12+

ISSN 1814-6422

Sapere Aude – Дерзай знать!

ПОТЕНЦИАЛ

Ежемесячный журнал для старшеклассников и учителей

№10, 2017

МАТЕМАТИКА ФИЗИКА ИНФОРМАТИКА

Предшественник

Полёт тел в стратосфере (Дальнобойная артиллерия)

Тройка, семёрка, туз…, или ЕГЭ уж близится…

Huawei Honor Cup 2017

Олимпиада школьников «Росатом» 2017 – 2018 (отборочный тур)

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» 2017 – 2018 учебного года

Отборочный тур по физике

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) более 30 лет с целью выявления одарённых школьников, ориентированных на инженерно-технические специальности, способных к техническому творчеству и инновационному мышлению и проявляющих интерес к вопросам науки, техники и высоких технологий.

Каждый год в олимпиаде «Росатом» принимают участие более 20 тысяч школьников из 60 – 65 субъектов Российской Федерации и всех федеральных округов (в сумме по математике и физике и по всем классам). Несколько тысяч участвуют в заключительном этапе, победителями и призерами становятся около 500 – 600 участников.

Олимпиада «Росатом» входит в Перечень олимпиад школьников 2017 – 2018 учебного года (математика – 2 уровень, физика – 1 уровень), поэтому её победители и призёры могут получить значительные льготы при зачислении в вузы, в которых в качестве вступительных испытаний есть математика или физика. Ежегодно в НИЯУ МИФИ поступает около 40 – 50% победителей и призёров олимпиады «Росатом», ещё столько же поступает победителей и призёров других олимпиад школьников, обеспечивая около 35% бюджетного набора в университет.

Ниже приведены задания отборочного тура олимпиады «Росатом» 2017 – 2018 учебного года по физике для школьников 11 класса.

Задание

1. К цепи, схема которой представлена на рис. 1, приложено электрическое напряжение. Известно, что мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна P. Какая мощность выделяется на сопротивлении $2R$? Величины всех сопротивлений даны на рисунке.

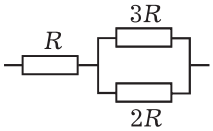

Рис. 1

2. В цилиндрическом сосуде длиной l находятся 2 подвижных теплонепроницаемых поршня, делящих сосуд на 3 отсека. Первоначально температура газа во всех отсеках была равна T, объёмы отсеков одинаковы (рис. 2). Затем температуру газа в среднем и левом отсеках увеличивают вдвое, температуру газа в правом отсеке поддерживают равной T. На сколько сместится при этом левый поршень?

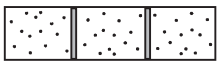

Рис. 2

3. Имеется наклонная плоскость, угол наклона которой можно менять, поднимая или опуская упор, который может перемещаться только по вертикали, благодаря направляющим. Тело начинает соскальзывать по этой наклонной плоскости из точки, расположенной точно над этим упором (см. рис. 3). Коэффициент трения между телом и плоскостью μ.

При каком угле наклона плоскости α время соскальзывания будет минимальным?

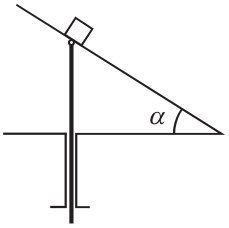

Рис. 3

4. На краю полусферической чаши радиуса R закреплена невесомая нить длиной $R/2$ (в точке A), ко второму концу которой прикреплено маленькое тело. Тело удерживают на краю ямы так, что нить натянута (рис. 4). В некоторый момент времени тело отпускают. Найти скорость и ускорение тела в тот момент, когда оно будет проходить нижнюю точку своей траектории.

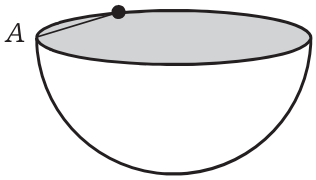

Рис. 4

5. Очень лёгкий обруч радиуса R удерживают на гладкой горизонтальной поверхности около вертикальной стены. К обручу прикреплено массивное тело, которое расположено так, как показано на рис. 5 ($\alpha = 45°$). Обруч отпускают. Достигнет ли тело горизонтальной поверхности, и если да, то на каком расстоянии от стены? Масса обруча много меньше массы тела, трение отсутствует.

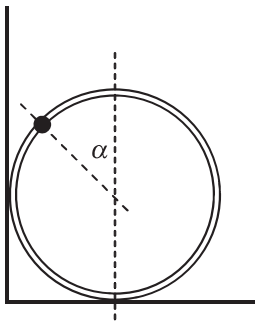

Рис. 5

Решения

1. Из закона Джоуля – Ленца находим ток, текущий через сопротивление R:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}}.$$

Далее этот ток на участке параллельного соединения делится в отношении 2:3 (2 – через резистор $3R$, 3 – через резистор $2R$). Поэтому

$$I_{2R} = \frac{3}{5}I, \qquad I_{3R} = \frac{2}{5}I.$$

Отсюда находим мощность, выделяемую на сопротивлении $2R$:

$$P_{2R} = I_{2R}^2 2R = \frac{18}{25}P.$$

2. Поскольку поршни подвижны, условие их равновесия заключается в равенстве давлений газов в каждом отсеке сосуда. Поэтому из условия равновесия поршней в начальном состоянии и закона Клапейрона – Менделеева заключаем, что количество вещества газа в каждом отсеке одинаково.

