

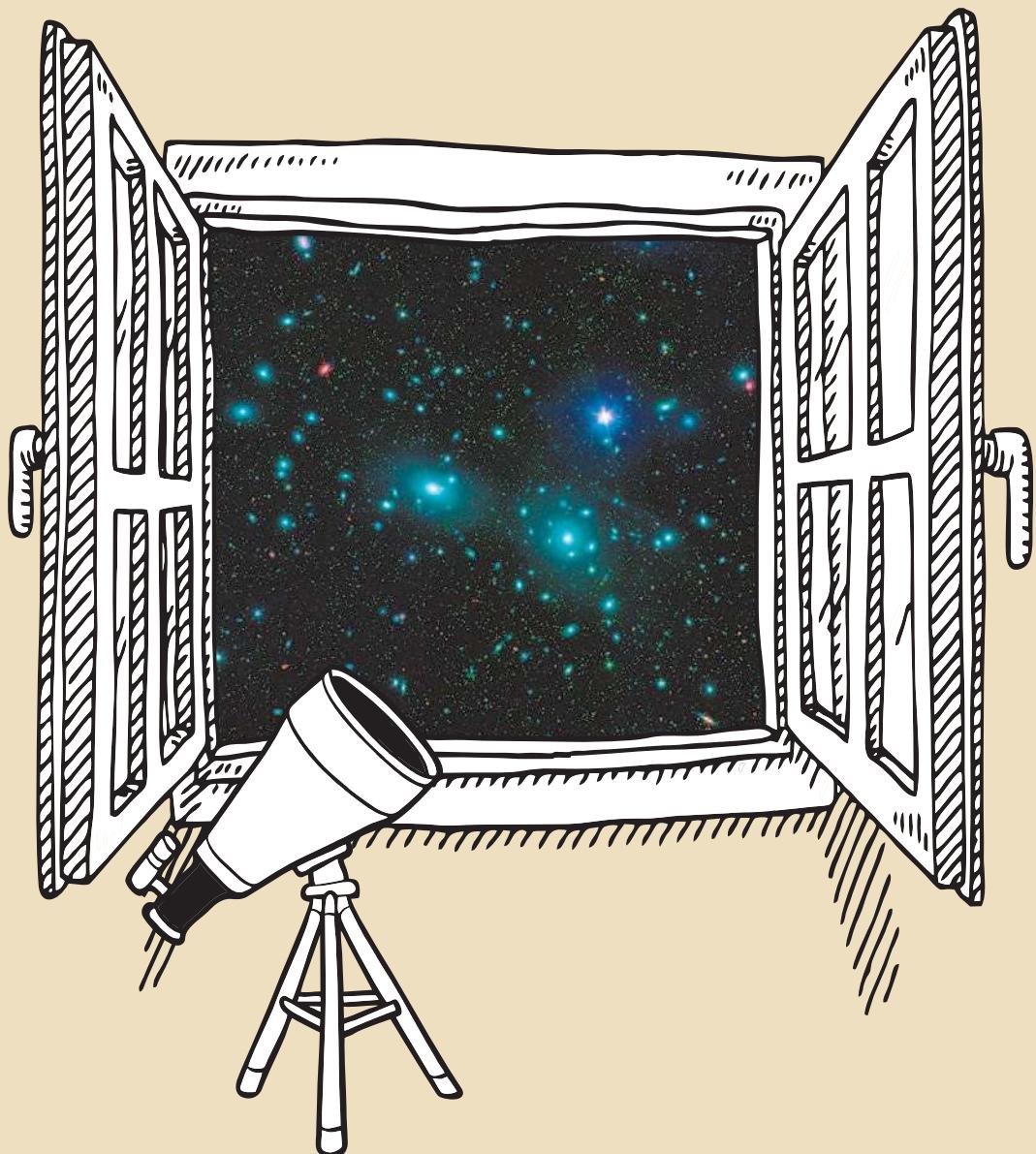
ОКТЯБРЬ

ISSN 0130-2221

2017 · № 10

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Отсюда

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{3x_n \pm \sqrt{9x_n^2 - 8(2x_n^2 - 1)}}{4} = \\&= \frac{3x_n \pm \sqrt{8 - 7x_n^2}}{4} = \\&= \frac{3}{4}x_n \pm \frac{\sqrt{7}}{4}\sqrt{\frac{8}{7} - x_n^2}.\end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что $\frac{8}{7} - x_n^2 \geq 0$, значит, все члены последовательности $\{x_n\}$ лежат в интервале $\left(0; \sqrt{\frac{8}{7}}\right]$.

