12+

ISSN 1814-6422

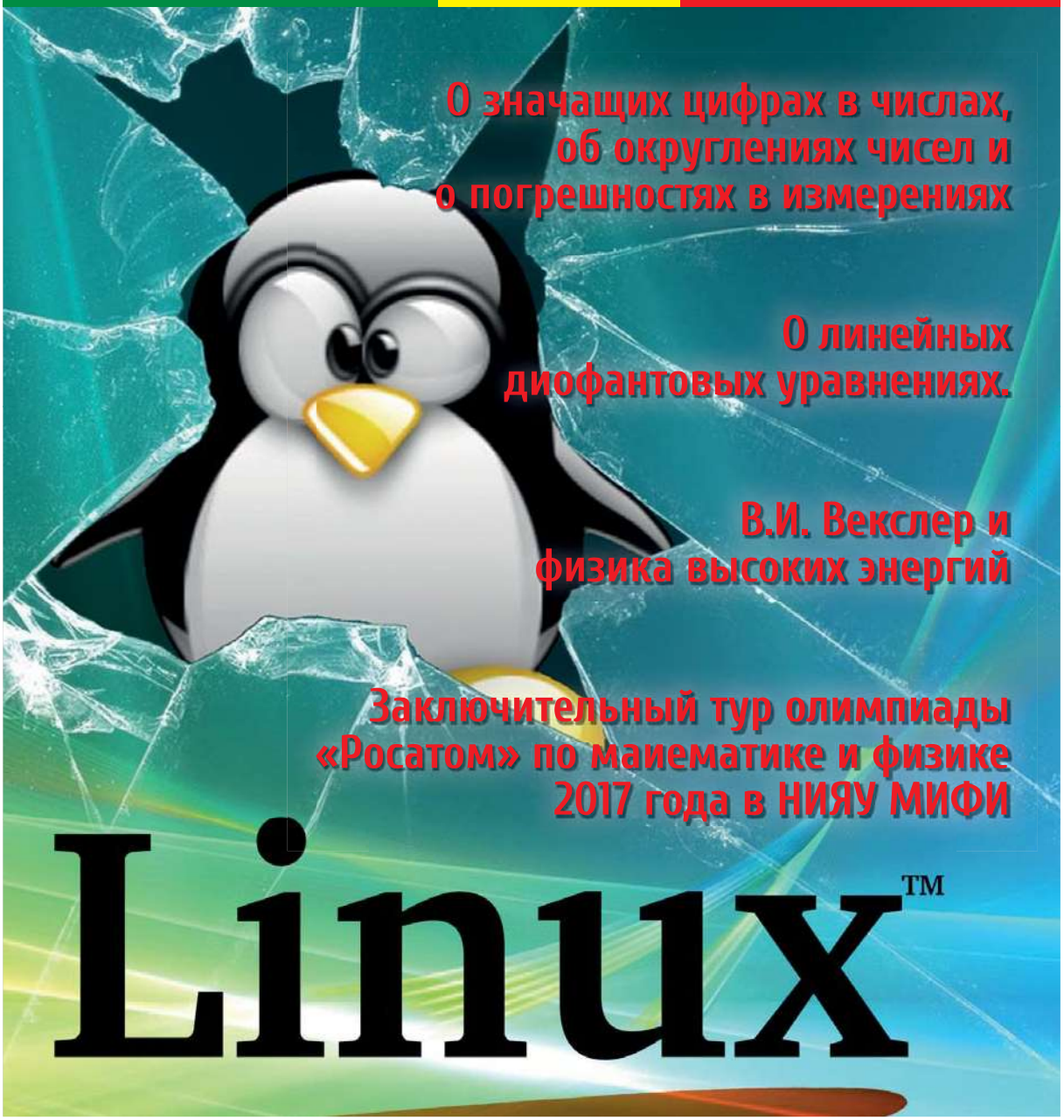
Sapere Aude – Дерзай знать!

ПОТЕНЦИАЛ

Ежемесячный журнал для старшеклассников и учителей

№06, 2017

МАТЕМАТИКА ФИЗИКА ИНФОРМАТИКА



О значащих цифрах в числах, об округлениях чисел и о погрешностях в измерениях

О линейных диофантовых уравнениях.

