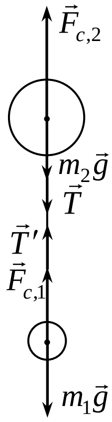
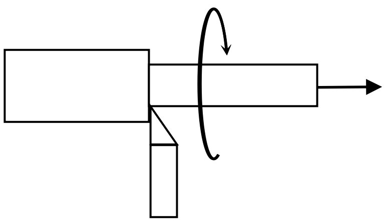
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс
2018-2019 учебный год, (комплект 3)

1. Два двухатомных газа A_2 и B_2, взятые в равном количестве молей, находятся в сосуде под давлением p. Происходит химическая реакция с образованием газообразного соединения A_2B. Известно, что образовалось максимально возможное количество этого газа. Какое давление будет в сосуде при той же температуре после прохождения реакции?

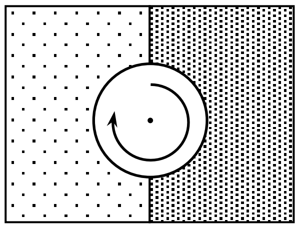
2. Два шара с радиусами R и $2R$ имеют плотности 3ρ и ρ соответственно. Шары связаны очень длинной нитью. Шары сбрасывают вниз с воздушного шара, и благодаря сопротивлению воздуха через некоторое время они движутся равномерно. Найти силу натяжения нити. Выталкивающей силой, действующей на шары со стороны воздуха, пренебречь. Считать силу сопротивления воздуха пропорциональной площади поперечного сечения шариков.





3. Из цилиндрической заготовки радиуса R, длиной h токарь резцом на токарном станке вырезает цилиндр радиуса $3R/4$, снимая металл резцом за один проход (см. рисунок). На какое максимальное расстояние смещается центр тяжести заготовки в процессе ее обработки?

4. Однородный диск раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и положили на границу раздела двух горизонтальных полуплоскостей так, что его центр оказался точно на границе (см. рисунок; вид сверху). Коэффициент трения между диском и одной полуплоскостью k, между диском и другой полуплоскостью $2k$. Найти ускорение центра диска сразу после того, как он оказался на поверхности.



5. Внутри длинной катушки радиуса r на расстоянии $r/2$ от ее оси находится положительный точечный заряд q с массой m. Вначале ток через катушку не течет. В некоторый момент времени в катушке включается электрический ток, индукция магнитного поля внутри катушки возрастает от нуля до значения B_0 и далее от времени не зависит. При этом заряд приходит в движение. На каком минимальном расстоянии от оси катушки он пролетит, и какую скорость будет иметь в этот момент? Силой тяжести пренебречь.

Решения. Критерии оценки решений задач

1. Пусть в сосуде находятся ν молей вещества A_2 и ν молей вещества B_2. Уравнение реакции

$$2A_2 + B_2 = 2A_2B$$

показывает, что каждый моль вещества B_2 реагирует с двумя молями вещества A_2. Поэтому в нашем случае вещество A_2 (ν молей) прореагирует полностью с половиной вещества B_2 (с $\nu/2$ молей). После прохождения реакции в сосуде будет столько же молей соединения A_2B, сколько было в сосуде вещества A_2 (т.е. ν молей) и половина бывшего в сосуде вещества B_2 ($\nu/2$ молей). Поэтому в сосуде останется $3\nu/2$ моля газов. Из закона Дальтона для начальной и конечной смесей

$$p = \frac{2\nu RT}{V} \text{ и } p_1 = \frac{1{,}5\nu RT}{V}$$

заключаем, что

$$p_1 = \frac{3}{4}p$$

Критерии оценки решения задачи

1. Правильно использован закон Дальтона для начальной смеси – 0,5 балла,

2. Из уравнения реакции правильно определено изменение количества вещества газов в сосуде – 0,5 балла,

3. Правильно использован закон Дальтона для конечной смеси – 0,5 балла,

4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Поскольку на шар большего радиуса действует бóльшая сила сопротивления воздуха, при движении шары расположатся друг над другом, причем шар большего радиуса окажется сверху (см. рисунок). Поэтому второй закон Ньютона для каждого имеет вид

$$\begin{aligned} m_1 g &= T + F_{c,1} \\ m_2 g + T &= F_{c,2} \end{aligned} \qquad (*)$$