Сделаем тригонометрическую подстановку $x_n = \sqrt{\frac{8}{7}} \cos \varphi_n$, где $\varphi_n \in [0; \pi/2)$. Тогда выражение для x_{n+1} после деления обеих частей этого выражения на $\sqrt{\frac{8}{7}}$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_{n+1} &= \\&= \frac{3}{4} \cos \varphi_n \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \sin \varphi_n = \cos(\varphi_n \mp \alpha).\end{aligned}$$

Здесь символом α обозначено число из интервала $(0; \pi/2)$ такое, что $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ и $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ (т.е. $\alpha = \arccos \frac{3}{4}$).

Случай 1: $\cos \varphi_{n+1} = \cos(\varphi_n + \alpha)$. Поскольку числа φ_{n+1} и φ_n принадлежат промежутку $[0; \pi/2)$, то в этом случае

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \alpha. \quad (1)$$

Случай 2: $\cos \varphi_{n+1} = \cos(\varphi_n - \alpha)$. Поскольку числа φ_{n+1} и φ_n принадлежат промежутку $[0; \pi/2)$, то в этом случае

$$\varphi_{n+1} = \begin{cases} \varphi_n - \alpha, & \text{если } \varphi_n \in [\alpha, \pi/2); \\ -\varphi_n + \alpha, & \text{если } \varphi_n \in [0, \alpha). \end{cases} \quad (2)$$

Исходя из формул (1) и (2), легко выводится, что при любом натуральном n

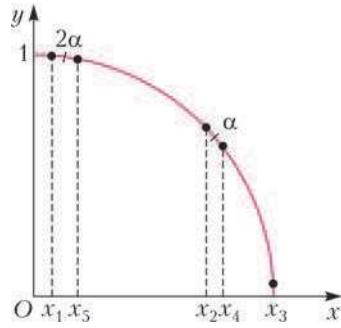
$$\varphi_n = \pm \varphi_1 + k\alpha,$$

где k – некоторое целое число.

Количество чисел вида $\pm \varphi_1 + k\alpha$ на промежутке $[0; \pi/2)$ не больше, чем количество

чисел вида $\varphi_1 + k\alpha$ на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, т.е. не больше чем $[\pi/\alpha] + 1$. Но $[\pi/\alpha] = 4$. (Поскольку $\cos \alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$, имеем $\alpha < \frac{\pi}{4}$. С другой стороны, с помощью достаточно простых вычислений можно доказать, что $\sin 5\alpha < 0$, откуда $5\alpha > \frac{\pi}{5}$.) Поэтому количество различных чисел среди членов последовательности $\{\varphi_n\}$, а значит, и среди членов последовательности $\{x_n\}$, не превышает 5.

В то же время значение 5 достигается, например, для последовательности $x_n = \sqrt{\frac{8}{7}} \cos \varphi_n$ с периодом 8, где (при



достаточно малом ϵ)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 2\alpha + \epsilon, \quad \varphi_2 = \alpha + \epsilon, \quad \varphi_3 = \epsilon, \\ \varphi_4 &= \alpha - \epsilon, \quad \varphi_5 = 2\alpha - \epsilon, \quad \varphi_6 = \alpha - \epsilon, \\ \varphi_7 &= \epsilon, \quad \varphi_8 = \alpha + \epsilon, \quad \varphi_9 = 2\alpha + \epsilon = \varphi_1, \dots\end{aligned}$$

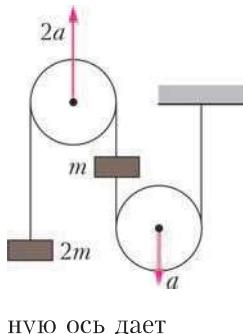
(см. рисунок).

C.Костин

M2473*. Решение этой задачи – в статье Н.Белухова «Решетки четырехугольников».

Ф2477.¹ В системе двух тел с массами t и $2t$, связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплен к потолку, и двух невесомых блоков, ускорения блоков известны и равны a и $2a$ (см. рисунок). Какими силами нужно действовать на блоки?

¹ Автор решений задач Ф2477–Ф2480 – С.Муравьев.



