Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика,
11 класс.

Вариант № 1

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \le x \le 100, 1 \le y \le 100$ удовлетворяют уравнению $НОД(\log_2 x, 36) = \log_3^2 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x; y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\cos(x-2y)| = -|\cos(x+y)|$. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 3.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 4 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 1. Через точку O совершенно случайно проведена прямая L, разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую 3.

5. При каких a множество решений неравенства $x^2 + (|y| - a)^2 \le a^2$ содержит все пары чисел $(x; y)$, для которых $(x-4)^2 + (y-2)^2 \le 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 5 и 6, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.

Вариант № 2

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \le x \le 10000, 1 \le y \le 1000$ удовлетворяют уравнению $НОД(\log_3 x, 64) = \log_5^3 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x; y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\sin(x+3y)| = -|\cos(2x-y)|$. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 4.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 6 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 2. Через точку O совершенно случайно проводится прямая L, разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что площадь одной из частей не превосходит 9.

5. При каких a множество решений неравенства $(|x| - a)^2 + (y-1)^2 \le a^2$ содержит хотя бы одну пару чисел $(x; y)$, для которых $(x-6)^2 + (y-1)^2 \le 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 4 и 7, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.

Вариант № 3

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \le x \le 2000, 1 \le y \le 500$ удовлетворяют уравнению $НОД(\log_2 x^2, 72) = \log_7^2 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x; y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\cos(x+2y)| = -|\sin(2x+y)|$. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 5.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 9 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 3. Через точку O совершенно случайно проводятся прямые L, разделяющие квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую $147/8$.

5. При каких a множество решений неравенства $(x-3)^2+(|y|-a)^2 \le a^2$ не содержит пар чисел $(x;y)$, для которых $(x-5)^2+(y+5)^2 \le 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 2 и 3, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.

Вариант № 4

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \le x \le 2000, 1 \le y \le 500$ удовлетворяют уравнению $НОД(\log_2 x^3, 675) = \log_5^2 y$? Найти эти пары.

2. Координаты $(x;y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\sin(2x-3y)| = -|\cos(x+y)|$. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 2.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 8 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 3. Через точку O совершенно случайно проводятся прямые L, разделяющие квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую $75/4$.

5. При каких a множество решений неравенства $(|x|+a)^2+(y-2)^2 \le a^2$ содержит единственную пару чисел $(x;y)$, для которых $(x+4)^2+(y-3)^2 \le 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 6 и 8, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 1) 3 пары; 2) $(2;3), (32;3), (16,9)$

Решение. Введем обозначения: $\log_2 x = n,\ \log_3 y = m, n \ge 0, m \ge 0, n, m \in Z$

Допустимыми значениями НОД являются делители 36, представленные полными квадратами, т.е. 1,4,9 и 36.

Случай 1. $НОД(\log_2 x, 36) = 1 = \log_3^2 y$.

Число n не имеет среди делителей двойки и тройки, поэтому $n = 6s \pm 1$. Тогда

$$x = 2, x = 2^{6s\pm1}, s \in Z, s \ge 1,\ y = 3.$$

В квадрате таких пар две: $(2;3), (2^5;3)$

Случай 2. $НОД(\log_2 x, 36) = 4 = \log_3^2 y$.

Число $n = 4k$, при этом k не делится на 3, т.е. $n = 4(3s \pm 1), s \ge 1$ и $n = 4$. Тогда

$$x = 16, x = 2^{12s\pm4}, s \in Z, s \ge 1,\ y = 3^2 = 9.$$

В квадрате таких пар только одна: $(16,9)$

Случай 3. $НОД(\log_2 x, 36) = 9 = \log_3^2 y$

Число $n = 9k$ при этом k не делится на 2, т.е. $n = 9(2s+1), s \ge 0$. Тогда

$$x = 2^{18s+9}, s \in Z, s \ge 0,\ y = 3^3 = 27.$$

Таких пар в квадрате нет.

