12+

ISSN 1814-6422

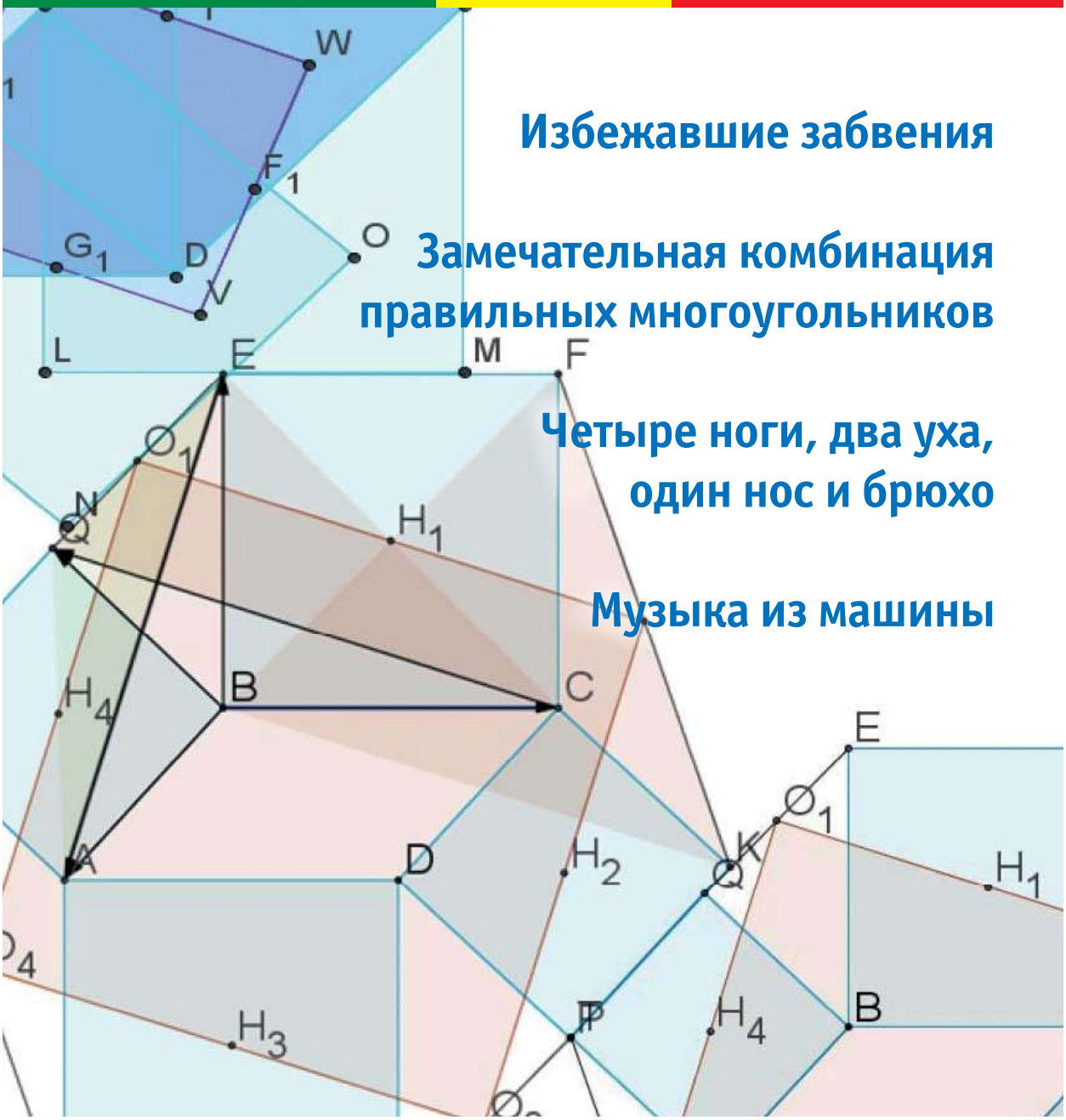
Sapere Aude – Дерзай знать!

ПОТЕНЦИАЛ

Ежемесячный журнал для старшеклассников и учителей

№03, 2018

МАТЕМАТИКА ФИЗИКА ИНФОРМАТИКА



Избежавшие забвения

Замечательная комбинация правильных многоугольников

Четыре ноги, два уха, один нос и брюхо

Музыка из машины

Муравьёв Сергей Евгеньевич
Доцент, исполняющий обязанности заместителя зав. кафедрой Теоретической физики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, кандидат физико-математических наук.

