

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады  
школьников «Росатом», математика,  
11 класс.

Вариант № 1

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 510 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 390 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 20 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 692 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?
2. При каком значении  $a$  уравнение  $|\sin(2x - y)| + |\cos(x + 2y)| + 1 = \frac{2a}{a^2 + 1}$  имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное  $R$ , при котором любой круг радиуса  $R$  на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами  $(x; y)$  – решениями уравнения.
3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество карандашей. Позже выяснилось, что не менее 60% карандашей, полученных любой группой из десяти человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 58% карандашей, взятых всеми школьниками из коробки.
4. На боковых ребрах  $DA$  и  $DB$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  совершенно случайно взяты точки  $M$  и  $N$ . Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды  $MNCD$  с вершиной в точке  $D$  составляет не более половины площади боковой поверхности пирамиды  $ABCD$ .
5. При каких  $b$  система уравнений  $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a+b)^2 = 2 \\ (x-y+3)(x-y-1) = 0 \end{cases}$  имеет решения при любых  $a$ ?
6. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM = CN = \sqrt{3}$ . Точка  $P$  – середина отрезка  $MN$ , точка  $Q$  – середина стороны  $AC$ . Угол при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

Вариант № 2

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 273 шага и останавливаться, а также проходить по той же прямой 231 шаг назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 15 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 528 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?
2. При каком значении  $a$  уравнение  $|\sin(3x + 4y)| + |\cos(3y - 4x)| + 2 = \frac{8a}{a^2 + 4}$  имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное  $R$ , при котором любой круг радиуса  $R$  на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами  $(x; y)$  – решениями уравнения.
3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество жвачки. После выяснилось, что не менее 70% жвачки, полученной любой группой из восьми человек, оказывалось у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 68% жвачки, взятой всеми школьниками из коробки.
4. На боковых ребрах  $DA$  и  $DB$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  совершенно случайно взяты точки  $M$  и  $N$ . Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды  $MNCD$  с вершиной в точке  $D$  составляет не менее трети площади боковой поверхности пирамиды  $ABCD$ .

5. При каких  $b$  система уравнений 
$$\begin{cases} (x - \sqrt{3}a - b)^2 + (y - 3a - 1,5)^2 = 4 \\ (\sqrt{3}x - y - 3)(\sqrt{3}x - y + 5) = 0 \end{cases}$$
 не имеет решений при любых  $a$  ?

6. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM = CN = 2$ . Точка  $P$  – середина отрезка  $MN$ , точка  $Q$  – середина стороны  $AC$ . Угол при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  равен  $120^\circ$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

#### Вариант № 3

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 595 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 385 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 25 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 721 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2. При каком значении  $a$  уравнение  $|\sin(x + y)| + |\sin(x - y)| + |a - 3| = 0$  имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное  $R$ , при котором любой круг радиуса  $R$  на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами  $(x; y)$  – решениями уравнения.

3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество конфет. После выяснилось, что не менее 75% конфет, полученных любой группой из шести человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 73% конфет, взятых всеми школьниками из коробки.

4. На боковых ребрах  $DA$  и  $DB$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  совершенно случайно взяты точки  $M$  и  $N$ . Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды  $MNCD$  с вершиной в точке  $D$  составляет не более четверти площади боковой поверхности пирамиды  $ABCD$ .

5. При каких  $b$  система уравнений 
$$\begin{cases} (x - \sqrt{3}(a - b))^2 + (y - a)^2 = \frac{27}{4} \\ (x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3})(x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$
 имеет решения при любых  $a$  ?

6. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM = CN = 2\sqrt{2}$ . Точка  $P$  – середина отрезка  $MN$ , точка  $Q$  – середина стороны  $AC$ . Угол при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  равен  $90^\circ$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

#### Вариант № 4

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 644 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 308 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 13 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 724 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2. При каком значении  $a$  уравнение  $|\cos(2x + 3y)| + |\cos(3x - 2y)| - |a + 4| = 2$  имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное  $R$ , при котором любой круг радиуса  $R$  на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами  $(x; y)$  – решениями уравнения.

3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество ручек. После выяснилось, что не менее 65% ручек, полученных любой группой из семи человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 62% ручек, взятых всеми школьниками из коробки.

4. На боковых ребрах  $DA$  и  $DB$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  совершенно случайно взяты точки  $M$  и  $N$ . Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды  $MNCD$

с вершиной в точке  $D$  составляет не менее двух третей площади боковой поверхности пирамиды  $ABCD$ .

5. При каких  $b$  система уравнений  $\begin{cases} (x-2a)^2 + (y+2a-b)^2 = 4,5 \\ (x+y+4)(x+y-2) = 0 \end{cases}$  не имеет решений при любых  $a$ ?

6. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM = CN = 3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ . Точка  $P$  – середина отрезка  $MN$ , точка  $Q$  – середина стороны  $AC$ . Угол при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  равен  $150^\circ$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

### Решения и ответы

#### Вариант 1

Задача 1 Ответ: 1) 2 шага; 2) 9 движений вперед и 10 движений назад

Решение. Имеем

$$390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13, \quad 510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17, \quad 692 = 30 \cdot 23 + 2$$

Совершая маневры «вперед – назад», робот может переместиться на расстояние кратное 30 шагам. Действительно, если он совершил  $x \geq 0$  движений «вперед» и  $y \geq 0$  – «назад», то прошел путь

$$s = 590x - 390y, \quad x, y \in N.$$

Правая часть равенства делится на 30, поэтому  $s = 30k, k \in Z$ .

Это означает, что ближе, чем на 2 шага к объекту подойти нельзя. Уравнение

$$590x - 390y = 30 \cdot 23, \quad x, y \in N \rightarrow 17x - 13y = 23$$

имеет решения

$$\begin{cases} x = 9 + 13t, \\ y = 10 + 17t, t = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Условию  $x + y \leq 20$  удовлетворяет единственное решение  $x = 9$  и  $y = 10$ , которое обеспечивает остановку робота на расстоянии 2 шага от объекта.

Задача 2 Ответ: 1) уравнение имеет решения при  $a = 1$ ; 2)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{10}(4n + 2m + 1) \\ y = \frac{\pi}{5}(2m - n + 1), n, m \in Z \end{cases};$

$$3) R_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{10}}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{2a}{a^2 + 1} - 1 = -\frac{(a-1)^2}{a^2 + 1} \leq 0 \text{ для всех } a \in R.$$

Если знак неравенства строгий, то решений уравнение не имеет. Решение может быть только при  $a = 1$ . В этом случае уравнение равносильно системе

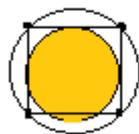
$$\begin{cases} \sin(2x - y) = 0 \\ \cos(x + 2y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = \pi n & (*) \\ x + 2y = \frac{\pi}{2} + \pi m, n, m \in Z & (**) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10}(4n + 2m + 1) \\ y = \frac{\pi}{5}(2m - n + 1), n, m \in Z \end{cases} (***)$$

Семейство  $(*)$ ,  $n \in Z$ , состоит из параллельных прямых, равноотстоящих друг от друга на расстояние  $d_1 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$ . Прямые из семейства  $(**)$  параллельны между собой, перпендикулярны прямым

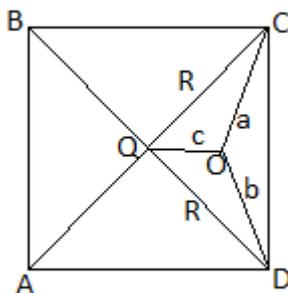
из семейства  $(*)$  и равноотстоят друг от друга на расстояние  $d_2 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$ . Прямые из  $(*)$  и  $(**)$

разбивают плоскость на квадраты со стороной  $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ , в вершинах которых находятся решения(\*\*\*)).

Радиус круга, описанного около квадрата, равен  $R_* = \frac{\pi}{\sqrt{10}}$ . Если  $R_{\min} < R_*$ , то найдется круг радиуса  $R_{\min}$  не содержащий решений (\*\*\*)).



Предположим, что существует круг радиуса  $R_*$ , не содержащий ни одной вершины из квадратов разбиения. Точка  $O$  – центр этого круга – принадлежит одному из квадратов разбиения.



Если точка  $O$  не совпадает с точкой  $Q$  – центром квадрата, то она принадлежит одному из треугольников, на которые разбивают квадрат его диагонали, например, треугольнику  $QCD$ . Тогда хотя бы один из треугольников  $QOC$  и  $QOD$  тупоугольный и либо  $a < R$ , либо  $b < R$ . Но тогда хотя бы одна из вершин  $C$  или  $D$  принадлежит кругу. Полученное противоречие показывает, что

$$R_{\min} = R_* = \frac{\pi}{\sqrt{10}}$$

Задача 3 Доказательство. Пусть ученики школы упорядочены по убыванию числа взятых ими карандашей: ученик под номером  $k$  взял из коробки  $x_k$  карандашей и  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq x_{k+1} \geq \dots$

По условию, для любого  $k$  выполняется неравенство

$$\frac{x_k}{x_k + x_{k+1} + \dots + x_{k+9}} \geq 0,6 \rightarrow (1 - 0,6)x_k \geq 0,6(x_{k+1} + \dots + x_{k+9}) \rightarrow x_k \geq \frac{3}{2}(x_{k+1} + \dots + x_{k+9}) \geq \frac{27}{2}x_{k+9},$$