где m_1 и m_2 - массы меньшего и большего шара соответственно, T - сила натяжения нити, $F_{c,1}$ и $F_{c,2}$ - силы сопротивления воздуха, действующие на меньшее и большее тело соответственно. Найдем связи между массами шаров и силами сопротивления. Очевидно

$$m_2 = \frac{8}{3}m_1, \; F_{c,2} = 4F_{c,1}$$

Поэтому система уравнений (*) дает

$$\begin{aligned} m_1 g &= T + F_{c,1} \\ \frac{8}{3}m_1 g + T &= 4F_{c,1} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$T = \frac{4}{15} m_1 g = \frac{16\pi}{15} \rho R^3 g$$

Критерии оценки решения задачи

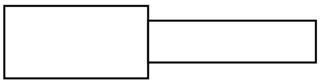
1. Правильно использован второй закон Ньютона для малого шара – 0,5 балла,

2. Правильно использован второй закон Ньютона для большого шара – 0,5 балла,

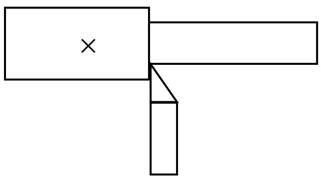
3. Правильно найдены соотношения масс шаров и сил сопротивления – 0,5 балла,

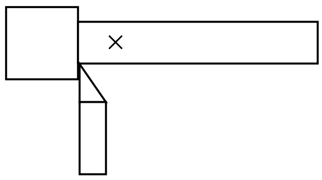
4. Правильный ответ для силы сопротивления – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

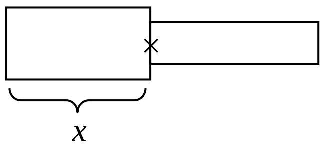


3. В процессе обработки заготовка представляет собой два состыкованных соосных цилиндра с радиусами R и $3R/4$ (см. рисунок). И центр тяжести заготовки в процессе ее обработки смещается, поскольку до обработки центр тяжести заготовки находится посередине, а, например, в положении, показанном на рисунке, центр тяжести заготовки находится левее ее середины. Докажем, что максимальным смещение центра тяжести будет в таком положении, в котором центр тяжести совпадает с положением резца (стыка между двумя частями заготовки).





Действительно, пусть центр тяжести находится левее положения резца (стыка частей; см. левый рисунок, положение центра тяжести показано крестиком). Если в этом положении резец срежет какой-то небольшой объем заготовки, то ее центр тяжести сместится влево, поскольку мы уменьшаем часть заготовки справа от центра тяжести. Если центр тяжести находится слева от резца (правый рисунок), то при дальнейшей обработке заготовки центр тяжести будет перемещаться вправо. Т.о. пока резец при обработке заготовки с правого конца не «дошел» до ее центра тяжести, центр тяжести движется влево, когда «перешел» - вправо. Это значит, что максимальным смещение центра тяжести будет тогда, когда он совпадает с резцом.



Найдем из этого условия максимальное смещение центра тяжести. Пусть центр тяжести совпадает со стыком частей заготовки (тогда он максимально смещен от ее центра) и находится на расстоянии x от ее левого конца (см. рисунок). Тогда

$$m_л \frac{x}{2} = m_п \frac{l - x}{2}$$

где $m_л$ и $m_п$ - массы правой и левой частей. Отсюда

$$\rho \pi R^2 x \frac{x}{2} = \rho \pi \left(\frac{3R}{4} \right)^2 (l - x) \frac{l - x}{2}$$

где ρ - плотность материала заготовки. Отсюда

$$x = \frac{3l}{7}$$

Это значит, что максимальное смещение центра тяжести заготовки при обработке

$$\Delta x = \frac{l}{2} - \frac{3l}{7} = \frac{l}{14}$$

(тот же самый ответ получается при непосредственном нахождении положения центра тяжести детали как функции длины сточенного участка и максимума этой функции).

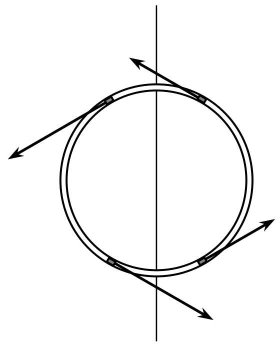
Критерии оценки решения задачи

1. Правильная идея решения – найти положение центра тяжести детали как функции длины сточенного участка, а потом максимум этой функции – 0,5 балла

2. Правильно найдено положение центра тяжести детали для произвольной длины сточенного участка – 0,5 балла

3. Правильно найден максимум этой функции – 1 балл

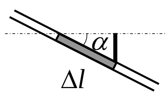
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.