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» 2017–2018 учебного года. Заключительный тур по физике

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» в течение многих лет организуется Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ». Олимпиада «Росатом» проводится для школьников 7–11 классов по математике и физике во многих городах нашей страны и за рубежом.

В олимпиаде «Росатом» 2017–2018 учебного года приняли участие около 25 тысяч школьников. Несколько тысяч участвовали в заключительном этапе, победителями и призёрами стали около 1000 участников.

Олимпиада «Росатом» по физике 2017–2018 учебного года входит в Перечень олимпиад школьников (первый уровень), потому её победители и призёры могут воспользоваться особыми правами при поступлении в вузы, в которых в качестве вступительного испытания есть физика. В список таких вузов входят, в частности, НИЯУ МИФИ, Физтех, МГУ им. М. В. Ломоносова, МВТУ им. Н. Э. Баумана и многие-многие другие.

Ниже приводится разбор заданий заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике 2017–2018 учебного года.

Формулировки задач

7 класс

1. Вес ведёрка, до краёв заполненного водой, равен $P_1 = 20$ Н. В ведёрко кладут камень, плотность которого втрое больше плотности воды и который полностью погружается в воду. Вес ведёрка становится равным $P_2 = 24$ Н. Каким будет вес ведёрка, если из него аккуратно вытащить первый камень и положить другой, с той же плотностью, но с вдвое меньшим объёмом, чем у первого?

2. Винни Пух пошёл в гости к Пятачку. Перед выходом Винни заметил, что его настенные часы стоят, показывая время 10 часов 10 минут. Поскольку Винни не знал точного времени, он завёл часы, не переводя стрелок. Когда Винни Пух пришёл к Пятачку, он увидел, что часы в доме Пятачка показывали время 14 часов 30 минут. Винни ушёл от Пятачка в 15 часов 10 минут. Когда Винни вернулся домой, его часы показывали 14 часов 20 минут. Увидев это, Винни Пух сразу же выставил на своих часах точное время. Какое время он выставил на своих часах?

3. Кубик составили из двух частей, имеющих разную плотность (см. рис. 1). Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объёма кубика, но четвёртую часть его массы. Найдите плотность второй части кубика.

Рис. 1

4. Нечестный спортсмен при подготовке к Олимпийским играм принимал допинг, который позволял достигать очень высокой скорости, но при медленном разгоне. В результате спортсмен бежал дистанцию $l = 100$ м по следующему графику: в начале каждой следующей секунды он мгновенно увеличивал свою скорость на величину $\Delta v = 1{,}8$ м/с (до начала первой секунды его скорость была нулевой). На какое время обгонит или отстанет этот спортсмен от своих конкурентов, которые бегут с постоянной скоростью $v = 10$ м/с?

5. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены в самом низу тонкой трубкой, перекрытой краном (рис. 2). Вторая узкая трубка соединяет сосуды на высоте h. В сосуды налиты жидкость плотности ρ в одно колено и жидкость плотности 6ρ в другое, причём высота слоя жидкости с плотностью ρ равна h,

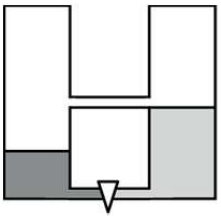


Рис. 2

высота слоя жидкости с плотностью 6ρ равна $h/2$. Кран открывают. Найти высоту столба лёгкой жидкости в том сосуде, где первоначально была только тяжёлая жидкость.

8 класс

1. Тело составлено из трёх частей одинакового объёма, но с разными плотностями, которые относятся друг к другу как $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 1:2:4$. Удельные теплоёмкости этих частей также различны и относятся друг к другу как $c_1 : c_2 : c_3 = 3:2:1$. Найти среднюю удельную теплоёмкость тела, если большая из удельных теплоёмкостей его частей равна c.

2. Задача 3 из задания для 7-го класса.

3. Задача 5 из задания для 7-го класса.

4. Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры – один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рис. 3. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на другом конце коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?

