Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика,

8 класс.

Вариант № 1

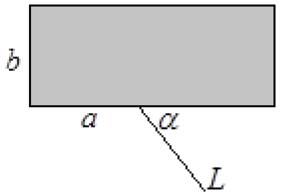
1. В доме 80 комнат, объединенных в 45 квартирах: однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных. Число двухкомнатных квартир не менее, чем на 50% превышает число трехкомнатных, а количество однокомнатных больше двухкомнатных не менее, чем на 30%. Сколько двухкомнатных квартир в доме?

2. Саша, Маша и Даша ели конфеты. Саша вместе с Машей съели бы все конфеты в два раза быстрее, чем смогла бы это сделать Даша в одиночку. За то Маша вместе с Дашей смогли бы съесть конфеты в три раза быстрее, чем сделала бы это Саша одна. Во сколько раз быстрее съели бы они конфеты всей компанией, чем могла бы это сделать одна Даша?

3. Сколько существует различных пар целых чисел x, y, являющихся делителями числа 540, для которых $НОД(x, y) = 2$? Пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считать одной парой.

4. Длины оснований трапеции равны 108 и 72. Трапеция разрезается на равные треугольники прямыми, параллельными его сторонам. Длина хотя бы одной стороны треугольника – целое число. Найти наименьшее возможное число таких треугольников.

5. На пути луча L на плоскости возникло препятствие в форме прямоугольника (рис). С помощью циркуля и линейки без делений необходимо достроить воображаемый путь луча вне препятствия (после того, как луч прошел бы сквозь препятствие, не изменив направления). Разрешается производить построения только вне препятствия или на его границе. Все необходимые для этого размеры a, b и угол α – известны.



Вариант № 2

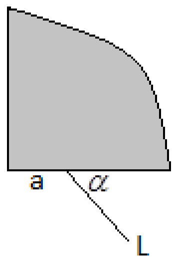
1. В доме 100 комнат, объединенных в 60 квартирах: однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных. Число двухкомнатных квартир не менее, чем в 2 раза превышает число трехкомнатных, а количество однокомнатных больше двухкомнатных не менее, чем на 50%. Сколько однокомнатных квартир в доме?

2. Миша, Гоша и Алеша пили минералку. Миша вместе с Гошей выпили всю воду в четыре раза быстрее, чем смог бы это сделать Алеша в одиночку. За то Алеша вместе с Гошей могут выпить воду в три раза быстрее, чем бы это может сделать Миша один. Во сколько раз Миша пьет воду быстрее, чем это делает Алеша?

3. Сколько существует различных пар целых чисел x, y, являющихся делителями числа 55125, для которых $НОД(x, y) = 15$? Пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считать одной парой.

4. Длины оснований трапеции равны 135 и 75. Трапеция разрезается на равные треугольники, длина хотя бы одной стороны треугольника – целое число. Найти наименьшее возможное число таких треугольников.

5. На пути луча L на плоскости возникло препятствие в форме фигуры, изображенной на рис (прямой угол). С помощью циркуля и линейки без делений необходимо достроить воображаемый путь луча вне препятствия (после того, как луч прошел бы сквозь препятствие, не изменив направления). Разрешается производить построения только вне препятствия или на его границе. Все необходимые для этого размеры: a и угол α – известны.



Вариант № 3

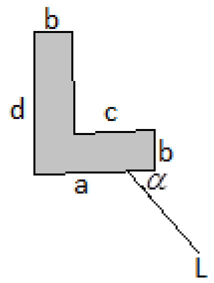
1. В доме 145 комнат, объединенных в 85 квартирах: однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных. Число двухкомнатных квартир не менее, чем в два раза превышает число трехкомнатных, а количество однокомнатных больше двухкомнатных не менее, чем на 30%. Сколько однокомнатных и двухкомнатных квартир в доме?

2. Костя, Коля и Максим решили вскопать огород. Коля вместе с Костей могут вскопать огород в три раза быстрее, чем смог бы это сделать Максим в одиночку. За то Максим вместе с Костей могут вскопать огород в четыре раза быстрее, чем бы это может сделать Коля один. Во сколько раз быстрее можно вскопать огород всей компанией, чем это могут сделать вместе Максим и Коля?

3. Сколько существует различных пар целых чисел x, y, являющихся делителями числа 6174, для которых $НОД(x, y) = 21$? Пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считать одной парой.

4. Длины оснований трапеции равны 196 и 56. Трапеция разрезается на равные треугольники, длина хотя бы одной стороны треугольника – целое число. Найти наименьшее возможное число таких треугольников.

5. На пути луча L на плоскости возникло препятствие в форме фигуры, изображенной на рис (балка). С помощью циркуля и линейки без делений необходимо достроить воображаемый путь луча вне препятствия (после того, как луч прошел бы сквозь препятствие, не изменив направления). Разрешается производить построения только вне препятствия или на его границе. Все необходимые для этого размеры: a, b, c, d и угол α – известны.