В.И. Векслер и физика высоких энергий

Заключительный тур олимпиады «Росатом» по маиематике и физике 2017 года в НИЯУ МИФИ

Linux™

Заключительный тур олимпиады «Росатом» по математике и физике 2017 года в НИЯУ МИФИ

В течение 2016 – 2017 учебного года Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» проводил традиционную физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада проводилась в несколько туров в Москве и на 36 региональных площадках в РФ, Армении, Казахстане, Киргизии. В олимпиаде приняли участие около 20 тысяч школьников. Ниже приводятся варианты заданий заключительного тура олимпиады «Росатом» по математике и физике для школьников 11 класса.

Математика, 11 класс, условия

1. Для каждой пары целых положительных чисел (m, n), связанных соотношением $3m+2n=19$, найти решение x уравнения $2^{r_n x}+r_m\cdot 2^x-8=0$, где r_k – остаток от деления k на 3.

2. Найти все x, для которых $\sin a_n x+\sin a_{n+1}x+\sin a_{n+2}x=0$ при всех n, где a_n – арифметическая прогрессия с разностью $d=\pi/10$ и первым членом $a_1=\pi/2$.

3. Сколько существует различных целых положительных двенадцатиразрядных чисел, делящихся на 9, в записи которых используется две цифры 3 и 4?

4. Случайно выбранное шестизначное целое положительное число оканчивается на 32. Найти вероятность того, что оно делится на 14.

5. При каких значениях a система $\begin{cases}2[x]-3[y]=7\\ 3x+2y=a\end{cases}$ имеет единственное решение? Здесь $[z]$ – целая часть числа z – наибольшее целое число, не превосходящее z.

6. Через ребро AB основания правильной четырёхугольной пирамиды $EABCD$ проведена плоскость P, пересекающая рёбра EC и ED в точках M и N соответственно. Плоскость P делит объём пирамиды в отношении $V_{EABMN}:V_{EABCD}=5:9$.

Найти отношение площадей полных поверхностей пирамид $S_{EABMN} : S_{EABCD}$, если боковые грани пирамиды $EABCD$ наклонены к плоскости основания $ABCD$ под углом $\alpha = \mathrm{arctg}5$.

Физика, 11 класс, условия

1. В электрической цепи, схема которой представлена на рис. 1, три одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к батарейке с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В. Два одинаковых вольтметра, подключённых так, как изображено на рис. 1, показывают напряжение $U = 3$ В. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.

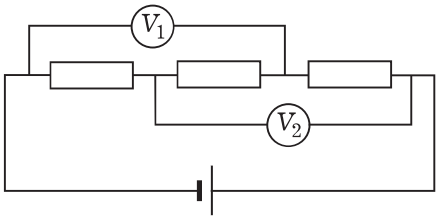


Рис. 1

2. В вертикальный цилиндрический сосуд с водой налили воду и закрыли сосуд очень лёгким подвижным поршнем. Первоначально воздух в сосуде сухой (не содержит паров воды) и имеет плотность $\rho_0 = 1$ кг/м^3 (рис. 2). Увеличится или уменьшится плотность влажного воздуха в сосуде, когда часть воды испарится? Насколько увеличится или уменьшится плотность воздуха в сосуде по сравнению с плотностью сухого воздуха через достаточно продолжительное время, когда вода перестанет испаряться? Температура воздуха постоянна в течение всего процесса. Давление насыщенных паров при рассматриваемой температуре составляет одну седьмую часть от атмосферного. Средняя молярная масса воздуха $\mu_0 = 29$ г/моль, молярная масса воды $\mu_1 = 18$ г/моль. Воздух считать идеальным газом.

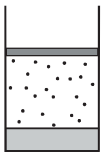


Рис. 2

3. В системе двух тел с массами m и $2m$, связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплен к потолку, и двух невесомых блоков (см. рис. 3), ускорения блоков известны и равны a и $2a$. Какими силами нужно для этого действовать на блоки?

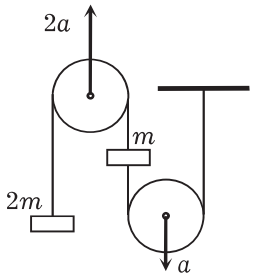


Рис. 3

4. Имеются четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которые налито некоторое количество воды. Поверх воды в первый, второй и третий сосуды (сосуды перенумерованы на рис. 4) аккуратно наливают слои масла толщиной соответственно h, $2h$ и $3h$. На сколько изменится уровень жидкости в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положени-

ем после установления равновесия? Известно, что при наливании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла ρ_0, воды ρ_1 ($\rho_1 > \rho_0$).