При нагревании газов в среднем и левом отсеках увеличатся их давления и поршни переместятся вправо. Поскольку после нагревания температуры газа в среднем и левом отсеках будут одинаковы, одинаковыми должны быть и объёмы этих отсеков. Поэтому если правый поршень сместился вправо на величину Δx, то левый сместится на $\Delta x/2$. При этом увеличение объёмов среднего и левого отсеков будет равно $\Delta V = S\Delta x/2$, а уменьшение объёма правого отсека $\Delta V = S\Delta x$. Поэтому закон Клапейрона – Менделеева для газа в среднем или левом и правом отсеках при условии равенства давлений газа в них даёт

$$\begin{aligned} p\left(\frac{l}{3}S + \frac{\Delta x}{2}S\right) &= \nu R 2T, \\ p\left(\frac{l}{3}S - \Delta x S\right) &= \nu R T, \end{aligned} \qquad (1)$$

где p – давление газа в отсеках в конечном состоянии, γ – количество вещества газа в отсеках. Деля уравнения (1) друг на друга и решая уравнение относительно Δx, получим

$$\Delta x = \frac{2}{15} l.$$

И, следовательно, смещение левого поршня равно

$$\Delta x_{\text{лев}} = \frac{1}{15} l.$$

3. Пусть расстояние от основания плоскости до упора равно x. Тогда длина плоскости (от шарнира до основания) равна $x/\cos\alpha$. Ускорение тела при движении по плоскости равно

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Тогда квадрат времени соскальзывания тела с наклонной плоскости будет равен

$$t^2 = \frac{2x}{g\left(\cos\alpha\sin\alpha - \mu\cos^2\alpha\right)}. \qquad (2)$$

Величина (2) минимальна, когда максимален знаменатель формулы (2). Дифференцируя его по α, получим

$$-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\mu\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Отсюда находим угол, для которого время соскальзывания тела минимально:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}(\mu) = \operatorname{arctg}\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right).$$

4. Докажем, что тело движется в вертикальной плоскости. С одной стороны, оно находится на поверхности сферы радиуса R, и, следовательно, его координаты связаны соотношением (уравнением сферы, оси координат показаны на рис. 6):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (3)$$

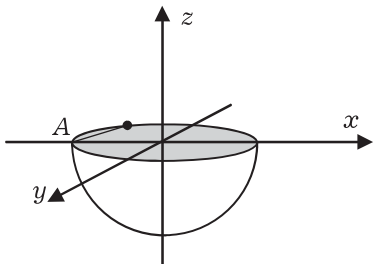

Рис. 6

С другой стороны, тело в любой момент времени находится на расстоянии $R/2$ от точки A. Поэтому его координаты должны также принадлежать сфере с радиусом $R/2$ и центром в точке A (x-координата которой в нашей системе координат равна $x = -R$):

$$(x+R)^2 + y^2 + z^2 = (R/2)^2. \qquad (4)$$

Вычитая формулу (4) из формулы (3), получим

$$x = -\frac{7R}{8}.$$

Это означает, что тело движется так, что его x-координата остаётся постоянной, т.е. тело движется в плоскости, перпендикулярной оси x. А поскольку сечение сферы любой плоскостью есть окружность, то тело движется в вертикальной плоскости по окружности. Радиус этой окружности найдём по теореме Пифагора:

$$r = \sqrt{R^2 - (7R/8)^2} = \frac{\sqrt{15}R}{8}.$$

Ускорение тела в нижней точке траектории направлено к центру окружности (т.е. вертикально вверх) и равно v^2/r, где v – скорость тела, r – радиус окружности. Скорость тела в нижней точке траектории найдем по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mg\frac{\sqrt{15}R}{8} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{\sqrt{15}gR}{4}.$$

Отсюда находим ускорение тела

$$a = \frac{v^2}{r} = 2g.$$

5. Рассмотрим сначала движение обруча. Когда он не касается боковой стенки, на него действуют только сила реакции пола (которая является вертикальной из-за отсутствия трения) и сила со стороны тела. Но поскольку масса обруча равна нулю, сумма этих сил и сумма их моментов относительно любой точки должна быть равна нулю. Этого можно добиться, если только обе силы реакции нулевые (в противном случае момент силы реакции пола относительно тела был бы не равен нулю и, следовательно, сообщал обручу бесконечное угловое ускорение). Поэтому обруч не действует на тело, и, следовательно, тело падает вертикально вниз с ускорением свободного падения и «заставляет» двигаться обруч бесконечно малой силой.