Вариант № 4

1. В доме 155 комнат, объединенных в 95 квартирах: однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных. Число двухкомнатных квартир не менее, чем в два раза превышает число трехкомнатных, а количество однокомнатных больше двухкомнатных не менее, чем на 60%. Сколько однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных квартир в доме?

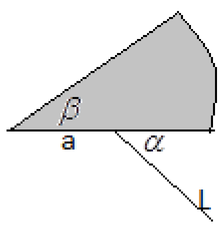
2. Аня, Надя и Алена занялись уборкой квартиры. Надя вместе с Аленой могут произвести уборку в полтора раза быстрее, чем смогла бы это сделать Аня в одиночку. За то Аня вместе с Аленой могут убрать квартиру в два раза быстрее, чем бы это может сделать Надя одна. Кто из девочек может убрать квартиру в одиночку быстрее, чем другие и во сколько раз?

3. Сколько существует различных пар целых чисел x, y, являющихся делителями числа 81000, для которых $НОД(x, y) = 10$? Пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считать одной парой.

4. Длины оснований трапеции равны 350 и 245. Трапеция разрезается на равные треугольники, длина хотя бы одной стороны треугольника – целое число. Найти наименьшее возможное число таких треугольников.

5. На пути луча L на плоскости возникло препятствие в форме фигуры, изображенной на рис (острый угол). С помощью циркуля и линейки без делений необходимо достроить воображаемый путь луча вне препятствия (после того, как луч прошел бы сквозь препятствие, не изменив направления). Разрешается производить построения только вне препятствия или на его границе.

Все необходимые для этого размеры a, углы α и β – известны.



Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 15 двухкомнатных квартир

Решение. Введем обозначения:

n – число однокомнатных квартир; m — число двухкомнатных квартир;

k — число трехкомнатных квартир.

Условие задачи:

$$\begin{cases} n+m+k=45 \\ n+2m+3k=80 \\ m\geq 1,5k,\ \ n\geq 1,3m \end{cases} \to \begin{cases} m=35-2k \\ n=10+k \\ \dfrac{355}{36}\leq k\leq 10 \end{cases}$$

С учетом целочисленности k имеем $k=10,\ \ n=20, m=15$

Задача 2 Ответ: в три раза

Решение. Пусть ω_1,ω_2 и ω_3 – производительности поедания конфет Дашей, Сашей и Машей соответственно.

Условие задачи:

$$\begin{cases} \omega_2+\omega_3=2\omega_1 \\ \omega_1+\omega_3=3\omega_2 \end{cases} \to \begin{cases} 2\omega_1-\omega_2=\omega_3 \\ \omega_1-3\omega_2=-\omega_3 \end{cases} \to \begin{cases} \omega_1=\dfrac{4\omega_3}{5} \\ \omega_2=\dfrac{3\omega_3}{5} \end{cases}$$

Вопрос задачи: $k=\dfrac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{\omega_1}=\dfrac{\frac{12}{5}\omega_3}{\frac{4}{5}\omega_3}=3$

Задача 3 Ответ: 32 пары

Решение. Число $a=p_1^k\cdot p_2^m\cdot p_3^n$ с тремя простыми делителями p_1,p_2,p_3 имеет $(k+1)(m+1)(n+1)$ различных делителей. Найдем число различных пар (x,y) взаимно простых делителей числа a. Число различных пар, содержащих единицу, например, $x=1$ равно $(k+1)(m+1)(n+1)$, поскольку в качестве y может быть взят любой делитель числа a. Различные пары взаимно простых делителей (x,y), не содержащие единицы и одного из простых делителей p_s, $s=1,2,3$, имеют вид:

1. $x=p_1^q, y=p_2^r, q=1,2,...,k, r=1,2,...,m$. Таких пар $k\cdot m$ штук.

2. $x=p_1^q, y=p_3^t, q=1,2,...,k, t=1,2,...,n$. Таких пар $k\cdot n$ штук.

3. $x=p_2^r, y=p_3^t, r=1,2,...,m, t=1,2,...,n$. Таких пар $m\cdot n$ штук.

В следующих вариантах образования искомых пар делителей, не содержащих единицы, участвуют все три простых делителя:

4. $x = p_1^q, y = p_2^r \cdot p_3^t, q = 1,2,...,k, r = 1,2,...,m, t = 1,2,...,n$. Таких пар $k \cdot m \cdot n$ штук.

5. $x = p_2^r, y = p_1^q \cdot p_3^t, q = 1,2,...,k, r = 1,2,...,m, t = 1,2,...,n$. Таких пар $k \cdot m \cdot n$ штук.

6. $x = p_3^t, y = p_2^r \cdot p_1^q, q = 1,2,...,k, r = 1,2,...,m, t = 1,2,...,n$. Таких пар $k \cdot m \cdot n$ штук.