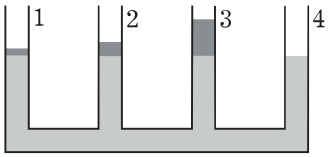


Рис. 4

5. На рисунке 5 изображён выпуклый четырёхугольник. Где нужно расположить тонкую собирающую линзу, и каким должно быть её фокусное расстояние, чтобы изображение четырёхугольника имело форму квадрата? Решить задачу графически и обосновать все сделанные построения на основе законов геометрической оптики (правильное построение без обоснования и комментариев не будет считаться решением задачи). Оценить по рисунку фокусное расстояние этой линзы, считая, что одна клеточка на рисунке равна 1 см.

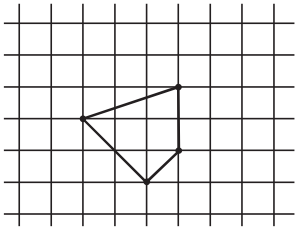


Рис. 5

Математика. Ответы и решения

1. Множество пар $(m,\ n)$ целых чисел, удовлетворяющих уравнению $3m+2n=19$, задаётся системой

$$\begin{cases} m=1-2t>0, \\ n=3t+8>0,\ t\in Z \end{cases}$$

с целочисленным параметром t. С учётом положительности m и n получим всего три допустимых значений параметра: $t=-2,-1,0$.

Случай 1. $t=-2$, тогда $m=5$, $n=2$, а $r_m=r_n=2$. Получаем уравнение $2^{2x}+2\cdot 2^x-8=0$. Это квадратное уравнение относительно 2^x, его корни: $2^x=-4$ и $2^x=2$. Уравнение $2^x=-4$ не имеет решений, а уравнение $2^x=2$ имеет решение $x=1$.

Случай 2. $t=-1$, тогда $m=3$, $n=5$, а $r_m=0$, $r_n=2$. Получаем уравнение $2^{2x}=8$. Оно имеет решение $x=1{,}5$.

Случай 3. $t=0$, тогда $m=1$, $n=8$, а $r_m=1$, $r_n=2$. Получаем уравнение $2^{2x}+2^x-8=0$. Это квадратное уравнение относительно 2^x, его корни: $2^x=\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$ и $2^x=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$. Уравнение $2^x=\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$ не имеет решений, а уравнение $2^x=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ имеет решение $x=\log_2\frac{\sqrt{33}-1}{2}$.

Ответ. 1) $x=1$ для $m=5$, $n=2$; 2) $x=1{,}5$ для $m=3$, $n=5$; 3) $x=\log_2(\sqrt{33}-1)-1$ для $m=1$, $n=8$.

2. Преобразуем левую часть уравнения с учётом того, что a_n – арифметическая прогрессия:

$$\sin a_n x+\sin a_{n+1}x+\sin a_{n+2}x=$$
$$=2\sin\frac{a_n+a_{n+2}}{2}\cos dx+\sin a_{n+1}x=$$
$$=2\sin a_{n+1}\cos dx+\sin a_{n+1}x.$$

В результате уравнение принимает вид: $\sin a_{n+1}x(2\cos dx+1)=0$.

Случай 1. $2\cos dx+1=0$. Решим это уравнение:

$$\cos\frac{\pi x}{10}=-\frac{1}{2}\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{10}=\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\\ \frac{\pi x}{10}=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{20(3k+1)}{3}\\ x=\frac{20(3k-1)}{3}\end{array}\right.\leftrightarrow x=\frac{20(3k\pm1)}{3}, k\in Z.$$

Полученные решения не зависят от n.

Случай 2. $\sin a_{n+1}x=0$. Это уравнение имеет решения: $x=\frac{\pi m}{a_{n+1}}$, $m\in Z$. Так как по условию $a_{n+1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{10}$, то $x=\frac{10m}{n+5}$, $m\in Z$. Эти решения не зависят от n только в том случае, если m кратно $n+5$, т.е. $m=(n+5)l$, $l\in Z$. Тогда $x=10l$, $l\in Z$.

Ответ. $x=\frac{20(3k\pm1)}{3}$, $x=10l$, k, $l\in Z$.

