Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019
11 класс

Вариант № 1

1. Каждого студента, присутствующего на лекции, можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: отличник, спортсмен, блондин. Известно, что каждый четвертый блондин занимается спортом, а четверть спортсменов – блондины. Каждый третий спортсмен отличник, а треть отличников – не занимается спортом. Наконец, $5/12$ отличников – блондины, а $5/24$ блондинов – отличники. Только два студента блондина являются спортсменами и отличниками одновременно. Сколько студентов слушают лекцию, если по мнению лектора их не более восьмидесяти?

2. На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $4x^2-4x\sin(x\pi+y)+1=0$. Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников

3. Действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются тремя корнями уравнения $3x^3-px^2+28x-p=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+(x_3-2)^2$. При каком p оно реализуется?

4. Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины A и, совершив 2020 прыжков, опять оказалась в той же вершине. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+108=0$ имеет целые положительные корни?

6. Окружность радиуса 1 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче AF, а точка D – на луче FB так, что $AC=BD=2$.

Найти длину медианы треугольника CBD, проведенной из вершины B.

Ответы и решения

1. Пусть среди студентов, присутствующих на лекции x, y и $z-$число спортсменов, блондинов и отличников соответственно. Тогда по условию имеем

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{4}, \quad \frac{x}{3}=\left(1-\frac{1}{3}\right)z, \quad \frac{5z}{12}=\frac{5y}{24},$$

отсюда получаем

$$x=y=2z,$$

более того, видим, что x и y должны быть кратны 24, а $z-$ кратно 12. Тогда положим

$$x=y=24k, \quad z=12k, \ k\in\mathbb{Z}.$$

Пусть теперь u – число спортсменов блондинов, не являющихся отличниками, v – число спортсменов отличников, не являющихся блондинами, а w – число блондинов отличников, не занимающихся спортом. Данные представлены на диаграмме. Тогда по условию

$$\begin{cases} u+2=\dfrac{y}{4}=6k, \\ v+2=\dfrac{x}{3}=8k, \\ w+2=\dfrac{5z}{12}=5k. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$u=6k-2, \ v=8k-2, \ w=5k-2.$$

При этом общее число студентов на лекции будет

$$x+y+z-u-v-w-2\cdot 2=41k+2.$$

По мнению лектора $41k+2\le 80$, следовательно, $k=1$. Таким образом, всего на лекции $41\cdot 1+2=43$ студента.

Ответ: 43 студента.

2. Очевидно, что уравнение не имеет решений при $x=0$. Допустим, $x>0$. Тогда имеем цепочку равносильных преобразований

$$4x^2-4x\sin(x\pi+y)+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+4x-4x\sin(x\pi+y)+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^2+4x\left(1-\sin(x\pi+y)\right)=0.$$

Поскольку оба слагаемых в левой части последнего уравнения неотрицательны, то оно равносильно системе

$\begin{cases} (2x-1)^2=0, \\ 4x\left(1-\sin(x\pi+y)\right)=0, \end{cases}$ из которой, учитывая, что $x>0$, получаем $\begin{cases} 2x-1=0, \\ \sin(x\pi+y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/2, \\ \sin(\pi/2+y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/2, \\ \cos y=1. \end{cases}$

Таким образом, имеются решения $\begin{cases} x=1/2, \\ y=2\pi k, k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Аналогично, при $x<0$, рассмотрим цепочку

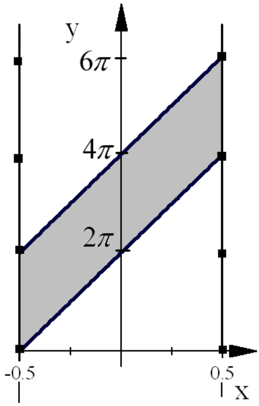
$$4x^2-4x\sin(x\pi+y)+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+4x-4x-4x\sin(x\pi+y)+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)^2+(-4x)\left(1+\sin(x\pi+y)\right)=0.$$

И далее, из неотрицательности слагаемых в левой части, получаем

$\begin{cases} (2x+1)^2=0, \quad x<0, \\ (-4x)\left(1+\sin(x\pi+y)\right)=0, \end{cases}$ что приводит к

$$\begin{cases} x=-1/2, \\ \sin(-\pi/2+y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/2, \\ \cos y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/2, \\ y=2\pi m, m\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Точки с координатами $\left(1/2; 2\pi k\right)$ и $\left(-1/2; 2m\pi\right)$ лежат на параллельных прямых $x=1/2$ и $x=-1/2$ и различаются по ординате на величину кратную 2π.



Таким образом, все допустимые четырехугольники являются либо трапециями, либо параллелограммами с высотой 1, со сторонами, лежащими на прямых $x = 1/2$ и $x = -1/2$. Любая трапеция содержит в себе меньший по площади параллелограмм из допустимых. Наименьшую площадь имеют параллелограммы с длиной основания равной 2π.

Ответ: $S_{\min} = 2\pi$.