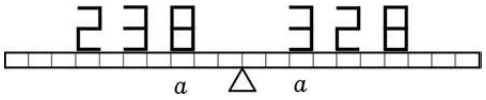


Рис. 3

5. Имеется прямоугольник 1234, изготовленный из металлических стержней одинакового материала и одинакового сечения (рис. 4), причём длины сторон прямоугольника относятся как «1–2»:«1–4»=1:2. Вершины 2 и 4 связаны таким же (но кривым) стержнем с длиной, втрое большей длины стержня 1–2. Температуры вершин 1 и 3 поддерживаются постоянными и равными

$$t_1 = 100\ ^\circ\text{C},\ t_3 = 0\ ^\circ\text{C}.$$

Найти температуры вершин 2 и 4.

Считать, что боковые поверхности стержней теплоизолированы.

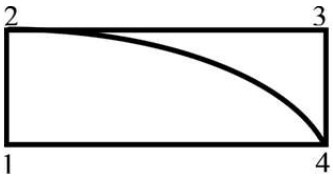


Рис. 4

Указание. Тепловой поток между точками, температуры которых поддерживаются постоянными, пропорционален разности температур точек, обратно пропорционален расстоянию между ними и коэффициенту теплопроводности среды между ними (закон Фурье).

9 класс

1. Задача 3 из задания для 7-го класса.

2. Задача 4 из задания для 8-го класса.

3. В калориметр налита вода комнатной температуры $t_1 = 20\ ^\circ\text{C}$. Объём воды составляет половину объёма

калориметра. Когда в калориметр доливают столько же воды, имеющей температуру $t_2 = 30$ °C, в нём устанавливается температура $t_0 = 24$ °C. Другой точно такой же калориметр, находящийся при комнатной температуре, содержит воду, объём которой составляет одну треть объёма калориметра. Какая установится температура в этом калориметре, если его доверху заполнить водой с температурой t_2? Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

4. Минутная стрелка часов в 2 раза длиннее часовой. В некоторый момент времени стрелки совпали. Через какое время после этого конец часовой стрелки будет удаляться от конца минутной с максимальной скоростью?

5. Тело начинает движение из состояния покоя с ускорением a_0 и далее движется прямолинейно. Из-за действия силы сопротивления воздуха ускорение тела уменьшается с увеличением его скорости v по закону $a = a_0 v_0 / (v + v_0)$, где v_0 – известная постоянная. Через какое время скорость тела достигнет значения $2v_0$?

10 класс

1. К батарее с ЭДС ε и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями (рис. 5). Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, а показания вольтметра в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.

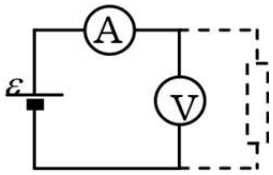


Рис. 5

2. Задача 4 из задания для 8-го класса

3. Задача 5 из задания для 8-го класса.

4. Задача 4 из задания для 9-го класса.

5. Буй составлен из двух одинаковых металлических конусов с высотой $h = 1$ м и углом при вершине $\alpha = 20°$ (см. рис. 6). Буй плавает в воде в вертикальном положении, погрузившись в воду до половины. Через щели внутрь буя просачивается вода, выходит воздух, и буй медленно погружается в воду. Будет ли меняться разность уровней воды внутри и снаружи буя в процессе его погружения в воду? Найти разность уровней воды внутри и снаружи буя в тот момент времени, когда она будет минимальной. Толщиной стенок буя пренебречь.

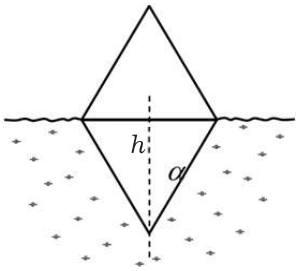


Рис. 6

Указание. Объём прямого кругового конуса определяется соотношением $V=(1/3)\pi R^2 h$, где R – радиус основания конуса, h – его высота.

11 класс

1. Вырезанный из листа фанеры плоский прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся друг другу, как 1:2, подвешен шарнирно за вершину меньшего острого угла к горизонтальному потолку. Треугольник удерживают так, что его длинный катет горизонтален (см. рис. 7). Какую минимальную силу нужно приложить к треугольнику для этого? Масса треугольника m.

Рис. 7

2. Задача 1 из задания для 10-го класса.

3. Задача 5 из задания для 9-го класса.