3. Пусть в записи числа используется k троек и m четвёрок, $m+k=12$, $m\geq1$, $k\geq1$. Тогда по признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна быть кратна 9: $3k+4m=9t$, $t\in N$. Подставляя $m=12-k$ в последнее уравнение, получим: $3k+48-4k=9t$, $t\in N$, или $k=48-9t$, $t\in N$. Найдём подходящие $t\in N$ из условия $1\leq k<12$:

$$\begin{cases}48-9t\geq1\\48-9t<12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\leq5\frac{1}{3}\\t>4\end{cases}.$$

Следовательно, $t=5$, а $k=3$.

Таким образом, в записи искомых чисел участвуют 3 тройки и 9 четвёрок. Надо разместить различными вариантами 3 тройки на имеющихся 12 позициях, остальные места займут четвёрки. Число таких вариантов $C_{12}^{3}=220$.

Ответ. $C_{12}^{3}=220$.

4. Найдём общий вид целого положительного числа A, которое оканчивается на 32 и делится на 14. Так как число A оканчивается на 32, то его можно записать в виде $A=100m+32$, $m\geq0$, $m\in Z$, а так как оно делится на 14, то $A=14k$, $k\in N$. Объединяя оба этих условия, приходим к уравнению $100m+32=14k$, $m\geq0$, $m\in Z$, $k\in N$. Перепишем его в виде $7k-50m=16$. Это линейное диофантово уравнение. Его общее решение есть сумма любого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения $7k-50m=0$. Подберём частное решение этого уравнения, например $\begin{cases}m=5\\k=38,\end{cases}$ и запишем общее решение соответствующего однородного уравнения $\begin{cases}m=7t\\k=50t\end{cases}$, $t\geq0$, $t\in Z$. Складывая эти решения, находим общее решение уравнения $7k-50m=16$: $\begin{cases}m=5+7t\\k=38+50t\end{cases}$, $t\in Z$. Подставляя $k=38+50t$ в формулу $A=14k$, $k\in N$, получим $A=700t+532$, $t\geq0$, $t\in Z$. Количество таких шестизначных чисел определяется неравенством $100000\leq700t+532\leq999999$, где $t\geq0$, $t\in Z$. Отсюда находим $t=143,144,...,1427$, всего 1285 чисел (число благоприятных событий). Общее число шестизначных чисел, оканчивающихся на 32, равно числу четырёхзначных чисел, т.е. 9000 (об-

щее число опытов). Следовательно, искомая вероятность

$$P(A)=\frac{1285}{9000}=\frac{257}{1800}.$$

Ответ. $P(A)=\frac{1285}{9000}=\frac{257}{1800}$.

5. Первое уравнение системы – это линейное уравнение с целыми решениями, то есть линейное диофантово уравнение. Решая его аналогично тому, как мы это делали в предыдущей задаче, находим его общее решение $\begin{cases}[x]=3t+2\\ [y]=2t-1,\end{cases}$ $t\in Z$. Тогда для каждого $t\in Z$ решениями первого уравнения являются пары $(x;y)$, для которых $x\in[3t+2;3t+3), y\in[2t-1;2t)$ (квадраты со стороной 1, см. рис. 6).

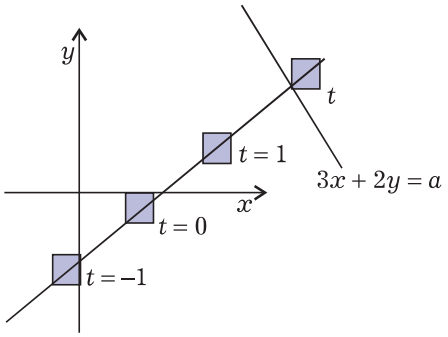


Рис. 6

Пусть A – вершина квадрата с координатами $A(3t+2;\ 2t-1)$, соответствующего целому числу t. Система имеет единственное решение, если прямая $3x+2y=a$ проходит через вершину A хотя бы для одного t, поскольку все другие вершины исключены строгим неравенством. Значения a, при которых прямая $3x+2y=a$ проходит через точку A, определяются подстановкой координат этой точки в уравнение прямой: $a=3(3t+2)+2(2t-1)=13t+4, t\in Z$.

Ответ. $a=13t+4,\ t\in Z$.

6. Пусть O – центр основания пирамиды $EABCD$, тогда EO – её высота. Так как $AB\parallel DC$, то $AB\parallel EDC$ и $MN\parallel DC$. Следовательно, $EM=EN$. Введём обозначения: $AB=a$, $ED=b$, $EM=EN=x$, $V_{EABCD}=V$ (рис. 7).