Пусть сила натяжения верхнего участка нити (охватывающего блок, движущийся с ускорением $2a$) равна T_1 , нижнего участка нити — T_2 . Тогда второй закон Ньютона для грузов в проекциях на вертикальную ось дает

$$2ma_1 = T_1 - 2mg,$$

$$ma_2 = T_1 - T_2 - mg.$$

Найдем связь ускорений грузов с ускорениями блоков. Пусть нижний блок опустился на Δl . Тогда верхний блок поднимется на $2\Delta l$ (его ускорение в два раза больше). Очевидно, что тело массой m переместится на $2\Delta l$, а тело массой $2m$ поднимется на $6\Delta l$. Поэтому ускорение тела массой m равно $2a$ и направлено вниз, тела массой $2m$ — равно $6a$ и направлено вверх. Система уравнений движения принимает вид

$$12ma = T_1 - 2mg,$$

$$2ma = T_2 + mg - T_1,$$

откуда

$$T_1 = 12ma + 2mg,$$

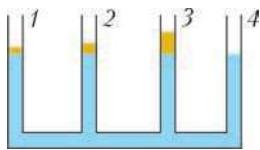
$$T_2 = 14ma + mg.$$

А поскольку блоки невесомы, то силы, которые должны действовать на блоки, равны удвоенным силам натяжения соответствующих участков нити:

$$F_1 = 2T_1 = 24ma + 4mg,$$

$$F_2 = 2T_2 = 28ma + 2mg.$$

Ф2478. Имеются четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которые налито некоторое количество воды. Поверх воды в первый, второй и третий сосуды (см. рисунок) аккуратно наливают слой масла толщиной h , $2h$ и $3h$ соответственно. На сколько изменится уровень жидкости в первом сосуде?



сти в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением после установления равновесия? Известно, что при наливании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла ρ_0 , плотность воды ρ_1 ($\rho_1 > \rho_0$).

С точки зрения давления в жидкости, наливание в сосуд слоя масла толщиной h эквивалентно наливанию слоя воды толщиной $\frac{\rho_0 h}{\rho_1}$. Поэтому наливание в систему сосудов слоя масла толщиной $6h$ (в первый, второй и третий сосуды) эквивалентно тому, что мы нальем слой воды толщиной

$$h_1 = \frac{6\rho_0 h}{\rho_1}.$$

Но если бы мы налили такое количество воды, она распределилась бы равномерно по четырем сосудам. Учитывая, что в четвертом сосуде будет только вода (по условию масло полностью воду ни из одного сосуда не вытесняет и, следовательно, не может попасть в четвертый сосуд), уровень воды в нем поднимется на величину

$$\Delta h_4 = \frac{6\rho_0 h}{4\rho_1} = \frac{3\rho_0 h}{2\rho_1}.$$

При этом давление в жидкости (около дна сосуда) возрастет на величину

$$\Delta p = \rho_1 g \Delta h_4 = \frac{3}{2} \rho_0 g h.$$

Изменение уровня жидкости в первом, втором и третьем сосудах найдем из условия увеличения давления в этих сосудах на эту величину.

В первом сосуде находится слой масла толщиной h , который обеспечивает дополнительное давление $\rho_0 gh$. Поэтому для увеличения давления на $\Delta p = (3/2)\rho_0 gh$ в левый сосуд должна войти дополнительная порция воды, создающая давление около дна сосуда $(1/2)\rho_0 gh$. Иными словами, должен войти слой воды толщиной $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Это значит, что уровень жидкости в первом сосуде увеличится на величину

$$\Delta h_1 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1} h = h \left(1 + \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right).$$

Во втором сосуде появился дополнительный слой масла толщиной $2h$, который обеспечивает дополнительное давление $2\rho_0gh$. Поэтому, чтобы давление около дна второго сосуда возросло на величину Δp , из второго сосуда должна уйти вода толщиной $(1/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Следовательно уровень жидкости во втором сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_2 = 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1}h = 2h \left(1 - \frac{\rho_0}{4\rho_1}\right).$$

В третьем сосуде появился дополнительный слой масла толщиной $3h$, который обеспечивает дополнительное давление $3\rho_0gh$. Тогда, чтобы давление около дна третьего сосуда возросло на величину Δp , из третьего сосуда должна уйти вода толщиной $(3/2)(\rho_0/\rho_1)h$. Поэтому уровень жидкости в третьем сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_3 = 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h = 3h \left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right).$$

Ф2479. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 1, три

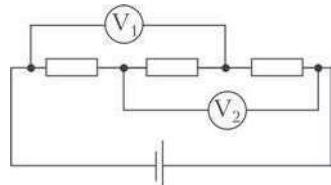


Рис. 1

одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к батарейке с ЭДС $E = 10$ В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение $U = 5$ В каждый. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.