4. В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью сечения S и длиной h находится очень лёгкий подвижный поршень, к которому с помощью длинного стержня прикреплена лёгкая чашка (рис. 8). В отсеках, на которые поршень делит сосуд, находится по одному молю идеального одноатомного газа под давлением p_0, а поршень в равновесии делит сосуд на равные части. На чашку кладут тело массой m, и поршень после нескольких колебаний приходит в новое положение равновесия. Найти смещение поршня относительно первоначального положения. Сосуд теплоизолирован, поршень хорошо проводит тепло, теплоёмкостью поршня и сосуда пренебречь. Каким будет смещение поршня при $m \to \infty$ и почему?

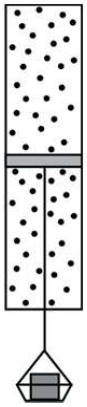


Рис. 8

5. Индуктивность замкнутого квадратного витка, сделанного из тонкой проволоки, равна L (рис. 9 *а*). Если рядом с этим витком перпендикулярно его плоскости и без электрического контакта с ним расположить точно такой же по размеру, но сверхпроводящий виток (так, что они образуют соседние грани куба), то индуктивность первого витка станет равна L_1 (рис. 9 *б*). Какой будет индуктивность витка, если сверхпроводящий виток расположить параллельно его плоскости так, что они образуют с первым противоположные грани куба (см. рис. 9 *в*)?

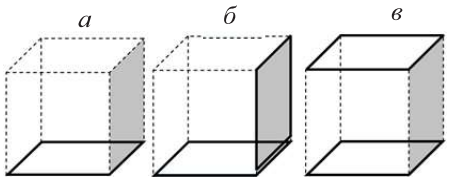


Рис.9

Ответы и решения

7 класс

1. $P_3 = \frac{3P_1 + P_2}{4} = 21$ Н.

2. Пусть время, которое показывают часы Пуха, равно t_1 (10 часов 10 минут), время, которое он увидел, придя к Пятачку, – t_2 (14 часов 30 минут), время, когда он ушёл от Пятачка, – t_3 (15 часов 10 минут), время на часах Пуха, когда он вернулся домой, – t_4 (14 часов 20 минут). Путешествие заняло время $t_4 - t_1$. Из них $t_3 - t_2$ он провёл у Пятачка. Следовательно, на дорогу в каждый конец он затратил

$$\tau = \frac{1}{2}\left(t_4 - t_1 - \left(t_3 - t_2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t_4 - t_1 - t_3 + t_2\right) = 1 \text{ час } 45 \text{ мин.}$$

Поэтому в тот момент, когда часы Пуха показывали $t_1 = 10:10$, точное время составляло $t_2 - \tau = 12:45$.

А значит, часы Пуха нужно перевести на 2 часа 35 минут вперёд. То есть когда часы Пуха показывали 14:20, точное время составляло 16:55.

3. Пусть объём всего кубика V, а плотность его второй части ρ_2. Тогда из условия имеем

$$\rho_1 \frac{V}{3} + \rho_2 \frac{2V}{3} = 4\rho_1 \frac{V}{3}.$$

Решая это уравнение относительно ρ_2, получаем

$$\rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1.$$

4. Нечестный спортсмен отстанет от конкурентов на время $t_1 = 0{,}05$ с.

5. Давление около дна сосуда с тяжёлой жидкостью $(p = 6\rho gh/2 = 3\rho gh)$ больше давления около дна в сосуде с лёгкой жидкостью ($p_1 = \rho gh$). Поэтому при открывании крана тяжёлая жидкость по нижней трубке будет перетекать в сосуд, в котором первоначально была лёгкая жидкость, которая, в свою очередь, по верхней трубке будет перетекать в сосуд с тяжёлой жидкостью. Процесс перетекания будет происходить до тех пор, пока не выровняются давления около дна в левом и правом сосудах. Пусть к этому моменту в сосуд с лёгкой жидкостью перетечёт столб тяжёлой жидкости высотой x. Тогда точно такой же столб лёгкой жидкости перетечёт по верхней трубке в сосуд с тяжёлой жидкостью, и условие равновесия жидкости в сосуде даёт

$$6\rho g\left(h/2 - x\right) + \rho gx = 6\rho gx + \rho g\left(h - x\right).$$

Отсюда

$$x = \frac{h}{5}.$$

8 класс

1. $c_{\text{ср}} = \frac{c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3} = \frac{11c}{21}.$

2. Задача 3 из задания для 7-го класса.