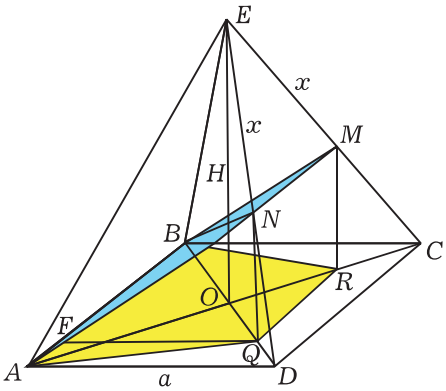


Рис. 7

Выразим объём пирамиды $EABMN$ через объём пирамиды $EABCD$. Имеем:

$$V_{EABD}=\frac{V}{2}=\frac{1}{3}AO\cdot S_{EBD},$$

$$V_{EABN}=\frac{1}{3}AO\cdot S_{EBN}=\frac{1}{3}AO\cdot S_{EBD}\cdot\frac{x}{b}=\frac{xV}{2b},$$

$$V_{EBNM}=\frac{1}{3}CO\cdot x\cdot S_{EBN}=$$

$$=\frac{1}{3}AO\cdot S_{EBD}\cdot\frac{x^2}{b^2}=\frac{x^2V}{2b^2}.$$

Тогда

$$V_{EBNM}=V_{EABD}+V_{EBNM}=\frac{V}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{x^2}{b^2}\right).$$

Подставляя полученное значение объема пирамиды $EABMN$ в условие задачи $\frac{V_{EBNM}}{V}=\frac{5}{9}$, получим уравнение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}+\frac{x^2}{b^2}\right)=\frac{5}{9},\quad \text{или}\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{x}{b}-\frac{10}{9}=0.$$

Это квадратное уравнение относительно $\frac{x}{b}$, его корни:

$$\frac{x}{b}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{40}{9}}}{2}=\frac{-1\pm\frac{7}{3}}{2}.$$

В силу положительности $\frac{x}{b}$ имеем

$$\frac{x}{b}=\frac{2}{3},\text{ или } x=\frac{2}{3}b.$$

Выразим площади полных поверхностей пирамид $EABMN$ и $EABCD$ через длину ребра основания a. Из условия $\frac{EO}{a/2}=5$ находим высоту пирамиды $EO=\frac{5a}{2}$. Длину b бокового ребра ED находим из треугольника EOD:

$$b=\sqrt{\left(\frac{OD}{2}\right)^2+EO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{25a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{27}}{2}.$$

Тогда

$$S_{EDC}=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a^2\sqrt{26}}{4},$$

в результате имеем

$$S_{EABCD}=S_{\text{осн}}+S_{\text{бок}}=a^2\left(1+\sqrt{26}\right).$$

Для нахождения площади полной поверхности пирамиды $EABMN$ рассмотрим треугольники AEN, BEM, ENM и трапецию $ABMN$. Имеем:

$$S_{AEN}=S_{BEM}=\frac{x}{b}S_{EDC}=\frac{a^2\sqrt{26}}{6},$$

$$S_{ENM}=\frac{x^2}{b^2}S_{EDC}=\frac{a^2\sqrt{26}}{9}.$$

В трапеции $ABMN$ сторона $MN=\frac{x}{b}DC=\frac{2a}{3}$. Для нахождения высоты трапеции $ABMN$ опустим из точки N перпендикуляр NQ на основание $ABCD$ ($Q\in BD$), а затем из точки Q перпендикуляр на сторону AB. По теореме о трёх перпендикулярах $FN\perp AB$, то есть является высотой трапеции $ABMN$. Так как треугольники EOD и NQD подобны с коэффициентом подобия $k=\frac{b-x}{b}=\frac{1}{3}$,

то $NQ=\frac{EO}{3}=\frac{5a}{6}$, $QD=\frac{OD}{3}=\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Вычислив

$$FQ=AB-QD\cdot\cos 45^\circ=a-\frac{a}{6}=\frac{5a}{6},$$

найдем $FN=\sqrt{NQ^2+FQ^2}=\frac{5a\sqrt{2}}{6}$.

Тогда

$$S_{ABMN}=\frac{AB+MN}{2}FN=\frac{25\sqrt{2}a^2}{36}.$$

Вычислим S_{EABMN}: $S_{EABMN}=$

$$=S_{ABE}+2S_{AEN}+S_{ENM}+S_{ABMN}=$$

$$=\frac{25a^2}{36}\left(\sqrt{2}+\sqrt{26}\right).$$

В итоге приходим к ответу

$$\frac{S_{EABMN}}{S_{EABCD}}=\frac{25\left(\sqrt{2}+\sqrt{26}\right)}{36\left(1+\sqrt{26}\right)}.$$

Ответ. $\frac{S_{EABMN}}{S_{EABCD}}=\frac{25\left(\sqrt{2}+\sqrt{26}\right)}{36\left(1+\sqrt{26}\right)}$.