Определим теперь, как движется обруч. Рассмотрим сначала участок траектории тела от его начальной точки до середины обруча. С одной стороны, его скорость $\vec{v}$ направлена вертикально вниз, с другой стороны, складывается из скорости центра обруча $\vec{V}_c$ (которая направлена горизонтально) и его скорости относительно центра $\vec{v}_0$ (которая направлена по касательной к обручу против часовой стрелки):

$$\vec{v} = \vec{V}_c + \vec{v}_0. \qquad (5)$$

Треугольник сложения скоростей, отвечающий формуле (5) до того, как тело прошло середину обруча, показан на рис. 7, когда пройдёт – на рис. 8. Из этих рисунков видно, что до того, как тело пройдёт середину обруча, обруч движется направо, после этого – налево (на этих рисунках первоначальное положение обруча и тела показаны пунктиром и прозрачным кружком соответственно). При этом, когда тело дойдёт до точки, расположенной ниже середины обруча и в которой угол между радиусом и вертикалью равен $\alpha = 45°$, обруч вернётся в свое первоначальное положение около стенки (рис. 9). А поскольку в этом положении обруч движется налево (и еще вращается против часовой стрелки), произойдёт его столкновение со стенкой.

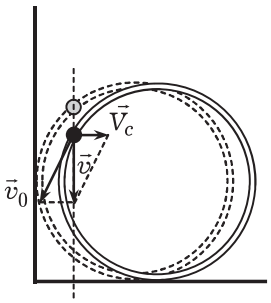

Рис. 7

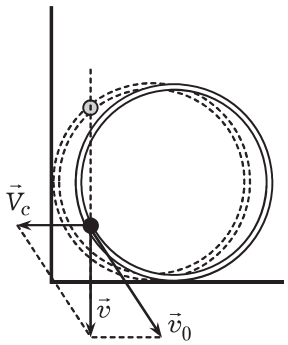

Рис. 8

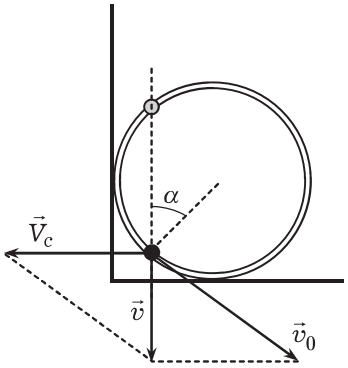

Рис. 9

В этот момент возникнет сила реакции со стороны стенки, момент которой относительно тела не равен нулю. Поэтому эта сила «закрутит» обруч относительно тела, и возникнет сила реакции со стороны пола, причём её величина будет в любой момент времени равна силе реакции стенки. Поэтому

импульсы этих сил за время взаимодействия будут одинаковы. А поскольку тело не может опускаться дальше, двигаясь вдоль той же прямой, его вертикальная скорость погасится, и возникнет точно такая же скорость, направленная горизонтально. В этот момент тело отскочит от стенки, имея ту же по величине горизонтальную скорость, какую оно имело до столкновения обруча со стенкой в вертикальном направлении. В этот же момент пропадут обе силы реакции, и тело снова будет двигаться с ускорением свободного падения. Т.е. фактически после того, как обруч отскочит от стенки, тело будет двигаться «под углом к горизонту» с горизонтальной начальной скоростью (рис. 10).

Найдём скорость тела v в этот момент. Скорость v находится по законам равноускоренного движения (или закону сохранения энергии).

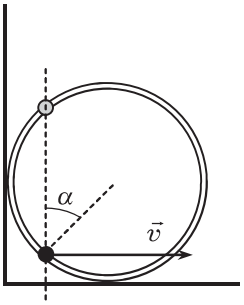

Рис. 10

Поскольку тело спустится на величину $\sqrt{2}R$, его скорость будет равна

$$v=\sqrt{2\sqrt{2}gR}.$$

Вернёмся теперь к движению тела. Поскольку сразу после удара тело находится на высоте $R-R/\sqrt{2}$, скорость направлена горизонтально, а ускорение равно g, то тело коснётся земли через интервал времени

$$t=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)R}{g}}.$$

И, следовательно, пролетит по горизонтали расстояние

$$S=vt=\sqrt{2\sqrt{2}gR}\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)R}{g}}=2R\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Чтобы найти расстояние от тела до стенки в этот момент, к расстоянию S нужно прибавить расстояние от тела до стенки в тот момент, когда обруч сталкивался со стенкой, т.е. $R-R/\sqrt{2}$. Поэтому расстояние от тела до стенки в тот момент, когда оно коснётся пола, равно

$$x=S+\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}R=R\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}+\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}\right).$$

Материал подготовили ***С.Е.Муравьев, В.И.Скрытный***
НИЯУ МИФИ