3. Задача 5 из задания для 7-го класса.

4. Посчитаем моменты сил, действующих на правое и левое плечи коромысла.

1) «Двойка» (слева) и «восьмёрка» (справа). У «восьмёрки» есть два лишних стержня, расположенных на расстояниях $6a$ и $7a$ относительно опоры. Значит, для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{\text{прав}} = 6amg + 7amg = 13amg.$$

2) «Тройка» (слева) и «двойка» (справа). У «двойки» есть лишний стержень на расстоянии $5a$ от опоры и не хватает стержня на расстоянии $4a$ от опоры. Следовательно, избыточный момент, действующий на правое плечо коромысла весов, есть $\Delta M_{\text{прав}} = 13amg + 5amg - 4amg = 14amg.$

3) «Восьмёрка» (слева) и «тройка» справа. У восьмёрки есть два лишних стержня на расстоянии $2a$ от опоры. Поэтому для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{\text{прав}} = 14amg - 4amg = 10amg.$$

Следовательно, число 328 справа от опоры перевесит. Поскольку восстанавливающий равновесие весов груз нужно положить на самый конец левого колена коромысла (плечо $10a$), для его массы m_0 имеем

$$10am_0g = 10amg,$$

откуда находим

$$m_0 = m.$$

5. В равновесном состоянии (когда температуры всех точек не меняются) тепловой поток по стержню 1–2 равен сумме тепловых потоков по стержням 2–3 и 2–4. Поэтому из закона Фурье имеем

$$\frac{t_1 - t_2}{l} = \frac{t_2 - t_3}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l},$$

где l – длина стержня 1–2.

Отсюда

$$6t_1 + 3t_3 = 11t_2 - 2t_4. \qquad (1)$$

Тепловой поток по стержню 4–3 равен сумме тепловых потоков по стержням 2–4 и 1–4. Поэтому

$$\frac{t_4 - t_3}{l} = \frac{t_1 - t_4}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l},$$

откуда

$$3t_1 + 6t_3 = -2t_2 + 11t_4. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1)–(2), получим

$$t_2 = \frac{72t_1 + 45t_3}{117} = 61{,}5\ ^\circ\text{C},$$

$$t_4 = \frac{45t_1 + 72t_3}{117} = 38{,}5\ ^\circ\text{C}.$$

9 класс

1. Задача 3 из задания для 7-го класса.

2. Задача 4 из задания для 8-го класса.

3. В калориметре установится температура $t_x = \dfrac{7t_1 + 8t_2}{15} = 25{,}3\ ^\circ\text{C}.$

4. Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вместе с минутной стрелкой. В ней часовая стрелка вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}$, где $\omega_{\text{мин}}$ и $\omega_{\text{час}}$ – угловые скорости минутной и часовой стрелок, и, следовательно, её конец движется с постоянной по величине скоростью. Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной тогда, когда вектор скорости часовой стрелки направлен вдоль прямой, соединяющей концы стрелок (см. рис. 10).

Поэтому в этот момент прямая, проведённая из конца минутной стрелки к концу часовой, является касательной к окружности, по которой движется конец часовой стрелки.

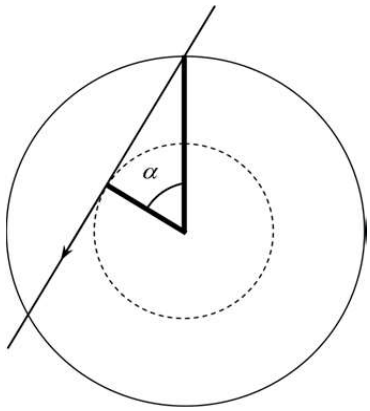


Рис. 10

А поскольку длина часовой стрелки вдвое меньше длины минутной, угол между стрелками составляет $\alpha = 60°$. Поскольку этот угол составляет шестую часть полного угла, стрелка пройдёт его за шестую часть времени, за которое она совершает полный оборот вокруг минутной стрелки, которое, в свою очередь, равно

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}} = \frac{60 \cdot 12}{11} = 65{,}5 \text{ мин.}$$