4. Мысленно разобьем диск на узкие колечки, найдем силу трения, действующую на каждое, а потом просуммируем. Рассмотрим четыре малых элемента кольца одинаковой длины, лежащих на одинаковых расстояниях от границы полуплоскостей на одной и второй полуплоскости (см. рисунок). На них действуют силы трения, направленные противоположно скорости элементов (т.е. по касательным к кольцу). Но поскольку коэффициенты трения диска о полуплоскости – разные, то две силы будут больше двух других, и суммарная сила трения не будет равняться нулю.

Рассмотрим силы, действующие на два таких элемента, лежащих на одной и той же полуплоскости. Очевидно, сумма сил трения, действующих на них, будет направлена вдоль границы и равна

$$2k_1 \Delta mg \sin\alpha$$



где k_1 - коэффициент трения между диском и той полуплоскостью, на которой находятся рассматриваемые элементы диска, Δm - масса каждого элемента, α - угол между элементами и перпендикуляром к границе раздела между полуплоскостями (см. рисунок). Масса элемента пропорциональна его длине

$$\Delta m = \frac{\Delta l}{l} m$$

где m - масса кольца, l - его длина, Δl - длина рассматриваемых элементов. Поскольку величина

$$\Delta l \sin\alpha$$

имеет смысл проекции рассматриваемого элемента кольце на границу раздела между полуплоскостями, то их сумма дает диаметр кольца. Поэтому сумма проекций сил трения, действующих на элементы кольца, находящихся с одной стороны от границы раздела дает

$$\sum 2k_1 \Delta mg \sin\alpha = k_1 \frac{mg2r}{2\pi r} = \frac{k_1 mg}{\pi}$$

где r - радиус рассматриваемого кольца. Сумма проекций сил трения, действующих на другую половину дает

$$\frac{k_2 mg}{\pi}$$

Поэтому суммарная сила трения, действующая на рассматриваемое кольцо, есть

$$\frac{(k_1 - k_2)mg}{\pi}$$

Суммируя силы трения, действующие на отдельные колечки, найдем результирующую силу трения, действующую на диск

$$F = \frac{(k_1 - k_2)Mg}{\pi}$$

где M - масса диска. Отсюда находим ускорение центра диска, которое будет направлено вдоль границы полуплоскостей

$$a = \frac{(k_1 - k_2)g}{\pi}$$

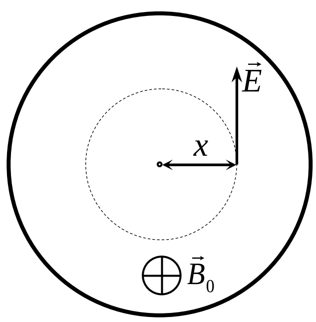
Поэтому в рассматриваемом варианте ($k_1 = 2k$, $k_2 = k$) имеем

$$a = \frac{kg}{\pi}$$

Критерии оценки решения задачи

1. Сформулирована главная идея решения – суммирование сил трения, действующих на разные элементы диска и имеющих разные направления – 0,5 балла,
2. Разбивка диска на кольца (как в приведенном решении) или сектора и нахождение силы трения, действующей на каждый элемент – 0,5 балла,
3. Доказательство того, что суммарная сила направлена вдоль границы раздела полуплоскостей – 0,5 балла,
4. Правильное суммирование, правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.



5. По закону электромагнитной индукции в момент включения магнитного поля возникнет вихревое электрическое поле, которое разгонит заряд до некоторой скорости. После этого магнитное поле внутри катушки будет однородным и не будет зависеть от времени. Поэтому заряд будет двигаться внутри соленоида по окружности. Найдем параметры этой окружности.