Случай 4. $НОД(\log_2 x, 36) = 36 = \log_3^2 y$

Число $n = 36s, s \in Z, s \ge 1$. Тогда $x = 2^{36s}, s \in Z, s \ge 0,\ y = 3^6 = 729$. Таких пар в квадрате нет.

Задача 2 Ответ: $S_{\min} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos(x-2y)=0\\ \cos(x+y)=0\end{cases}\to\begin{cases}x-2y=\dfrac{\pi}{2}+\pi m\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k,m\in Z\end{cases}\to\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}(m+2k)\\ y=\dfrac{\pi}{3}(k-m)\end{cases},m,n\in Z\ \ (*)$$

Решения (*) расположены в узлах «косой» решетки на плоскости образованной семейством прямых

$$L_k: x+y=\frac{\pi}{2}+\pi k \ \text{ и } \ L_m: x-2y=\frac{\pi}{2}+\pi m$$

Если две вершины, например, A и B, искомого треугольника ABC наименьшей площади лежат на прямых семейства L_k, то A и B являются соседними вершинами решетки (в противном, его площадь может быть уменьшена) и

$$|x_A-x_B|=\frac{\pi}{3},\ |y_A-y_B|=\frac{\pi}{3}\to AB=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$$

Вершина C находится на соседней (параллельной) прямой из семейства L_k (иначе площадь может быть уменьшена). Поскольку расстояние между соседними прямыми из семейства L_k одинаковое и равно $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$, площадь треугольника ABC равна $S_1=\dfrac{\pi^2}{6}$.

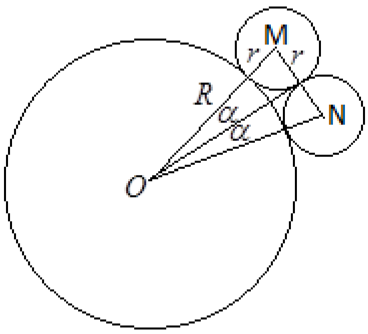
Если две вершины, например, B и C, находятся на прямой семейства L_m и являются соседними узлами решетки, то

$$|x_B-x_c|=\frac{2\pi}{3},\ |y_B-y_C|=\frac{\pi}{3}\to AB=\frac{\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Вершина A находится на соседней (параллельной) прямой семейства L_m. Поскольку расстояние между соседними прямыми из семейства L_m одинаковое и равное $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$, площадь треугольника равна

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{5}}=\frac{\pi^2}{6}=S_1$$

Задача 3 Ответ: 17 окружностей.
Решение.
Случай 1. Окружности радиуса r касаются окружности радиуса R внешним образом.



Рассмотрим сначала ситуацию, когда окружности радиуса r могут касаться друг друга.
Наибольшее число окружностей радиуса r, касающихся окружности радиуса R внешним образом, соответствует условию касания окружностей с центрами в точках M и N. Тогда

$$\sin\alpha=\frac{r}{R+r}\to\alpha=\arcsin\frac{r}{R+r}.$$

Наибольшее число n таких окружностей равно целой части числа $\dfrac{\pi}{\alpha}$, т.е.

$$n\le\frac{\pi}{\arcsin\dfrac{r}{R+r}}<n+1\to\frac{\pi}{n+1}<\arcsin\frac{r}{R+r}\le\frac{\pi}{n}\to\sin\frac{\pi}{n+1}<\frac{r}{R+r}\le\sin\frac{\pi}{n}$$

В случае, когда получается равенство (все окружности радиуса r касаются друг друга), нужно убрать одну окружность, чтобы выполнялось условие задачи − окружности радиуса r не имеют общих точек.

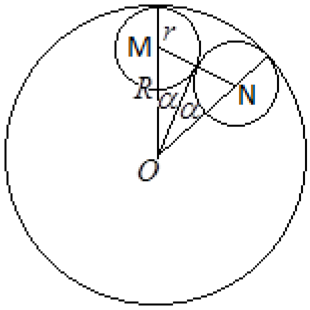
В варианте 1 $\sin\frac{\pi}{n+1}<\frac{1}{4}\le\sin\frac{\pi}{n}$ Покажем, что этому неравенству удовлетворяет число $n=12$.