Здесь учтено, что

$$\omega_{\text{мин}} = 2\pi / 60 \text{ мин}^{-1},$$

$$\omega_{\text{мин}} = 2\pi / (12 \cdot 60) \text{ мин}^{-1}.$$

Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной через 1/6 часть этого времени, т.е. через

$$\Delta t = \frac{2\pi / 6}{\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}} = \frac{60 \cdot 12}{11 \cdot 6} = 10{,}9 \text{ мин.}$$

5. Из определения ускорения следует, что изменение скорости Δv за малый интервал времени и величина этого интервала Δt связаны соотношением

$$\frac{\Delta v}{a} = \Delta t.$$

Разбивая полное время движения на малые интервалы и суммируя их, получим

$$\sum_n \frac{\Delta v_n}{a_n} = \sum_n \Delta t_n,$$

где v_n – значение скорости внутри n–го интервала времени Δt_n, a_n – ускорение тела внутри этого интервала времени. Подставляя в эту формулу зависимость ускорения от скорости, найдём

$$\frac{1}{a_0 v_0} \sum_n \Delta v_n \left(v_n + v_0 \right) = \sum_n \Delta t_n.$$

Сумма в правой части дает значение времени τ в тот момент, когда скорость станет равна $2v_0$. Графический образ суммы в левой части есть площадь под графиком функции $f(v) = v + v_0$ (ср. с вычислением работы переменной силы). Вычисляя эту площадь (см. рис. 11), окончательно получим

$$\tau = \frac{4v_0}{a_0}.$$

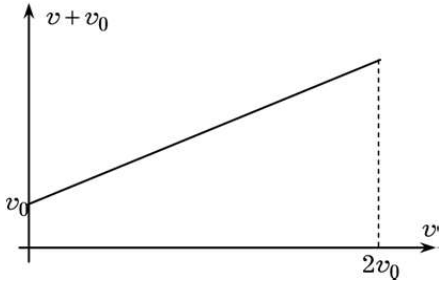


Рис. 11

10 класс

1. По закону Ома для замкнутой цепи имеем в первом случае для тока через амперметр

$$I = \frac{\varepsilon}{r + r_A + r_V},$$

где r – внутреннее сопротивление источника, r_A – сопротивление амперметра, r_V – сопротивление вольтметра. Отсюда находим напряжение на вольтметре

$$U_V = Ir_V = \frac{\varepsilon r_V}{r + r_A + r_V} = \varepsilon - I(r + r_A). \quad (1)$$

Аналогично находим, что когда параллельно вольтметру подключают сопротивление R, напряжение на вольтметре будет равно

$$U'_V = \varepsilon - I'(r + r_A)$$

(I' – ток через амперметр). Поскольку показания амперметра увеличиваются вдвое ($I' = 2I$), а показания вольтметра вдвое уменьшаются ($U'_V = U_V / 2$), имеем

$$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2I(r + r_A). \quad (2)$$

Выражая теперь величину $I(r + r_A)$ из формулы (1) и подставляя её в формулу (2), получим

$$U_V = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

2. Задача 4 из задания для 8-го класса

3. Задача 5 из задания для 8-го класса.

4. Задача 4 из задания для 9-го класса.

5. Пусть в буй просочилась вода, и он погрузился на некоторую глубину (рис. 12). В равновесии сила тяжести равна силе Архимеда. Поэтому

$$(M + m)g = \rho g V_{\text{п.ч.}},$$

где M – масса буя, m – масса воды в буе, ρ – плотность воды, $V_{\text{п.ч.}}$ – объём погружённой в воду части буя. С другой стороны, объём погружённой в воду части буя складывается из объёма $V_{\text{п.ч.с.в.}}$ его погружённой части, заполненной водой, и объёма $V_{\text{п.ч.б.в.}}$ его погружённой части без воды. Поэтому

$$(M + m)g = \rho g(V_{\text{п.ч.с.в.}} + V_{\text{п.ч.б.в.}}).$$

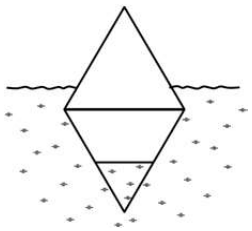


Рис. 12

Но если пренебречь толщиной стенок, то, очевидно, $m = \rho V_{\text{п.ч.с.в.}}$. Поэтому условие равновесия буя даёт

$$M = \rho V_{\text{п.ч.б.в.}}.$$

Из этой формулы следует, что объём его подводной части, не заполненной водой, определяется только массой самого буя, т.е. не меняется в процессе его погружения в воду из-за наполнения водой. А поскольку ширина центральной части буя больше ширины его концов, расстояние между уровнем воды внутри буя и уровнем воды в водоёме будет максимальным, когда максимальна ширина части буя, расположенной между этими уровнями. То есть это расстояние будет минимально, если расстояния от середины буя до уровня воды внутри буя и уровня воды в водоёме будут одинаковы (на рис. 13 эти расстояния обозначены буквой x). Найдём эти расстояния.