Физика. Ответы и решения

1. Очевидно, вольтметры неидеальные, поскольку в случае идеальности они должны были бы показывать 2/3 от напряжения источника, а они показывают половину. Поэтому потенциалы точек 1 и 2 одинаковы (рис. 1), а ток через центральное сопротивление не течёт. Поэтому центральное сопротивление можно выбросить, а падения напряжения на резисторах и вольтметрах одинаковы. Отсюда следует также, что сопротивления вольтметров и резисторов равны.

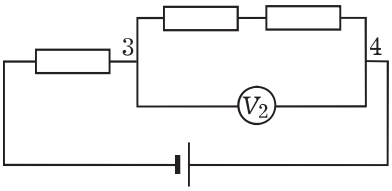


Рис. 8

При выбрасывании одного вольтметра цепь принимает следующий вид (см. рис. 8), причём сопротивление участка $3-4$ составляет $2/3$ от сопротивления резистора или вольтметра. Поэтому напряжение на участке $3-4$ составляет $2/5$ от напряжения источника и, следовательно,

$$V_2 = \frac{2}{5}\mathcal{E} = 2{,}4 \text{ В}.$$

2. Поскольку поршень лёгкий и не закреплён, давление воздуха в сосуде равно атмосферному в течение всего процесса. Это значит, что при испарении воды будет увеличиваться объём воздуха (поршень будет подниматься), а в единице объема влажного воздуха останется то же самое число молекул. А поскольку каждая молекула воды (16 а.е.м.) легче усреднённой молекулы воздуха (29 а.е.м.), масса единицы объёма влажного воздуха (т.е. плотность) будет меньше, чем масса единицы объёма сухого.

Найдём теперь плотность влажного воздуха. Пусть концентрация молекул воздуха равна n. Пока он был сухим, это были молекулы собственно воздуха (усреднённые), и потому его плотность равна

$$\rho_0 = nm_0 = \frac{n\mu_0}{N_A}, \qquad (1)$$

где m_0 – масса молекулы воды, μ_0 – молярная масса воды, N_A – число Авогадро.

Из условия можно заключить, что нам нужно найти плотность воздуха, содержащего насыщенный пар (поскольку вода перестала испаряться). Это значит, что парциальное давление водяного пара во влажном воздухе равно давлению насыщенного пара при данной температуре $p_н$, а парциальное давление собственно воздуха равно $p_0 - p_н$ (p_0 – атмосферное давление). Поэтому в единице объёма воздуха под поршнем находится

$$n_0 = \frac{p_0 - p_н}{p_0} n$$

молекул собственно воздуха (усреднённых) и

$$n_1 = \frac{p_н}{p_0} n$$

молекул воды. Отсюда по формулам, аналогичным формуле (1), можно найти плотность влажного воздуха

$$\rho_1 = n_0 m_0 + n_1 m_1 = \frac{p_0 - p_н}{p_0}\frac{n\mu_0}{N_A} + \frac{p_н}{p_0}\frac{n\mu_1}{N_A} =$$

$$= \frac{n\mu_0}{N_A} - \frac{p_н}{p_0}\frac{n(\mu_0 - \mu_1)}{N_A} = \rho_0\left(1 - \frac{p_н}{p_0}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_0}\right)\right).$$

Учитывая, что по условию давление насыщенного пара составляет одну седьмую часть от атмосферного давления, получим далее

$$\rho_1 = \rho_0\left(1 - \frac{p_н}{p_0}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_0}\right)\right) =$$

$$= \frac{\rho_0}{7}\left(6 + \frac{\mu_1}{\mu_0}\right) = 0{,}95 \text{ кг/м}^3.$$

3. Пусть сила натяжения верхней нити, охватывающей блок, движущийся с ускорением $2a$, равна T_1, второй нити – T_2. Тогда второй закон Ньютона для грузов даёт

$$\begin{aligned} 2ma_1 &= T_1 - 2mg, \\ ma_2 &= T_1 - T_2 - mg. \end{aligned} \qquad (2)$$