Левая часть неравенства удовлетворяется, поскольку $\sin\frac{\pi}{13}<\frac{\pi}{13}<\frac{1}{4}$. Для доказательства правой части неравенства возведем его в квадрат:

$$\frac{1}{16}<\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}\to\cos\frac{\pi}{6}<\frac{7}{8}\to\sqrt{3}<\frac{7}{4}\to 48<49$$

Так как неравенство строгое, то $n=12$ это количество окружностей радиуса 1, касающихся окружности радиуса 3, и не имеющих общих точек друг с другом.

Случай 2. Окружности касаются внутренним образом.



Снова рассмотрим сначала ситуацию, когда окружности радиуса r могут касаться друг друга.

По аналогии, $\sin\alpha=\frac{r}{R-r}$. Наибольшее число m окружностей, имеющих внутреннее касание, равно целой части числа $\frac{\pi}{\alpha}=\frac{\pi}{\arcsin\frac{r}{R-r}}$ и удовлетворяет неравенству $\sin\frac{\pi}{m+1}<\frac{r}{R-r}\le\sin\frac{\pi}{m}$.

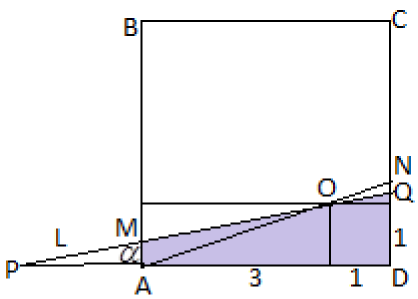
В варианте 1 это неравенство принимает вид: $\sin\frac{\pi}{m+1}<\frac{1}{2}\le\sin\frac{\pi}{m}$ и ему удовлетворяет $m=6$. При $m=6$ получаем равенство . $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$. Это означает, что окружности радиуса 1 касаются друг друга.

И чтобы эти окружности не имели общих точек надо одну окружность убрать, то есть взять 5 окружностей. Объединяя случаи 1-2, приходим к ответу: максимальное число k окружностей, касающихся большой окружности равно $12+5=17$

Задача 4 Ответ: $P(A)=\frac{arctg4-arctg(1/4)}{\pi}=\frac{arctg4-arcctg(4)}{\pi}=\frac{2arctg4}{\pi}-\frac{1}{2}$

Решение. Обозначения: Случайная величина α − угол наклона прямой L к стороне AD − распределена равномерно на $[0;\pi]$

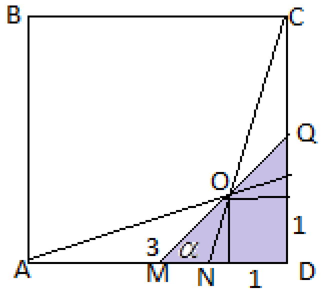
1. Случай $\alpha\in\left[0;arctg\frac{1}{3}\right]$, рис 1 (трапеция)



Вычисление площади трапеции $AMQD$:

$$AM=(ctg\alpha-3)tg\alpha=1-3tg\alpha,\ \ DQ=1+tg\alpha\to S_{AMQD}=4\cdot\frac{AM+DQ}{2}=4(1-tg\alpha)$$

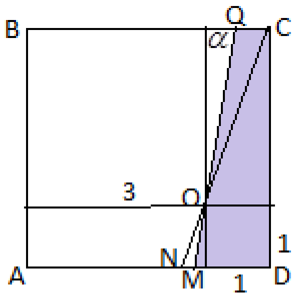
2. Случай $\alpha\in\left[arctg\frac{1}{3};arctg3\right]$, рис 2 (треугольник)



Вычисление площади треугольника MQD:

$$MD=1+ctg\alpha,\ QD=MD\cdot tg\alpha\to S_{MQD}=\frac{1}{2}MD\cdot QD=\frac{(1+ctg\alpha)(1+tg\alpha)}{2}$$

3. Случай $a\in\left[arctg3;\frac{\pi}{2}\right]$, рис 3 (трапеция)



