Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика,
7 класс.

Вариант № 1

1. Каждый пятнадцатый брюнет имеет голубые глаза. Среди обладателей голубых глаз каждый десятый – брюнет. Во сколько раз число брюнетов, не обладающих голубым цветом глаз, больше числа голубоглазых, не являющимися брюнетами?
2. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 2019, которые могут быть представлены в виде суммы двух взаимно простых чисел, больших 1.
3. Несколько московских дворов договорились участвовать в турнире по футболу по следующим правилам: каждый с каждым играет мини турнир, состоящий из пяти матчей. После окончания соревнований оказалось, что всего было сыграно 180 игр. Сколько дворов участвовало в турнире?
4. Среди натуральных чисел от 1 до 2019 есть n чисел кратных 7, но не кратных 8 и m чисел кратных 8, но не кратных 7. Найти $n-m$.
5. Треугольник с длинами сторон 3, 5 и 7 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n равных треугольников, длина хотя бы одной из сторон которых – целое число. Найти наибольшее возможное значение числа n.

Вариант № 2

1. Каждый пятый из добряков глуп. Каждый шестой из глупцов – добряк. Во сколько раз число глупцов больше числа добряков, не являющихся глупцами?
2. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1812, которые могут быть представлены в виде суммы двух взаимно простых чисел, больших 2.
3. В турнире по шашкам участвуют мастера и перворазрядники. По правилам турнира мастера играют между собой (каждый с каждым) мини матчи из трех партий, мастера с перворазрядниками – по две партии, перворазрядники играют между собой только одну партию. Всего на турнире было сыграно 143 партии. Сколько мастеров участвовало в турнире, если известно, что их было на два больше, чем перворазрядников?
4. Среди натуральных чисел от 1 до 2018 есть n чисел кратных 5, но не кратных 9 и m чисел кратных 9, но не кратных 5. Найти $n+m$.
5. Треугольник с длинами сторон 5, 7 и 8 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на $n>1$ равных треугольников, длина хотя одной из сторон которых – целое число. Найти наименьшее возможное значение числа n.

Вариант № 3

1. Среди молчунов каждый четвертый любит петь. Из любителей пения каждый пятый в жизни молчун. Во сколько раз любителей пения больше, чем молчунов, не желающих петь?
2. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1242, которые могут быть представлены в виде сумму двух взаимно простых чисел больших 1.
3. В турнире по регби, проходящем в два этапа, участвуют четное число команд, имеющие различные рейтинги. На первом этапе все команды играют по круговой системе (каждый с каждым) и половина команд, набравшая большее число побед, выходит в финальную часть турнира. Если команды набрали одинаковое число очков, отбор в финальную часть турнира производят по рейтингу. Лучшие команды, играя опять по круговой системе, выявляют победителя. Сколько команд участвовало на первом этапе турнира, если на обоих стадиях турнира было проведено 148 матчей?

4. Среди натуральных чисел от 1 до 2025 есть n чисел кратных 8, но не кратных 11 и m чисел кратных 11, но не кратных 8. Найти n и m.
5. Треугольник с длинами сторон 7,9 и 12 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n равных треугольников, длина хотя одной из сторон которых – целое число. Найти наибольшее возможное значение числа n.

Вариант № 4

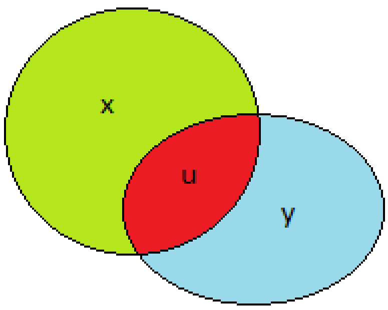
1. Среди честных людей каждый шестой богатый. Среди богатых людей каждый четвертый – честный. Во сколько раз честных людей больше, чем богатых, но не честных?
2. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1861, которые могут быть представлены в виде сумму двух взаимно простых чисел больших 2.
3. Турнир по гандболу проходит по следующим правилам. На первой фазе турнира команды делятся на две равные группы, каждая из которых выявляет две лучшие команды в своей группе по круговой системе (каждый играет с каждым). На второй фазе турнира каждая из двух лучших команд (если команды набрали одинаковое число очков, предпочтение отдается команде с большим рейтингом) первой группы играет матчи с каждой из двух лучших команд второй группы. Сколько команд участвовало в турнире, если известно, что всего было сыграно 46 матчей?
4. Среди натуральных чисел от 1 до 2020 есть n чисел кратных 9, но не кратных 7 и m чисел кратных 7, но не кратных 9. Найти $НОД(n,m)$.
5. Треугольник с длинами сторон 9, 11 и 13 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на $n>1$ равных треугольников, длина хотя одной из сторон которых – целое число. Найти наименьшее возможное значение числа n.

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: в $\frac{14}{9}$ раза

Решение. На схеме зеленым цветом отмечены брюнеты, не имеющие голубых глаз. Их количество обозначено буквой x. Красным цветом отмечены брюнеты с голубым цветом глаз. Их число u. Голубым цветом отмечены владельцы голубых глаз, не являющихся брюнетами. Их число y.