Найдём связь ускорений грузов с ускорением блоков. Пусть нижний блок опустился на Δl. Тогда верхний блок поднимется на $2\Delta l$ (его ускорение в два раза больше). Очевидно,

что тело массой m переместится на $2\Delta l$, тело массой $2m$ поднимется на $6\Delta l$. Поэтому ускорение тела с массой m равно $2a$ и направлено вниз, ускорение тела с массой $2m$ равно $6a$ и направлено вверх. Поэтому система уравнений (2) принимает вид:

$$12ma = T_1 - 2mg,$$
$$2ma = T_2 + mg - T_1.$$

Отсюда

$$T_1 = 12ma + 2mg,$$
$$T_2 = 14ma + mg.$$

Ну а поскольку блоки невесомы, силы, которыми нужно действовать на блоки, равны удвоенным силам натяжения нитей:

$$F_1 = 2T_1 = 24ma + 4mg,$$
$$F_2 = 2T_2 = 28ma + 2mg.$$

4. С точки зрения давления в жидкости наливание в сосуд слоя масла толщиной h эквивалентно наливанию слоя воды толщиной

$$\frac{\rho_0 h}{\rho_1}.$$

Поэтому наливание в систему сосудов слоя масла толщиной $6h$ (в первый, второй и третий сосуды) эквивалентно тому, что мы нальём слой воды толщиной

$$h_1 = \frac{6\rho_0 h}{\rho_1}.$$

Но если бы мы налили такое количество воды, она распределилась бы равномерно по четырём сосудам. Учитывая, что в четвёртом сосуде будет только вода (по условию масло полностью воду ни из одного сосуда не вытесняет и, следовательно, не может попасть в четвёртый сосуд), то уровень воды в нём поднимется на величину

$$\Delta h_4 = \frac{6\rho_0 h}{4\rho_1} = \frac{3\rho_0 h}{2\rho_1}.$$

При этом давление в жидкости (около дна сосуда) возрастёт на величину

$$\Delta p = \rho_1 g h_4 = \frac{3}{2}\rho_0 g h. \qquad (3)$$

Изменение уровня жидкости в первом, втором и третьем сосудах найдем из условия увеличения давления в этих сосудах на эту величину.

В первом сосуде находится слой масла толщиной h, который обеспечивает дополнительное давление $\rho_0 g h$. Поэтому для увеличения давления на $(3/2)\rho_0 g h$ в левый сосуд должна войти дополнительная вода, дающая давление около дна сосуда $(1/2)\rho_0 g h$, т.е. слой воды толщиной $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Это значит, что уровень жидкости в первом сосуде увеличится на величину

$$\Delta h_1 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1}h = h\left(1 + \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right).$$

Во втором сосуде появится дополнительный слой масла толщиной $2h$, который обеспечивает дополнительное давление $2\rho_0 g h$.

Поэтому чтобы давление около дна второго сосуда возросло на величину Δp (3), из второго сосуда должна уйти вода толщиной $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Значит, уровень воды во втором сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_2 = 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1}h = 2h\left(1 - \frac{\rho_0}{4\rho_1}\right).$$

В третьем сосуде появится дополнительный слой масла толщиной $3h$, который обеспечивает дополнительное давление $3\rho_0 g h$.

Поэтому чтобы давление около дна третьего сосуда возросло на величину Δp (3), из третьего сосуда должна уйти вода толщиной $(3/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Значит, уровень воды в третьем сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_3 = 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h = 3h\left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right).$$

5. Очевидно, изображение четырёхугольника будет квадратом, если: (1) изображения противоположных сторон будут параллельны, (2) угол между изображениями пар соседних сторон будет равен 90°, (3) угол между изображениями диагоналей четырехугольника также будет равен 90°. Установим, в каких случаях условия (1), (2) и (3) выполняются.

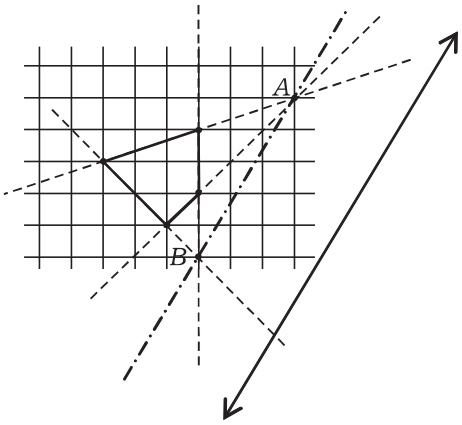


Рис. 9

(1) Пусть есть тонкая собирающая линза и два непараллельных отрезка. Построим их изображения и поймём, когда их изображения будут параллельными.