По симметрии со случаем 1, $S_{MQCD}=4(1-ctg\alpha)$

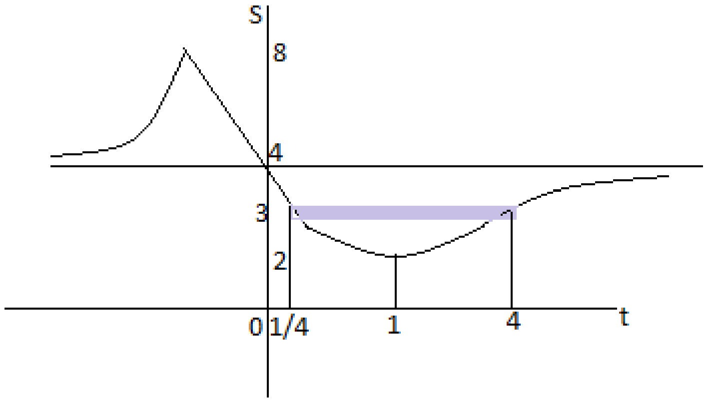
Случай 4. $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$ (трапеция)приводит к такой же формуле $S_{MQCD}=4(1-ctg\alpha)$

Случай 5. $\alpha\in\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$ (трапеция) приводит к формуле аналогичной случаю 1 для площади меньшей части разрезанного квадрата $S_{AQMD}=4(1-tg\alpha)$

Замена $t=tg\alpha, t\in(-\infty;+\infty)$ позволяет объединить случаи 1-5 и представить зависимость площади меньшей части квадрата от t:

$$S_{\min}(t)=\begin{cases}4(1-t),t\in\left[-1;\frac{1}{3}\right]\\ \frac{4(t-1)}{t},t\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)\\ \frac{(t+1)^2}{2t},t\in\left(\frac{1}{3};3\right]\end{cases}$$

На рис изображен график функции $S_{\min}(t)$:



Значение площади $S \geq 2$ для всех $t-$ минимум достигается при $t=1, \alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

Значения $S \leq 3$ достигаются для $t \in [t_1; t_2]$, где t_1 и t_2 являются решениями уравнений:

$$4(1-t)=3 \to t_1=\frac{1}{4},\ \frac{4(t-1)}{t}=3 \to t_2=4$$

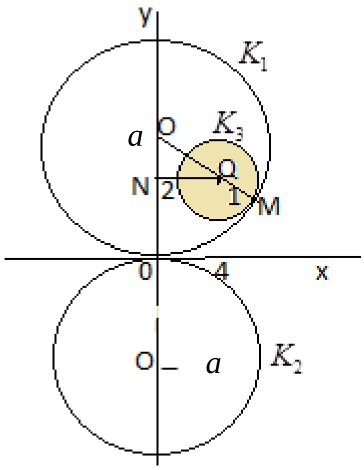
Возвращаясь к углам, благоприятные событию $S \leq 3$ значения $\alpha \in \left[arctg\dfrac{1}{4}, arctg 4\right]$. Вероятность искомого события равна отношению длины этого отрезка к длине отрезка $[0;\pi]$, т.е.

$$P(A)=\frac{arctg 4 - arctg\,(1/4)}{\pi}$$

5. При каких a множество решений неравенства $x^2+(|y|-a)^2 \leq a^2$ содержит все пары чисел $(x;y)$, для которых $(x-4)^2+(y-2)^2 \leq 1$?

Задача 5 Ответ: $a \in \left[\dfrac{19}{2};+\infty\right)$

Решение.



Случай 1. $a \leq 0$. Первому неравенству удовлетворяет единственная точка $(0;0)$, следовательно ситуация, при которой решения второго неравенства (точки круга радиуса 1) содержатся в решениях первого неравенства, невозможна.