Условие задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{x+u}=\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{u}{y+u}=\dfrac{1}{10} \end{cases} \to \begin{cases} x=14u \\ y=9u \end{cases} \to \frac{x}{y}=\frac{14}{9}$$

Задача 2 Ответ: $s=2039180-6=2039174$

Решение. Докажем, что этим свойством обладают все числа от 5 до 2019, исключая 6. То, что числа $n=2,3,4,6$ нельзя представить в виде суммы взаимно простых чисел больших 1 – проверяется.

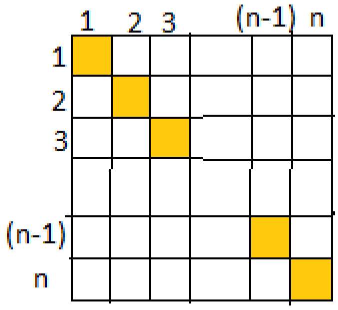
Если $n=2k+1$ нечетное, то $n=2+(2n-1)$, слагаемые взаимно простые и утверждение доказано. Пусть $n=2k$ – четное, $k>3$ и $q_1,q_2,...q_m$ – простые делители числа k. Тогда существует нечетное число $p\neq q_1,q_2,...q_m$, $p<k$ взаимно простое с k, а значит и с $n=2k$, для которого числа p и $2k-p$ взаимно простые: $НОД(p,2k-p)=НОД(p,2k)=1$, в сумме дающие n.Таким образом, в задаче требуется найти сумму всех чисел от 5 до 2019, исключая 6.

$$5+6+7+...+2019=\frac{5+2019}{2}\cdot 2015=2039180$$

$s=2039180-6=2039174$

Задача 3 Ответ: 9 дворов

Решение. На рис изображен бланк турнира, число участников которого n



Количество m участвующих пар равно числу клеток, лежащих выше отмеченной диагонали.

$$m=1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

Общее число k игр, сыгранных в турнире, согласно правилам, равно

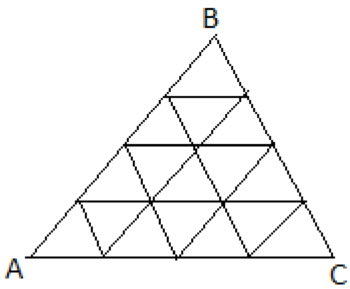
$$k=\frac{5n(n-1)}{2}=180\rightarrow n(n-1)=72\rightarrow n=9$$

Задача 4 Ответ: $n-m=36$

Решение. Пусть k – количество чисел отрезка натурального ряда $1\leftrightarrow 2019$, делящихся на 56 $k=\left[\frac{2019}{56}\right]=36$. Числа p и q выражают количество чисел из $1\leftrightarrow 2019$ кратных 7 и 8 : соответственно, $p=\left[\frac{2019}{7}\right]=288$, $q=\left[\frac{2019}{8}\right]=252$. Тогда $n=p-k=252$, $m=q-k=216$ и $n-m=36$.

Задача 5 Ответ: $n_{\max}=49$

Решение. В равных треугольниках разбиения соответствующие углы и стороны одинаковые. Объединение двух соседних треугольников разбиения образуют параллелограмм со сторонами параллельными сторонам заданного треугольника. С учетом этого, стороны каждого треугольника разбиения параллельны сторонам исходного треугольника, а их углы равны углам исходного треугольника. Таким образом, каждый из треугольников разбиения подобен исходному треугольнику с коэффициентом подобия k.



$m=4$

На рис изображен способ разбиения треугольника ABC на равные треугольники. Разделим сторону, например AC, на m равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные AB. Точки пересечения этих прямых со стороной BC разобьют ее на m равных отрезков. Через полученные точки проведем прямые, параллельные AC. Последние прямые пересекут сторону AB в точках, делящих AB на m равных частей. Остается только провести через них прямые, параллельные стороне BC. Полученное семейство прямых разбивает треугольник ABC на подобные ему с коэффициентом $k=\dfrac{1}{m}$ и равные между собой треугольники. Общее число таких треугольников $n=m^2$. По условию, хотя бы одна из сторон треугольников разбиения имеет длину, выражаемую целым числом. Тогда, в силу простоты чисел $3, 5, 7$, число m может принимать только три значения $m=3, 5$ и 7. Наибольшее значение $n=7^2=49$.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: в $1,5$ раза

Задача 2 Ответ: $s=1642557$ (сумма чисел отрезка натурального ряда 7, 8,…,1812)

Задача 3 Ответ: 7 мастеров

Задача 4 Ответ: $n+m=539$

Задача 5 Ответ: $n_{\min}=4$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: в $\dfrac{5}{3}$ раза

Задача 2 Ответ: $s=771887$ (сумма чисел отрезка натурального 5,…1242 без шестерки)

Задача 3 Ответ: 16 команд

Задача 4 Ответ: $n=230,\ m=161$

Задача 5 Ответ: $n_{\max}=144$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: в 2 раза

Задача 2 Ответ: $s=1732570$ (это сумма чисел отрезка натурального ряда 7, 8,…,1861)

Задача 3 Ответ: 14 команд

Задача 4 Ответ: $НОД(n,m)=64$

Задача 5 Ответ: $n_{\min}=9$