Для построения изображений отрезков возьмём лучи, идущие вдоль самих отрезков. Тогда каждый из таких лучей проходит и через один конец отрезка, и через другой, и, следовательно, изображение отрезков будет лежать на этих лучах после их прохождения линзы (такие лучи показаны на рис. 9 пунктиром). Но чтобы два луча после прохождения собирающей линзы были параллельны, до линзы они должны пересекаться в её фокальной плоскости. Это значит, что точки пересечения лучей, которым принадлежат пары противоположных сторон (точки A и B на рисунке) принадлежат фокальной плоскости линзы (показана штрих-пунктирной линией), а сама линза лежит справа от прямой AB (в качестве примера показано одно из возможных расположений линзы, причём её фокусное расстояние должно равняться расстоянию от линзы до прямой AB).

Итак, после прохождения линзы, показанной на рисунке, изображение четырёхугольника будет параллелограммом. Установим теперь, когда это изображение будет прямоугольником. Очевидно, оно будет прямоугольником тогда, когда лучи, вышедшие из точек A и B и проходящие через центр линзы, будут перпендикулярны друг другу. Действительно, эти лучи не преломляются, все остальные лучи, проходящие через точки A и B, после прохождения линзы будут им параллельны. Поэтому центр линзы может лежать в любой точке, принадлежащей полуокружности, проходящей через точки A и B (см. рис 10; полуокружность показана пунктиром, а главная оптическая ось линзы – точечной линией; отмечены также её фокусы).

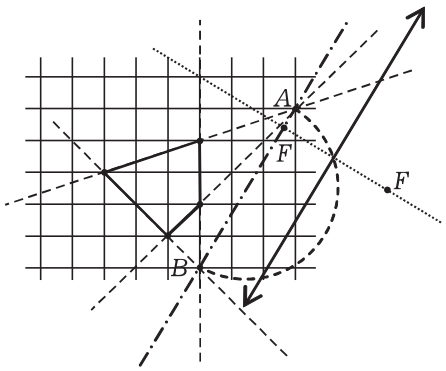


Рис. 10

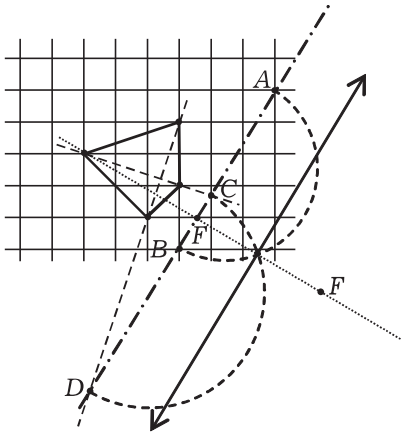


Рис. 11

Итак, изображение четырёхугольника в линзе, приведённой на последнем рисунке 11, будет прямоугольником, причём таких положений линз ещё будет очень много (её центр может располагаться в любой точке пунктирной окружности на последнем рисунке). Можно ли подобрать её такое расположение, чтобы изображение четырёхугольника было бы квадратом? Для этого надо, чтобы изображение диагоналей четырёхугольника были перпендикулярны друг другу. А для этого надо, чтобы угол между лучами, вышедшими из точек C и D (точки пересечения продолжений диагоналей и фокальной плоскости линзы) был прямым. Для этого центр линзы должен лежать на полуокружности, проходящей через точки C и D.

Поскольку все построения проводились в правильном масштабе, рисунок 11 можно использовать для оценки фокусного расстояния линзы. Из рисунка находим, что расстояние от линзы до ее фокальной плоскости составляет около двух диагоналей одной клетки, т.е. равно

$$F \sim 3 \text{ см}.$$

Материал подготовили
Т.А. Бухарова, С.А. Гришин, С.Е. Муравьев
НИЯУ МИФИ

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Блиц-ответы

– Вы хотите, чтобы что-нибудь произошло?
– Да, но боюсь, как бы чего-нибудь не случилось.

***

– Как добиться внимательного прочтения текста?
– Предложить найти в нём то, чего там нет.

***

– Чего испугался пассажир двухэтажного автобуса, сразу спустившийся с верхнего этажа?
– Так там водителя нет!

***

– Какой электрический ток называют переменным?
– Тот, который течёт в мигающей лампочке.