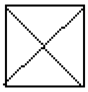
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика,
9 класс.

Вариант № 1

1. В норе лисы проделаны ходы-туннели в форме сторон квадрата и его диагоналей. Лиса движется по ним не оборачиваясь, с постоянной скоростью, пробегая сторону квадрата за 6 сек. Фокстерьер, проникнув в нору, может двигаться по ней со скоростью на 20% большей, чем лиса и по ходу движения может видеть весь прямолинейный участок туннеля, в котором находится. Менять направление движения и останавливаться каждый из них может мгновенно, но только в вершинах квадрата или его центре. Существует ли стратегия передвижения собаки по туннелям, при которой она всегда догонит лису, независимо от того как та будет двигаться по норе? Оценить время погони. Задача математическая, поэтому лиса и собака – точки, ходы – отрезки прямых.



2. Натуральное число a раскладывается в произведение трех различных простых делителей. Сумма всех его делителей, включая единицу и a, равно 72. Найти число a.

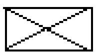
3. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет корень $x = 1$. Если его коэффициенты увеличить на единицу, то он будет иметь корень $x = 2$. Если еще раз увеличить коэффициенты на единицу, то среди его корней будет $x = 3$. Найти квадратный трехчлен.

4. Мастер работал с плиткой в форме прямоугольника $a \times b$, длины сторон которого a и b – целые числа, причем $1 < \frac{b}{a} < 2$. Ему удалось, не разрезая плиток, уложить ею две прямоугольные стены размерами 70×66 и 102×39. Найти a и b? Сколько плиток при этом было использовано?

5. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC с катетами 3 и 4 является стороной расположенного во вне прямоугольника $ABDE$, вторая сторона которого равна 2. Биссектриса прямого угла треугольника ABC пересекает сторону DE в точке M. В каком отношении точка M делит отрезок DE?

Вариант № 2

1. В норе лисы проделаны ходы-туннели в форме сторон прямоугольника и его диагоналей. Лиса движется по ним не оборачиваясь, с постоянной скоростью, пробегая стороны прямоугольника за 3 сек и 4 сек соответственно. Фокстерьер, проникнув в нору, может двигаться по ней со скоростью на 5% большей, чем лиса и по ходу движения может видеть весь прямолинейный участок туннеля, в котором находится. Менять направление движения и останавливаться каждый из них может мгновенно, но только в вершинах прямоугольника или его центре. Существует ли стратегия передвижения собаки по туннелям, при которой она всегда догонит лису, независимо от того как та будет двигаться по норе? Оценить время погони. Задача математическая, поэтому лиса и собака – точки, ходы – отрезки прямых.



2. Натуральное число a раскладывается в произведение трех различных простых делителей. Сумма всех его делителей, включая единицу и a, равно 384. Найти число a.

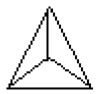
3. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет корень $x = -1$. Если его коэффициенты уменьшить на единицу, то он будет иметь корень $x = -2$. Если еще раз уменьшить коэффициенты на единицу, то среди его корней будет $x = -3$. Найти квадратный трехчлен.

4. Мастер работал с плиткой в форме прямоугольника $a \times b$, длины сторон которого a и b – целые числа, причем $2 < \frac{b}{a} < 3$. Ему удалось, не разрезая плиток, уложить ею две прямоугольные стены размерами 110×26 и 85×70. Найти a и b ? Сколько плиток при этом было использовано?

5. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC с катетами 5 и 12 является стороной расположенного во вне прямоугольника $ABDE$, вторая сторона которого равна 1. Биссектриса прямого угла треугольника ABC пересекает сторону DE в точке M. В каком отношении точка M делит отрезок DE ?

Вариант № 3

1. В норе лисы проделаны ходы-туннели в форме сторон равностороннего треугольника и отрезков, соединяющих его центр с вершинами. Лиса движется по ним не оборачиваясь, с постоянной скоростью, пробегая сторону треугольника за $\sqrt{3}$ сек. Фокстерьер, проникнув в нору, может двигаться по ней со скоростью на 1% большей и по ходу движения видеть весь прямолинейный участок туннеля, в котором находится. Менять направление движения и останавливаться каждый из них может мгновенно, но только в вершинах треугольника или в его центре. Существует ли стратегия передвижения собаки по туннелям, при которой она всегда догонит лису, независимо от того как та будет двигаться по норе. Оценить время погони. Задача математическая, поэтому лиса и собака – точки, ходы – отрезки прямых.



2. Натуральное число a раскладывается в произведение трех различных простых делителей. Сумма всех его делителей, включая единицу и a, равно 336. Найти число a.

3. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет корень $x = 2$. Если его коэффициенты увеличить на два, то он будет иметь корень $x = 1$. Если еще раз увеличить коэффициенты на два, то среди его корней будет $x = -1$. Найти квадратный трехчлен.

4. Мастер работал с плиткой в форме прямоугольника $a \times b$, длины сторон которого a и b – целые числа, причем $1 < \frac{b}{a} < 2,\ a \cdot b > 6$. Ему удалось, не разрезая плиток, уложить ею две прямоугольные стены размерами 78×30 и 44×42. Найти a и b ? Сколько плиток при этом было использовано?

5. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC с катетами 7 и 24 является стороной расположенного во вне прямоугольника $ABDE$, вторая сторона которого равна 4. Биссектриса прямого угла треугольника ABC пересекает сторону DE в точке M. В каком отношении точка M делит отрезок DE ?

Вариант № 4

1. В норе лисы проделаны ходы-туннели в форме сторон правильного шестиугольника и отрезков, соединяющих его центр с вершинами. Лиса движется по ним не оборачиваясь, с постоянной скоростью, пробегая сторону шестиугольника за 11 сек. Фокстерьер, проникнув в нору, может двигаться по ней со скоростью на 10% большей и по ходу движения видеть весь прямолинейный участок туннеля, в котором находится. Менять направление движения и останавливаться каждый из них может мгновенно, но только в вершинах шестиугольника или в его центре. Существует ли стратегия передвижения собаки по туннелям, при которой она всегда догонит лису, независимо от того как та будет двигаться по норе. Оценить время погони. Задача математическая, поэтому лиса и собака – точки, ходы – отрезки прямых.

2. Натуральное число a раскладывается в произведение трех различных простых делителей. Сумма всех его делителей, включая единицу и a, равно 448. Найти число a.

3. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет корень $x = -2$. Если его коэффициенты уменьшить на два, то он будет иметь корень $x = -3$. Если еще раз уменьшить коэффициенты на два, то среди его корней будет $x = -1$. Найти квадратный трехчлен.

4. Мастер работал с плиткой в форме прямоугольника $a \times b$, длины сторон которого a и b – целые числа, причем $4 < \frac{b}{a} < 5$. Ему удалось, не разрезая плиток, уложить ею две прямоугольные стены размерами 60×39 и 99×42. Найти a и b? Сколько плиток при этом было использовано?

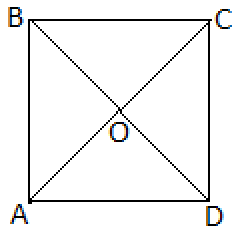
5. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC с катетами 8 и 15 является стороной расположенного во вне прямоугольника $ABDE$, вторая сторона которого равна 3. Биссектриса прямого угла треугольника ABC пересекает сторону DE в точке M. В каком отношении точка M делит отрезок DE?

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 1) существует; 2) $t \le \frac{17 + 35\sqrt{2}}{2} \approx 33,2$ сек

Решение. Пусть a – длина стороны квадрата, v – скорость лисы, $1,2v$ – скорость собаки, $\frac{a}{v} = 6$



Независимо от положений собаки и лисы в начале охоты, собака на первом этапе погони должна побежать в точку O – центр квадрата. Для этого потребуется время $t_1 \le \frac{a/2 + a/\sqrt{2}}{1,2v} = \frac{5(1+\sqrt{2})}{2}$.

Если в момент появления собаки в точке O, лиса ей не видна (она находится на сторонах квадрата), собака должна остановиться в точке O и дождаться момента, когда лиса появится в одной из вершин квадрата. Время ожидания $t_2 \le \frac{a}{v} = 6$. Если в момент прихода собаки в точку O она видит лису (лиса находится на диагоналях квадрата), то расстояние между ними не превосходит $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и время ожидания $t_2 = 0$.

В обоих случаях, в момент времени, когда собака увидела лису, расстояние между ними не может быть более длины половины диагонали, т.е. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. На третьем этапе собака должна бежать в направлении лисы. Она догонит ее за время $t_3 \le \dfrac{a}{\sqrt{2}(1,2v-v)} = 15\sqrt{2}$. Таким образом, общее время погони $t \le t_1 + t_2 + t_3 = \dfrac{5(1+\sqrt{2})}{2} + 6 + 15\sqrt{2} = \dfrac{17+35\sqrt{2}}{2} \approx 33,2$ сек

Задача 2 Ответ: $a = 30$

Решение. Имеем $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, где p_1, p_2, p_3 – простые числа. Сумма всех его делителей $1, p_1, p_2, p_3, p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_3, p_2 \cdot p_3, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ равна $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1) = 72$.

Пусть для определенности $2 \le p_1 < p_2 < p_3$.

Случай 1. $p_1 = 2$

$(p_2+1)(p_3+1) = 24$

$p_2 = 3 \to p_3 = 5 \to a = 30$

Случай 2. $p_1 = 3$

$(p_2+1)(p_3+1) = 18 \to p_2, p_3 \in \varnothing$, так как левая часть равенства делится на 4 .

Случай 3. $p_1 \ge 5$

$(p_2+1)(p_3+1) \le 12 \to p_2, p_3 \in \varnothing$, так как $p_2 + 1 \ge 8,\ p_3 + 1 \ge 12$.