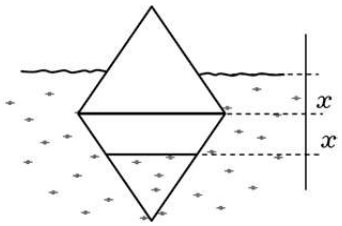


Рис. 13

Из условия равновесия буя без воды (учитывая, что он погружается в воду ровно наполовину) имеем

$$M = \rho V_{\text{п.ч.б.в.}} = \rho \frac{1}{3}\pi R^2 h = \rho \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha,$$

где R – радиус самой широкой части буя. Если буй заполнен водой слоем высотой h_1, то объём незаполненной водой части буя от его средней части до уровня воды внутри буя будет равен

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(h^3 - h_1^3\right)\operatorname{tg}^2\alpha. \qquad (1)$$

Поскольку в случае минимального расстояния между уровнями воды внутри буя и в водоёме расстояния от средней части буя до уровней воды внутри буя и в водоёме одинаковы, объём незаполненной водой подводной части буя равен удвоенному объёму (1) и равен объёму половины буя. Поэтому

$$\frac{2}{3}\pi\left(h^3 - h_1^3\right)\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Отсюда находим

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = h - h_1 = \frac{h\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\sqrt[3]{2}}.$$

А минимальное расстояние между уровнями воды внутри буя и в водоёме равно

$$\Delta h_{\min} = 2\left(h - h_1\right) = \frac{2h\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\sqrt[3]{2}} = 0{,}41h = 0{,}41\text{м}.$$

От угла при вершине буя ответ не зависит.

11 класс

1. В равновесии момент искомой силы $\vec{F}$ относительно шарнира равен моменту силы тяжести. Поэтому сила F будет минимальна, если будет максимальным её плечо относительно шарнира. Следовательно, внешнюю силу нужно приложить к точке, максимально удалённой от шарнира, и направить перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с шарниром. То есть внешняя сила $\vec{F}$ должна быть приложена к вершине того угла треугольника, который равен $\pi/2 - \alpha$, и направлена перпендикулярно гипотенузе треугольника (см. рис. 14).

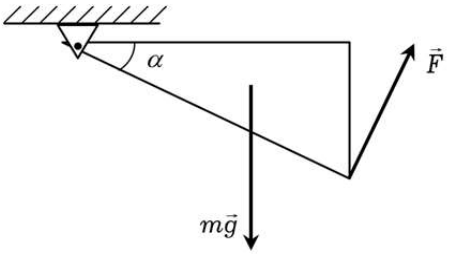


Рис. 14

Найдём моменты всех сил. Пусть длина меньшего катета треугольника равна a. Тогда длина большего катета $2a$, а длина гипотенузы $\sqrt{5}a$. Поэтому момент силы $\vec{F}$ относительно шарнира равен $M_F = \sqrt{5}Fa$. Найдём момент силы тяжести. Центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан. А поскольку точка пересечения медиан делит каждую медиану на ча-

сти, относящиеся друг к другу, как 2:1, плечо силы тяжести относительно шарнира равно двум третьим частям его горизонтального катета. Поэтому

$$M_{mg} = (2/3)mg2a = (4/3)mga.$$

Следовательно, условие равенства моментов силы тяжести и силы $\vec{F}$ даёт

$$\sqrt{5}Fa = \frac{4}{3}mga.$$

Отсюда находим

$$F = \frac{4}{3\sqrt{5}}mg.$$

2. Задача 1 из задания для 10-го класса.

3. Задача 5 из задания для 9-го класса.