Очевидно, что вольтметры неидеальные, поскольку в случае идеальности они должны были бы показывать по $2/3$ от напряжения источника. Кроме того, так как вольтметры показывают половину напряжения источника, то потенциалы точек 1 и 2 (рис.2) одинаковы. Значит, ток через

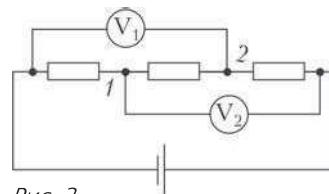


Рис. 2

центральное сопротивление не течет, и его можно выбросить из цепи. Тогда получается, что падения напряжения на резисторах и вольтметрах одинаковы, поэтому сопротивление вольтметров равно сопротивлению резисторов.

При выбрасывании одного вольтметра цепь принимает вид, изображенный на рисунке 3, причем сопротивление участка 3–4 со-

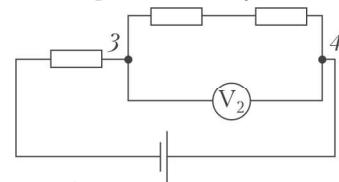


Рис. 3

ставляет $2/3$ от сопротивления вольтметра или резистора. Поэтому напряжение на участке 3–4 составляет $2/5$ от напряжения источника:

$$U_2 = \frac{2}{5}E = 4 \text{ В}.$$

Ф2480. На рисунке 1 изображен выпуклый четырехугольник. Где нужно расположить тонкую собирающую линзу и каким должно быть ее фокусное расстояние, чтобы изображение четырехугольника имело форму квадрата? Решите задачу графически и обоснуйте все сделанные построения на основе законов геометрической оптики. Оцените по рисунку фокусное расстояние этой линзы, считая, что одна клеточка на рисунке равна одном сантиметру.

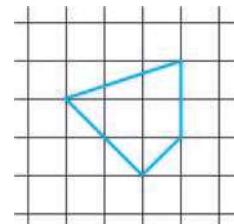


Рис. 1

Очевидно, что изображение четырехугольника будет квадратом, если: 1) изображения противоположных сторон будут параллельны, 2) угол между изображениями

пар противоположных сторон будет равен 90° , 3) угол между изображениями диагоналей четырехугольника также будет равен 90° . Установим, в каких случаях выполняются эти условия.

Пусть есть тонкая собирающая линза и два непараллельных отрезка. Построим их изображения и поймем, когда эти изображения будут параллельными. Для построения возьмем лучи, идущие вдоль самих отрезков. Тогда каждый из таких лучей проходит и через один конец отрезка, и через другой и, следовательно, изображения отрезков будут лежать на этих лучах после их прохождения линзы. Но чтобы два луча после прохождения собирающей линзы были параллельны, до линзы они должны пересекаться в ее фокальной плоскости. Это значит, что точки пересечения лучей, которым принадлежат противоположные стороны четырехугольника, — точки A и B на рисунке 2 — лежат в фокальной плоскости линзы (показана точечной линией), а сама линза находится справа от

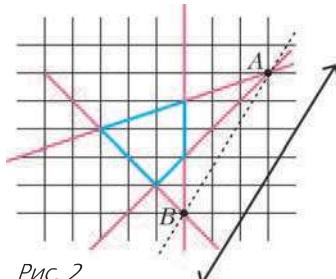


Рис. 2

прямой AB в любом месте. В качестве примера на рисунке 2 показано одно из возможных расположений линзы, причем ее фокусное расстояние должно равняться расстоянию от линзы до прямой AB .

Итак, после прохождения линзы изображение четырехугольника будет параллелограммом. Установим теперь, когда это изображение будет прямоугольником. Очевидно, это случится, когда лучи, вышедшие из точек A и B и проходящие через центр линзы, будут перпендикулярны друг другу. Действительно, эти лучи не преломляются, все остальные лучи, проходящие через точки A и B , после прохождения линзы будут им параллельны. Поэтому центр линзы может лежать в любой точке,

принадлежащей полуокружности, проходящей через точки A и B . На рисунке 3 полуокружность показана пунктиром, а главная оптическая ось линзы — штрих-

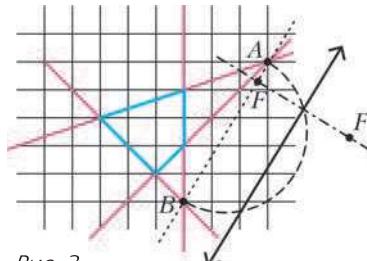


Рис. 3

пунктирной линией, отмечены также фокусы F линзы.