Очевидно, параметры этой окружности будут зависеть от времени включения поля. Если поле включается очень быстро, заряд за время включения поля практически не успевает переместиться, и начинает свое движение из начальной точки, приобретя ту скорость, которую сообщит ему вихревое электрическое поле в этой точке. Если поле включается медленно, заряд движется в процессе включения поля и то, какую скорость он приобретет к моменту включения магнитного поля до величины B_0 и то, в какой точке окажется, зависит от закона включения поля. Поскольку этот закон в условии не задан, количественно этот случай не может быть рассмотрен. Рассмотрим случай быстрого включения поля.

Найдем напряженность вихревого электрического поля, которое возникает в процессе включения магнитного поля и которое действует на заряд. Для этого рассмотрим контур радиуса $x = r/2$ и с центром на оси катушки. С одной стороны согласно закону электромагнитной индукции ЭДС индукции в контуре возникнет ЭДС величиной

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B_0 \pi x^2}{\Delta t}.$$

С другой стороны, причина возникновения ЭДС – действие вихревого электрического поля, которое обладает осевой симметрией (благодаря осевой симметрии магнитного поля в катушке). Это значит, что вихревое поле одинаково во всех точках, находящихся на одинаковых расстояниях от оси катушки (причем направлено по касательной, поскольку существование проекции, направленной во всех точках от оси катушки означало бы, что там есть заряды). Поэтому работа поля над единичным пробным зарядом может быть записана как $2\pi x E$. Отсюда имеем

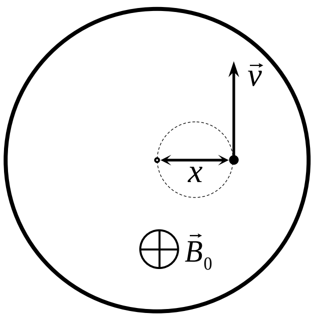
$$\frac{B_0 \pi x^2}{\Delta t} = 2\pi x E \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{B_0 x}{2\Delta t} \qquad (*)$$

Далее. Поле (*) разгоняет заряд. Поскольку поле включается очень быстро (именно такой случай мы рассматриваем), за время включения поля заряд не успел переместиться. Поэтому он приобретает следующий импульс и, следовательно, скорость

$$m\vec{v} = q\vec{E}\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{qB_0 x}{2m} = \frac{qB_0 r}{4m} \qquad (**)$$

где m и q - масса и величина точечного заряда. Теперь находим радиус окружности R, по которой движется заряд. Из закона вращательного движения имеем

$$\frac{mv^2}{R} = qB_0 v \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{mv}{qB_0} = \frac{x}{2}. \qquad (***)$$



При этом легко сообразить (находя направление силы Лоренца, действующей на заряд со стороны магнитного поля), что поле будет поворачивать заряд к центру катушки. Поэтому из формулы (***) заключаем, что заряд пройдет через точку, лежащую на оси катушки. Скорость заряда в магнитном поле не меняется, и, следовательно, она будет равна (**).

Чтобы время включения было малым, нужно, чтобы перемещение заряда за время включения поля было много меньше радиуса орбиты. А поскольку ускорение заряда есть

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{qB_0 x}{2m\Delta t},$$

(здесь использована формула (*)), то оценкой его перемещения за время включения поля является величина

$$\Delta x \sim a\Delta t^2 \sim \frac{B_0 rq}{m}\Delta t$$

Поэтому критерием малости времени включения поля является неравенство

$$\Delta x \ll r \qquad \Rightarrow \qquad \frac{B_0 Rq}{m}\Delta t \ll r \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t \ll \frac{m}{qB_0} \qquad (4*)$$

Неравенство (4*) имеет простой физический смысл. Отношение m / qB_0 имеет смысл времени оборота частицы массы m с зарядом q в магнитном поле с индукцией B_0. Поэтому время включения поля должно быть мало по сравнению с временем оборота.

Если неравенство (4*) не выполнено, характер движения заряда зависит от закона включения поля, который не задан условием задачи, и потому не может быть определен.

Критерии оценки решения задачи

1. Обсужден вопрос о времени включения поля. Сделан вывод о зависимости характера движения заряда в случае медленного включения от характера включения – 0,5 балла,

2. Отмечена осевая симметрия задачи. Найдена напряженность вихревого поля – 0,5 балла,

3. Для случая быстрого включения поля найдена скорость заряда– 0,5 балла,

4. Правильный ответ для минимального расстояния от заряда до оси соленоида – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Оценка работы – сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов. «Шаг» оценки – 0,5 балла.