т.е.  $x_{k+9} \leq \frac{2}{27}x_k$  для любого  $k$ . Тогда для любого  $n$

$$x_2 + x_3 + \dots + x_n = (x_2 + x_3 + \dots + x_{10}) + (x_{11} + x_{12} + \dots + x_{19}) + \dots \leq (x_2 + x_3 + \dots + x_{10}) \cdot \left(1 + \frac{2}{27} + \left(\frac{2}{27}\right)^2 + \dots\right)$$

По условию,  $x_1 \geq 0,6(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) \rightarrow 0,4x_1 \geq 0,6(x_2 + \dots + x_{10}) \rightarrow x_2 + \dots + x_{10} \leq \frac{2}{3}x_1$ . Суммируя

прогрессию, получим неравенство

$$x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \frac{27}{25}(x_2 + x_3 + \dots + x_{10}) \leq \frac{27}{25} \cdot \frac{2}{3}x_1 = \frac{18}{25}x_1 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \frac{43}{25}x_1$$

Если в школе  $n$  учеников, то  $x_1 \geq \frac{25}{43}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) > 0,58 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ .

Задача 4 Ответ:  $P(A) = 0,5(5 \ln 1,6 - 1) \approx 0,675$

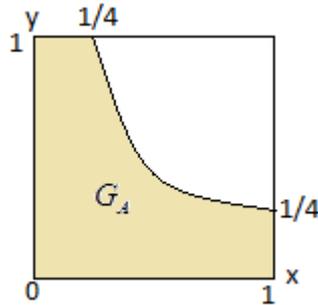
Решение. Введем обозначения:  $DM = x \cdot DA$ ,  $DN = y \cdot DA$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $S_{MNCD}$  – площадь боковой поверхности пирамиды  $MNCD$  с вершиной в точке  $D$ ,  $S_{ABCD}$  – площадь боковой поверхности пирамиды  $ABCD$  с вершиной в точке  $D$ . Имеем

$$S_{MNCD} = xyS_{ABD} + xS_{BCD} + yS_{ACD} = \frac{xy + x + y}{3} S_{ABCD}$$

Условие:

$$\frac{xy + x + y}{3} S_{ABCD} \leq \frac{1}{2} S_{ABCD} \rightarrow xy + x + y \leq \frac{3}{2} \rightarrow y \leq \frac{3-2x}{2(x+1)}$$

Пространство элементарных исходов опыта изображено в виде квадрата  $K = [0;1] \times [0;1]$ , а вероятность события  $A$  в этом пространстве равна площади области внутри квадрата, соответствующей этому событию. Событию  $A = \left\{ S_{MNCD} \leq \frac{1}{2} S_{ABCD} \right\}$  соответствует область  $G_A$  в квадрате  $K$  (заштрихована):

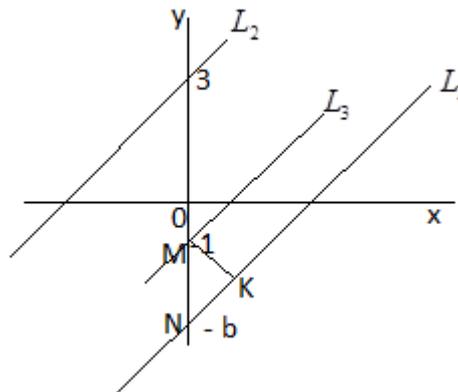


Криволинейный участок границы области  $G_A$  является графиком гиперболы  $y = \frac{3-2x}{2(x+1)}$ .

$$P(A) = S_{G_A} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_{1/4}^1 \frac{3-2x}{x+1} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_{1/4}^1 \left( \frac{5}{x+1} - 2 \right) dx = -\frac{1}{2} + 2,5 \ln(x+1) \Big|_{x=1/4}^1 = 2,5 \ln \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \approx 0,675$$

Задача 5 Ответ:  $b \in [-5; 3]$

Решение. Центр  $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = a - b \end{cases}$  окружности  $(x-a)^2 + (y-a+b)^2 = 2$  лежит на прямой  $L_1$  с уравнением  $x - y = b$  при любых  $a \in \mathbb{R}$ . Прямая  $L_1$  параллельна прямым  $L_2 : x - y + 3 = 0$  и  $L_3 : x - y - 1 = 0$ .



