a_m + 9240 = 0$, $9240 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Поскольку 9240 делится на a_m, то корнями уравнения могут быть a_m для $m = 1, 2, ..., 5$,

Случай 1. $m = 5$, $a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$

$9240 = 4 \cdot a_5 \to -b = a_5 + 4 \to b = -2314$

Случай 2. $m = 4$, $a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

$9240 = 44 \cdot a_4 \to a_4 + b = -44 \to b = -44 - a_4 = -254$

Случай 3. $m = 3$, $a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$9240 = 308 \cdot a_3 \to a_3 + b = -308 \to b = -308 - a_3 = -338$

Случай 4. $m = 2$, $a_2 = 2 \cdot 3$

$9240 = 1540 \cdot a_2 \to a_2 + a = -1540 \to a = 1540 - a_2 = -1546$

Случай 5. $m = 1$, $a_1 = 2$

$9240 = 4620 \cdot a_1 \to a_1 + a = -4620 \to a = -4620 - a_1 = -4622$

Задача 4, построения

Задача 5 Ответ: $3\left(2\sqrt{3}+1\right):11$.

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 720 раз

Задача 2 Ответ: $a \in \{2\} \cup \left(\frac{13}{6}; +\infty\right)$

Задача 3 Ответ: $b = -216$

Задача 4 (построения)

Задача 5 Ответ: $\left(3\sqrt{3}+1\right):8$.

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 300 раз

Задача 2 Ответ: $a \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Задача 3 Ответ: $b = -177$

Задача 4 (построения)

Задача 5 Ответ: $\left(7\sqrt{3}+17\right):32$