Таким образом, изображение четырехугольника в линзе, изображенной на рисунке 3, будет прямоугольником, причем таких положений линз будет очень много — ее центр может располагаться в любой точке пунктирной окружности. А можно ли подобрать такое расположение линзы, чтобы изображение четырехугольника было квадратом? Можно, причем для этого надо, чтобы изображения диагоналей четырехугольника были перпендикулярны друг другу. А это будет в том случае, если угол между лучами, вышедшими из точек C и D (рис. 4) и проходящими через центр линзы, будет прямым. Для этого центр линзы

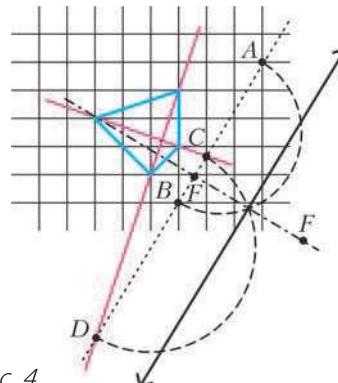


Рис. 4

должен лежать на полуокружности, проходящей через точки C и D .

Поскольку все построения проводились в правильном масштабе, рисунок 4 можно использовать для оценки фокусного расстояния линзы. Из рисунка находим, что

расстояние от линзы до ее фокальной плоскости составляет около двух диагоналей одной клетки, т.е. $F \sim 3$ см.

На рисунке 5 приведено окончательное

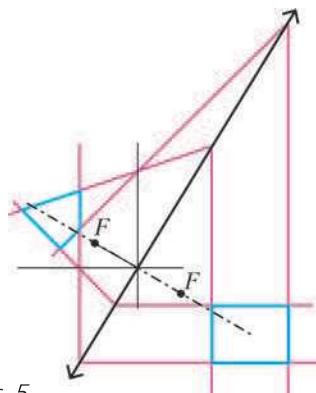


Рис. 5

построение изображения четырехугольника в найденной линзе, выполненное по правилам геометрической оптики. И, как видно из рисунка, изображение действительно похоже на квадрат, к которому, однако, нужно относиться несколько условно. Во-первых, потому, что небольшие ошибки в построении лучей могут достаточно сильно нарушить перпендикулярность изображений противоположных сторон, а во-вторых, потому, что законы геометрической оптики хорошо работают для лучей, наклоненных к главной оптической оси линзы под небольшими углами. Здесь же пришлось пользоваться лучами, наклоненными к главной оптической оси под большими углами.

Решетки четырехугольников

Н.БЕЛУХОВ

Эта статья посвящена истории трудной геометрической задачи, опубликованной в «Задачнике «Кванта» под номером М2473 (см. №7). Мы расскажем о том, как эта задача появилась, приведем ее решение и поговорим о том, как она связана с другими задачами и теоремами.

Наша история начинается с такой задачи.

Задача 1. Диагонали (выпуклого) описанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . На лучах PA , PB , PC , PD отметили соответственно точки A' , B' , C' , D' так, что

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = PD \cdot PD'$$

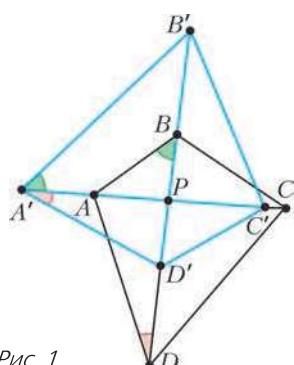


Рис. 1

(рис. 1).¹ Докажите, что четырехугольник $A'B'C'D'$ также является описанным.

Эта задача является шагом в авторском решении задачи М1495 («Задачник «Кванта» №6 за 1995 г.»).²

Сначала найдем углы четырехугольника $A'B'C'D'$. Из подобия треугольников PAB и $PA'B'$, PBC и $PB'C'$ и т.д. имеем

$$\begin{aligned} \angle A' &= \angle B'A'P + \angle PA'D' = \\ &= \angle ABP + \angle PDA = 180^\circ - \angle A. \end{aligned}$$

Аналогично, $\angle B' = 180^\circ - \angle B$ и т.д. Значит, соответственные углы четырехугольников $A'B'C'D'$ и $ABCD$ дают в сумме 180° .

Построим вне четырехугольника $ABCD$ четырехугольник $ABXY$, подобный четырехугольнику $A'B'C'D'$ (рис. 2). Так как $\angle BXY = 180^\circ - \angle BCD$, то $CD \parallel XY$, т.е. $CDYX$ – трапеция (или параллелограмм).

Иными словами, мы «отмасштабировали» четырехугольник $A'B'C'D'$ и склеили подобную копию четырехугольника $A'B'C'D'$ с четырехугольником $ABCD$ по

¹ Иными словами, $ABCD$ переходит в $A'B'C'D'$ при инверсии с центром P . Об инверсии можно прочесть, например, в статье В.Уроева («Квант» №5 за 1984 г.).

² Автор задачи М1495 – И.Вайнштейн, авторское решение во многом опиралось на вычисления.