4. Поскольку поршень хорошо проводит тепло, можно считать, что температура газа в отсеках одинакова. После того, как на чашку положили тело и тело вместе с поршнем опустилось вниз, потенциальная энергия тела перешла во внутреннюю энергию газа. Поэтому если поршень опустился на величину Δx вниз, закон сохранения энергии дает

$$mg\Delta x = \frac{3}{2}p_{\text{в}}S(l+\Delta x) + \frac{3}{2}p_{\text{н}}S(l-\Delta x) - \frac{3}{2}2p_0Sl, \quad (1)$$

где $2l$ – длина сосуда, $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{в}}$ – давления газа в нижней и верхней частях сосуда соответственно. С другой стороны, из условия равновесия поршня имеем

$$mg = (p_{\text{н}} - p_{\text{в}})S. \quad (2)$$

Кроме того, внутренние энергии газа над и под поршнем равны. Поэтому

$$p_{\text{в}}(l+\Delta x) = p_{\text{н}}(l-\Delta x). \quad (3)$$

Исключая из системы уравнений (1)–(3) давления газа, получим уравнение относительно Δx:

$$5mg\Delta x^2 + 6p_0Sl\Delta x - 3mgl^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \left(\frac{\sqrt{9p_0^2S^2 + 15m^2g^2} - 3p_0S}{5mg}\right)l.$$

При $m \to \infty$ поршень не ляжет на дно сосуда, даже несмотря на бесконечную силу тяжести. Это связано с тем, что при большой массе груза даже небольшое его смещение приводит к высвобождению большой потенциальной энергии и, соответственно, сильному нагреванию газа в сосуде, возрастанию его давления и увеличению разности давлений между нижним и верхним газами. Пренебрегая в случае большой массы величиной p_0S по сравнению с mg, получим $\Delta x = \sqrt{\frac{3}{5}}l.$

5. Пропустим через первый виток ток I. Тогда поток магнитного поля через него будет равен

$$\Phi = LI, \quad (1)$$

где L – его индуктивность. Поскольку магнитных зарядов не существует, суммарный поток через любую замкнутую поверхность (и, в частности, через куб, для которого рассматриваемый виток является одной гранью) будет равен нулю. Поэтому

$$\Phi = 4\Phi_{12} + \Phi_{16}, \quad (2)$$

где Φ_{12} – поток магнитного поля через соседнюю грань куба, Φ_{16} – поток магнитного поля через противоположную грань. Магнитный поток через сверхпроводящий виток должен быть равен нулю, поэтому при внесении его в магнитное поле в нём индуцируется такой ток I_1, который со-

здаёт точно такой же (но противоположный) поток через самого себя. Очевидно, ток I_1 создаёт магнитный поток через соседний виток, который во столько же раз меньше потока Φ, во сколько раз ток I_1 меньше тока I. Поэтому поток магнитного поля через основной виток при поднесении к нему сверхпроводящего витка будет равен

$$\Phi - \frac{I_1}{I}\Phi_{12} = \Phi - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi^2}\right). \quad (3)$$

С другой стороны, этот поток по определению равен $L_1 I$. Отсюда получаем

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi} = \sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}. \quad (4)$$

В результате из формулы (2) находим

$$\Phi_{16} = \Phi\left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right). \quad (5)$$

Если теперь мы уберём боковой виток и разместим сверхпроводящий виток на противоположной грани куба, то в нём возникнет такой ток I_2, который, с одной стороны, будет компенсировать магнитный поток Φ_{16} основного тока через самого себя, а, с другой стороны, создаст поток через основной виток, во столько же раз меньший потока Φ_{16}, во сколько ток I_2 меньше тока I. Поэтому поток магнитного поля через основной виток в этом случае равен

$$\Phi_2 = \Phi - \frac{I_2}{I}\Phi_{16} = \Phi - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi^2}\right).$$

Но этот поток по определению равен $L_2 I$, где L_2 – индуктивность основного витка в присутствии сверхпроводящего витка на противоположной грани. Поэтому из предыдущей формулы получаем

$$L_2 = L\left(1 - \left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right)^2\right).$$

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Блиц-ответы

– Какие бывают метеориты?
– Каменные, железные и железобетонные.

– У вас есть в продаже совсем дешёвые вешалки для одежды?
– Есть. Гвозди.

– Какие световые лучи называют инфракрасными?
– Невидимые лучи красного цвета.

– Какое свойство характерно для гамма-лучей?
– Большая проницательность.