Случай 2. $a>0$. Решениями первого неравенства являются точки кругов K_1 и K_2, где K_1- круг радиуса a с центром в точке $O_1(0;a)$, , а K_2- круг радиуса a с центром в точке $O_2(0;-a)$. Решениями второго неравенства являются точки круга K_3 радиуса 1 с центром в точке $O(4;2)$. Условия задачи будут выполнены, если круг K_3 окажется внутри круга K_1. Эта ситуация реализуется, когда $O_1O \leq a-1$. Получаем неравенство:

$$\sqrt{4^2+(a-2)^2} \le a-1.$$

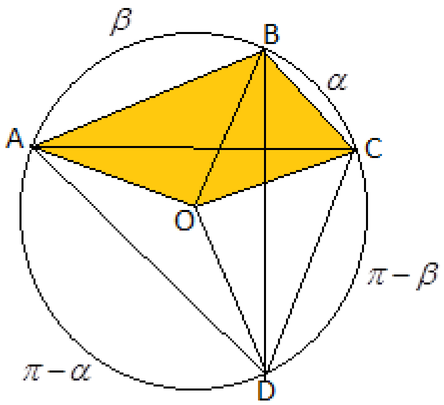
Оно эквивалентно системе

$$\begin{cases} a-1 \ge 0, \\ 4^2+(a-2)^2 \le (a-1)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a \ge \frac{19}{2}$.

Задача 6 Ответ: $s = 7{,}5$

Решение.



Пусть хорды BC и AB стягивают дуги с центральными углами α и β соответственно. Тогда в силу перпендикулярности диагоналей, хорды AD и CD стягивают дуги с центральными углами $\pi-\alpha$ и $\pi-\beta$. Сумма площадей треугольников BCO и ABO равна:

$$S_{BCO}+S_{ABO}=\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha+\sin\beta),$$

где R – радиус описанной окружности.

Сумма площадей треугольников ADO и CDO равна:

$$S_{ADO}+S_{CDO}=\frac{1}{2}R^2(\sin(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\beta))=\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha+\sin\beta)=S_{BCO}+S_{ABO}.$$

Таким образом, площадь четырехугольника $ABCO$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$, равной $\frac{1}{2}d_1\cdot d_2=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 1) 6 пар; 2) $(3;5)$, $(27;5)$, $(243;5)$, $(2187;5)$, $(6561,25)$, $(1;625)$.

Задача 2 Ответ: $S_{\min}=\frac{\pi^2}{14}$

Задача 3 Ответ: 24 окружности (15+9)

Задача 4 Ответ: $P(A)=\frac{arctg\,2-arctg\,(1/2)}{\pi}=\frac{arctg\,2-arcctg\,2}{\pi}=\frac{2arctg\,2}{\pi}-\frac{1}{2}$

Задача 5 Ответ: $a \ge \frac{5}{2}$

Задача 6 Ответ: $s = 7$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 1) 2 пары; 2) $(4;49)$, $(1024;49)$

Задача 2 Ответ: $S_{\min}=\frac{\pi^2}{6}$

Задача 3 Ответ: 30 окружностей. (18+12)

Задача 4 Ответ: $P(A)=\dfrac{arctg\left(\frac{4}{3}\right)-arctg\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi}=\dfrac{arctg\left(\frac{4}{3}\right)-arcctg\left(\frac{4}{3}\right)}{\pi}=\dfrac{2arctg\left(4/3\right)}{\pi}-\dfrac{1}{2}$

Задача 5 Ответ: $a<\dfrac{7}{3}$

Задача 6 Ответ: $s=1,5$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 1) 2 пары; 2) (8;125), (64;125)

Задача 2 Ответ: $S_{\min}=\dfrac{\pi^2}{10}$

Задача 3 Ответ: 9 окружностей. (9+0)

Задача 4 Ответ: $P(A)=\dfrac{arctg\left(\frac{3}{2}\right)-arctg\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi}=\dfrac{arctg\left(\frac{3}{2}\right)-arcctg\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi}=\dfrac{2arctg\left(3/2\right)}{\pi}-\dfrac{1}{2}$

Задача 5 Ответ: $a=-\dfrac{8}{5}$

Задача 6 Ответ: $s=12$