Тогда общее число N различных пар взаимно простых делителей числа a равно

$$N = (k+1)(m+1)(n+1) + km + kn + mn + 3mnk = 4mnk + 2\left(km + kn + mn\right) + (m+n+k) + 1$$

В варианте 1 $x = 2x_1,\ y = 2y_1$, где x_1, y_1 – взаимно простые делители числа $540:2 = 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

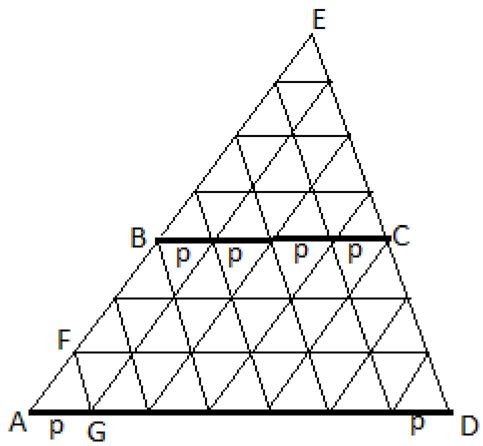
Число различных взаимно простых пар $\left(x_1, y_1\right)$ делителей числа $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ получается по общей формуле N для $k = 1, m = 3, n = 1$:

$$N = 4 \cdot 3 + 2\left(3+1+3\right) + (1+3+1) + 1 = 32$$

Задача 4 Ответ: $n_{\min} = 5$

Решение. Пусть a и b, $a > b$ длины оснований трапеции (целые числа) и p – общий делитель чисел a и b.

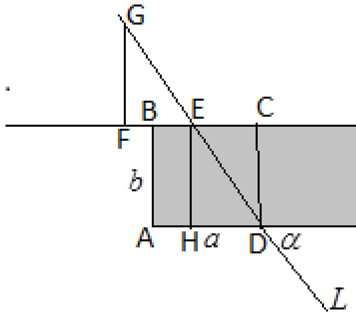
Тогда $a = p \cdot a_1, b = p \cdot b_1$. Трапеция может быть разрезана на равные треугольники только так, как это изображено на рис.



Достроим трапецию до треугольника AED, продолжив ее боковые стороны до их пересечения в точке E. Основание AD трапеции $ABCD$ разделим на a_1 отрезков длины p и через их концы проведем прямые параллельные сторонам AE и DE соответственно. Соединим точки пересечения этих прямых со сторонами AE и DE прямыми, параллельными основанию AD. Поскольку BC параллельна AD, построенные прямые разобьют BC на b_1 отрезков длины p. Общее число равных между собой треугольников, на которые разбит треугольник AED равно a_1^2, среди них b_1^2 треугольников принадлежат треугольнику BEC. Тогда число n треугольников, на которые будет разбита трапеция $ABCD$ равно $n = a_1^2 - b_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{p^2}$. Наименьшему значению n соответствует $p = НОД\left(a, b\right)$.

В варианте 1 $a = 108 = 2^2 \cdot 3^3, b = 72 = 2^3 \cdot 3^2, НОД\left(a, b\right) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Тогда $n_{\min} = \frac{108^2 - 72^2}{36^2} = \frac{36^2 \cdot 9 - 36^2 \cdot 4}{36^2} = 5$

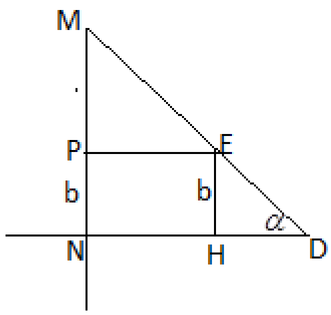
Задача 5 Решение.



В построении используются стандартные задачи: 1) построение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярную заданной прямой; 2) построение прямой, проходящей через заданную точку, параллельной заданной прямой; 3) построение треугольника равного данному.

Этапы построения:

1. Строим прямоугольный треугольник с заданным катетом b и противолежащим ему острым углом α (треугольник DHE);



На стороне угла α выбирается произвольная точка M, из которой опускается перпендикуляр MN на другую сторону угла. Точка P на перпендикуляре MN отстоит от N на b. Через точку P проводится прямая PE, параллельная прямой DN. Из точки E опускается перпендикуляр EH. Треугольник DHE искомый. Длина катета $DH = c$.

2. На границе отмечаем точку C с условием $BC = a$;

3. На границе отмечаем точку E с условием $CE = DH = c$ ($E-$ точка выхода луча за пределы препятствия);

4. Строим треугольник CFG, равный треугольнику DHE с катетом FE, лежащим на границе BC или ее продолжении;

5. Прямая EG – искомое продолжение луча за пределы препятствия.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 30 однокомнатных квартир

Задача 2 Ответ: в $1,25$ раза

Задача 3 Ответ: 38 пар

Задача 4 Ответ: $n_{\min} = 56$

Задача 5 построения

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 30 двухкомнатных, 40 однокомнатных.

Задача 2 Ответ: в $2\frac{2}{9}$ раза

Задача 3 Ответ: 23 пары

Задача 4 Ответ: $n_{\min} = 45$

Задача 5 (построения)

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 15 трехкомнатных, 30 двухкомнатных, 50 однокомнатных.

Задача 2 Ответ: Аня убирается в $1,2$ раза быстрее, чем Надя и в $1,5$ раза быстрее, чем Алена

Задача 3 Ответ: 113 пар

Задача 4 Ответ: $n_{\min} = 51$

Задача 5(построения)