Задача 3 Ответ: $y = -6x^2 + 11x - 5$

Решение. Условия задачи:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4(a+1)+2(b+1)+c+1=0 \\ 9(a+2)+3(b+2)+c+2=0 \end{cases} \to \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-7 \\ 9a+3b+c=-26 \end{cases} \to \begin{cases} c=-a-b \\ 3a+b=-7 \\ 8a+2b=-26 \end{cases} \to \begin{cases} c=-a-b \\ 3a+b=-7 \\ 4a+b=-13 \end{cases} \to \begin{cases} a=-6 \\ b=11 \\ c=-5 \end{cases}$$

Задача 4 Ответ: 1) размер плитки 2×3; 2) 1433 плиток.

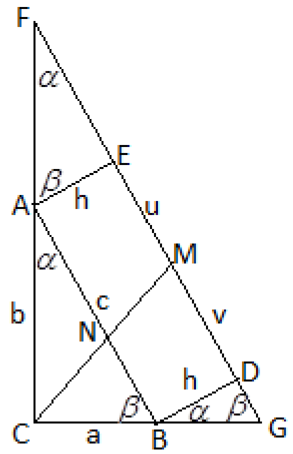
Решение. Пусть a и b, $a < b < 2a$ – размеры плитки. Из условия того, что плитка не резалась, следует, что число $a \cdot b$ является делителем чисел $m = 70 \times 66 = 4620 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $n = 102 \times 39 = 3978 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17$, а каждое из a и b являются общими делителями m и n .Тогда каждое из чисел a и b делят $НОД(m,n) = 6$. Возможны варианты: 1) $a=1, b=2$; 2) $a=1, b=3$; 3) $a=1, b=6$; 4) $a=2, b=3$. Условиям задачи удовлетворяет только вариант $a=2, b=3$. Количество плиток равно $\dfrac{(n+m)}{6} = 1433$.

Задача 5 Ответ: $17:18$

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b, $a < b$ является стороной расположенного во вне прямоугольника $ABDE$, вторая сторона которого равна h . Биссектриса прямого угла пересекает сторону DE в точке M . В каком отношении точка M делит отрезок DE ?

Ответ: $\left(ac + h(b-a)\right) : \left(bc - h(b-a)\right)$, где $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $h < \dfrac{bc}{b-a}$

Решение. Введем обозначения: $EM = u,\ DM = v$



Из подобия $\triangle FEA$ и $\triangle ABC$ имеем: $EF : h = b : a \to EF = \dfrac{bh}{a}$

Из подобия $\triangle BDG$ и $\triangle ABC$ имеем: $DG : h = a : b \to DG = \dfrac{ah}{b}$

Из подобия $\triangle CFG$ и $\triangle ABC$ имеем $CF : CG = b : a$.
По свойству биссектрисы $MF : MG = CF : CG = b : a$ и

$$\frac{u+EF}{v+DG} = \frac{b}{a} \to \frac{u+\dfrac{bh}{a}}{v+\dfrac{ah}{b}} = \frac{b}{a} \to \begin{cases} ua - bv = h(a-b) \\ u+v=c \end{cases} \to \begin{cases} u(a+b) = bc - h(b-a) \\ v(a+b) = ac + h(b-a) \end{cases}$$

Разделив одно на другое, получим ответ $u : v = \left(bc - h(b-a)\right) : \left(ac + h(b-a)\right)$.
Условием принадлежности точки M стороне DE прямоугольника является выполнение неравенства $FM > FE$ или $h < \dfrac{bc}{b-a}$.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 1) существует; 2) $t \le \dfrac{408}{7} \approx 58,2$ сек

Задача 2 Ответ: $a = 186;\ 231$

Решение. Имеем $\left(p_1+1\right)\left(p_2+1\right)\left(p_3+1\right) = 384$

Введем обозначения: $p_1 = 2m_1 - 1,\ \ p_2 = 2m_2 - 1,\ \ p_3 = 2m_3 - 1 \to\ \ m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 48$

Случай 1. $m_1 = 2$

$m_2 = 3 \to m_3 = 8 \to p_3 = 15 \to \varnothing$

$m_2 = 4 \to p_2 = 7 \to m_3 = 6 \to p_3 = 11 \to a = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$

$m_2 \ge 6 \to m_3 \ge 7 \to m_2 \cdot m_3 \ge 42 \to \varnothing$

Случай 2. $m_1 \ge 3$

$m_2 \cdot m_3 \le 16 \ \to \varnothing$ так как $m_2 \ge 4,\ m_3 \ge 5$

Задача 3 Ответ: $y = 4x^2 + 9x + 5$

Задача 4 Ответ: 1) размер плитки 2×5; 2) 881 плитка.

Задача 5 Ответ: $72 : 149$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 1) существует; 2) $t \le \dfrac{10200 + 151\sqrt{3}}{101} \approx 103,6$ сек

Задача 2 Ответ: $a = 182;\ 195$

Задача 3 Ответ: $y = \dfrac{7}{3}x^2 - x - \dfrac{22}{3}$

Задача 4 Ответ: 1) размер плитки 3×4; 2) 349 плиток.
Задача 5 Ответ: $243:532$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 1) существует; 2) $t \le 136$ сек
Задача 2 Ответ: $a = 273$
Задача 3 Ответ: $y = 9x^2 + 31x + 26$
Задача 4 Ответ: 1) размер плитки 2×9; 2) 361 плитка.
Задача 5 Ответ: $157:234$