Система имеет решение, если расстояние прямой  $L_1$  до прямой  $L_3$  (или прямой  $L_2$ ) не превосходит радиуса окружности, т.е.  $\sqrt{2}$ . Расстояние между прямыми  $L_1$  и  $L_3$  равно  $\frac{|b-1|}{\sqrt{2}}$ , расстояние между прямыми  $L_1$  и  $L_2$  определяется формулой  $\frac{|b+3|}{\sqrt{2}}$ . Для совместности системы при любых  $a$  число  $b$  должно быть решением неравенства  $\frac{|b-1|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}$  (\*), либо неравенства  $\frac{|b+3|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}$  (\*\*). Решением неравенства (\*) является отрезок  $b \in [-1; 3]$ , неравенства (\*\*) – отрезок  $[-5; -1]$ . Объединение этих отрезков доставляет множество значений  $b$ , для которых система совместна при любых  $a$ .

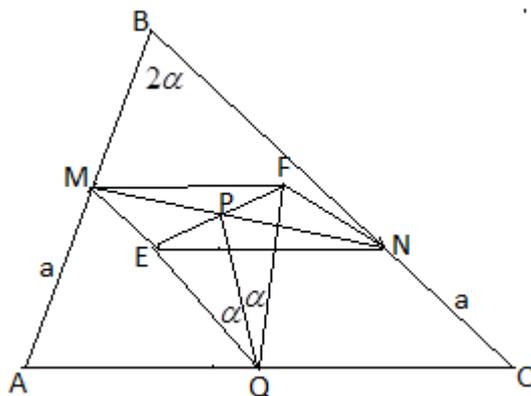
Задача 6 Ответ:  $PQ = \frac{3}{2}$

### Вариант 0

На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM = CN = a$ . Точка  $P$  – середина отрезка  $MN$ , точка  $Q$  – середина стороны  $AC$ . Угол при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  равен  $2\alpha$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

Ответ:  $PQ = a \cos \alpha$

Решение.



Дополнительные построения:

1. построим параллелограммы  $NCQE$  и  $MAQF$ ;
2. построим треугольник  $EFQ$ ;
3. построим четырехугольник  $EMFN$ .

Четырехугольник  $EMFN$  параллелограмм, поскольку  $EN$  параллельна  $AC$  и ей же параллельна  $MF$ , при этом  $EN = MF = \frac{AC}{2}$ .  $MN$  является диагональю параллелограмма и ее середина – точка  $P$  – принадлежит второй диагонали  $EF$ . Треугольник  $EQF$  равнобедренный:  $FQ = EQ = a$  и его медиана  $QP$  является медианой и высотой. Угол  $MQF$  равен углу  $ABC$ , как углы с параллельными сторонами. Тогда треугольник  $EPQ$  прямоугольный с гипотенузой  $a$  и острым углом  $\alpha$ :  $PQ = a \cos \alpha$

### Вариант 2

Задача 1 Ответ: 1) 3 шага; 2) 7 движений вперед и 6 движений назад

Задача 2 Ответ: 1) уравнение имеет решения при  $a = 2$ ; 2) 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{25}(3k - 4m - 2) \\ y = \frac{\pi}{50}(8k + 6m + 3), k, m \in Z \end{cases};$$

$$3) R_{\min} = \frac{\pi}{5\sqrt{2}}.$$

Задача 3. Доказательство.

Задача 4 Ответ:  $P(A) = 2(1 - \ln 2) \approx 0,61$

Задача 5 Ответ:  $b \in \left(-\infty; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{17\sqrt{3}}{6}; +\infty\right)$

Задача 6 Ответ:  $PQ = 1$

### Вариант 3

Задача 1 Ответ: 1) 14 шагов; 2) 9 движений вперед и 12 движений назад

Задача 2 Ответ: 1) уравнение имеет решения при  $a = 3$ ; 2) 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}(n+m) \\ y = \frac{\pi}{2}(n-m), n, m \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

$$3) R_{\min} = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 3. Доказательство.

Задача 4 Ответ:  $P(A) = 0,25(7 \ln 1,75 - 3) \approx 0,23$

Задача 5 Ответ:  $b \in [-5; 7]$

Задача 6 Ответ:  $PQ = 2$

### Вариант 4

Задача 1 Ответ: 1) 4 шага; 2) 4 движения вперед и 6 движений назад

Задача 2 Ответ: 1) уравнение имеет решения при  $a = -4$ ; 2) 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{13}(2n+3m) \\ y = \frac{\pi}{13}(3n-2m), n, m \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

$$3) R_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{26}}.$$

Задача 3. Доказательство.

Задача 4 Ответ:  $P(A) = 1 - 3 \ln \frac{4}{3} \approx 0,14$

Задача 5 Ответ:  $b \in (-\infty; -7) \cup (5; +\infty)$

Задача 6 Ответ:  $PQ = 3$