ИЮЛЬ

ISSN 0130-2221

2017 · № 7

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача М2470 предлагалась на XX Кубке памяти А.Н.Колмогорова, задача М2472 – на VIII Международной олимпиаде Romanian Master in Mathematics.

Задачи Ф2477–Ф2480 предлагались на отраслевой физико-математической олимпиаде школьников «Росатом» 2016/17 учебного года. Автор этих задач – С.Муравьев

Задачи М2470–М2473, Ф2477–Ф2480

М2470. Даны несколько натуральных чисел. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал с исходными числами то же, но в другом порядке. Докажите, что Кирилл и Илья совершили поровну переносов в процессе сложений.

И.Богданов

М2471. На координатной плоскости каждая точка с целыми координатами покрашена в один из трех цветов: красный, зеленый или желтый так, что есть хотя бы одна точка каждого цвета. Докажите, что найдутся три точки X, Y и Z, покрашенные в разные цвета, такие, что $\angle XYZ = 45°$.

Хорхе Тупе (Перу)

М2472*. Все члены последовательности $\{x_n\}$ положительны и при всех натуральных n имеет место равенство

$$2x_{n+1}^2 - 3x_{n+1}x_n + 2x_n^2 = 1.$$

Определите, какое наибольшее количество различных чисел может быть среди членов последовательности $\{x_n\}$.

С.Костин

М2473*. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P, Q, R и S соответственно. Оказалось, что отрезки PR и QS разбивают $ABCD$ на четыре четырехугольника, у каждого из которых диагонали перпендикулярны (рис. 1). Докажите, что точки P, Q, R и S лежат на одной окружности.

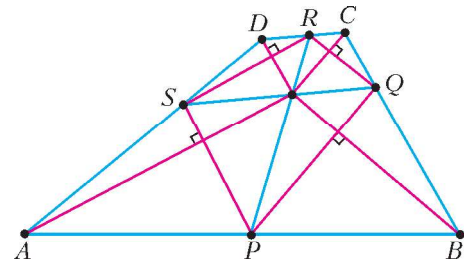


Рис. 1

Н.Белухов (Болгария)

Ф2477. В системе двух тел с массами m и $2m$, связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплен к потолку, и двух невесомых блоков, ускорения блоков известны и равны a и $2a$ (рис.2). Какими силами нужно действовать на блоки?

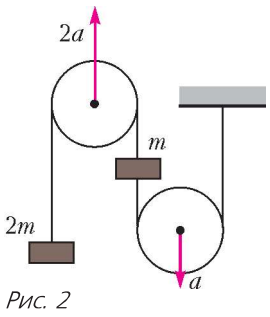


Рис. 2

Ф2478. Имеются четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которые налито некоторое количество воды. Поверх воды

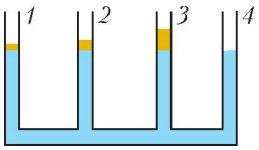


Рис. 3

в первый, второй и третий сосуды (рис. 3) аккуратно наливают слой масла толщиной h, $2h$ и $3h$ соответственно. На сколько изменится уровень жидкости в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением после установления равновесия? Известно, что при наливании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла ρ_0, плотность воды ρ_1 ($\rho_1 > \rho_0$).

Ф2479. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 4, три одинаковых резистора соединены последователь-

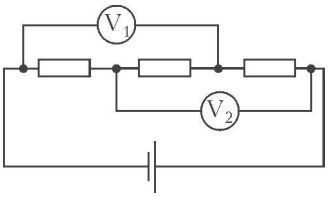


Рис. 4

но и подключены к батарейке с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение $U = 5$ В каждый. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.

Ф2480. На рисунке 5 изображен выпуклый четырехугольник. Где нужно расположить тонкую собирающую линзу и каким должно быть ее фокусное расстояние, чтобы изображение четырехугольника имело форму квадрата? Решите задачу графически и обоснуйте все сделанные построения на основе законов геометрической оптики. Оцените по рисунку фокусное расстояние этой линзы, считая, что одна клеточка на рисунке равна одному сантиметру.

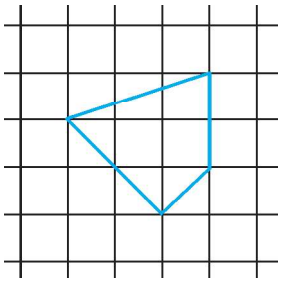


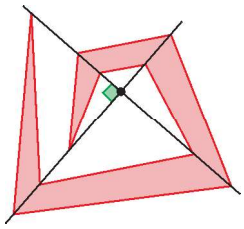
Рис. 5

Решения задач М2458–М2461, Ф2465–Ф2468

М2458. *а) На каждой стороне 10-угольника (не обязательно выпуклого) как на диаметре построили окружность. Может ли оказаться, что все эти окружности имеют общую точку, не совпадающую ни с одной вершиной 10-угольника? б) Решите ту же задачу для 11-угольника.*

Ответ: а) можно; б) нельзя.

Общая точка у всех построенных окружностей – это точка, из которой каждая сторона многоугольника видна под прямым углом.



а) Один из возможных примеров показан на рисунке.

б) Предположим, что O – общая точка построенных окружностей для n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, где n нечетно, причем O не совпадает ни с одной из вершин. Тогда $OA_1 \perp OA_2$, $OA_2 \perp OA_3$, значит, прямые OA_1 и OA_3 совпадают, т.е. точки A_1 и A_3 лежат на одной прямой l, проходящей через O. Продолжая далее, аналогично получаем, что точка A_5 тоже лежит на прямой l, точки $A_7, A_9, \ldots, A_n$, $A_2, A_4, \ldots, A_{n-1}$ тоже лежат на прямой l. Таким образом, все вершины n-угольника лежат на одной прямой. Противоречие.

Е.Бакаев

М2459. *Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство*

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geq$$

$$\geq \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \ldots + \frac{x_{n-3}}{x_1} + \frac{x_{n-2}}{x_2} + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

Умножим неравенство на 4 и представим левую часть в виде суммы $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$, где

$$s_1 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^4 + \left(\frac{x_4}{x_5}\right)^4,$$