3. Пусть действительные числа x_1, x_2 и x_3 – корни уравнения $3x^3 - px^2 + 28x - p = 0$ с учетом их возможной кратности. Тогда

$$3x^3 - px^2 + 28x - p \equiv 3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$

$$= 3x^3 - 3x^2(x_1 + x_2 + x_3) + 3x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3,$$

откуда $x_1 + x_2 + x_3 = p/3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 28/3$. С учетом этого целевое выражение преобразуется следующим образом:

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 12 =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 12 =$$

$$= \frac{p^2}{9} - \frac{56}{3} - \frac{4p}{3} + 12 = \frac{p^2 - 12p - 60}{9}.$$

Теперь нарисуем график уравнения $3x^3 - px^2 + 28x - p = 0$ на плоскости (x, p). Поскольку параметр входит в это уравнение линейно, удобнее разрешить его относительно p:

$$p(x^2 + 1) = 3x^3 + 28x = 3x(x^2 + 1) + 25x \Rightarrow p(x) = 3x + \frac{25x}{x^2 + 1}.$$

Найдем множество значений параметра p, при которых уравнение имеет три действительных корня. Для этого исследуем $p(x)$:

$$p'(x) = 3 + \frac{25(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 - 19x^2 + 28}{(x^2+1)^2} = \frac{\left(x^2-4\right)(3x^2-7)}{(x^2+1)^2}$$

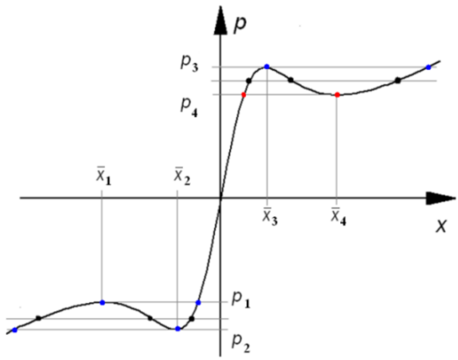
Нечетная функция $p(x)$ имеет минимумы в точках $\bar{x}_2 = -\frac{\sqrt{21}}{3}, \bar{x}_4 = 2$ и максимумы – в точках $\bar{x}_1 = -2, \bar{x}_3 = \frac{\sqrt{21}}{3}$,

причем

$$p_1 = p(\bar{x}_1) = -16,\ p_2 = p(\bar{x}_2) = -\frac{7\sqrt{21}}{2},$$

$$p_3 = p(\bar{x}_3) = \frac{7\sqrt{21}}{2},\ p_4 = p(\bar{x}_4) = 16.$$

Для всех $c \in \left(p_2; p_1\right) \cup \left(p_4; p_3\right)$ прямая $p = c$ пересекает график в трех точках и уравнение $3x^3 - px^2 + 28x - p = 0$ имеет три различных корня. При значениях параметра, совпадающих с одним из p_1, p_2, p_3 или p_4 (на границах отрезков) имеется две точки пересечения, что соответствует случаю кратных корней.



Квадратный трехчлен $\frac{p^2 - 12p - 60}{9}$, убывая при $p < 6$ и возрастая при $p > 6$, на множестве $\left[p_2; p_1\right] \cup \left[p_4; p_3\right]$ принимает наименьшее возможное значение, когда $p = p_4 = 16$.

Таким образом, в условиях задачи

$$\min\left(\left(x_1-2\right)^2 + \left(x_2-2\right)^2 + \left(x_3-2\right)^2\right) = \frac{16^2 - 12 \cdot 16 - 60}{9} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: наименьшее значение $\frac{4}{9}$ реализуется при $p = 16$.

4. Рассмотрим некоторый промежуточный шаг в движении Кузи. Если она на этом шаге находится в точке $A,$ то вероятность попасть в A на следующем шаге равна нулю. Если же она находится в любой из оставшихся точек, B, C или $D,$ то вероятность попасть в A на следующем шаге равна $1/3,$ так как из каждой такой точки есть три равновозможных пути, только один из которых приводит в $A.$ Пусть $p_k -$ вероятность того, что на $k-$ом шаге блоха находится в точке $A.$ Соответственно не в точке A она находится с вероятностью $\left(1-p_k\right).$ Тогда на следующем шаге она окажется в A с вероятностью

$$p_{k+1}=\left(1-p_k\right)\cdot\frac{1}{3}+p_k\cdot 0=\left(1-p_k\right)\cdot\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $p_0=1,\quad p_1=0,\quad p_2=\frac{1}{3},$ а далее получим

$$p_3=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9},\ \ldots,\ p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots+\frac{\left(-1\right)^n}{3^{n-1}}.$$

Формулу для p_n при $n\geq 2$ докажем методом математической индукции.

База индукции: $p_2=\frac{\left(-1\right)^2}{3^{2-1}}=\frac{1}{3}-$ верно.

Шаг индукции: пусть формула верна для $n=k,$ то есть $p_k=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots+\frac{\left(-1\right)^k}{3^{k-1}}.$ Тогда

$$p_{k+1}=\left(1-p_k\right)\cdot\frac{1}{3}=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots-\frac{\left(-1\right)^k}{3^{k-1}}\right)\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{9\cdot 3}-\frac{1}{27\cdot 3}+\cdots+\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{3^{k-1}\cdot 3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots+\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{3^k},$$

то есть формула верна и для $n=k+1.$ А значит верна и при любых $n\geq 2.$ Видим, что p_n представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $-1/3$. Следовательно,

$$P(A)=p_{2020}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(-1/3)^{2019}}{1-(-1/3)}=\frac{1+(1/3)^{2019}}{4}=\frac{3^{2019}+1}{4\cdot 3^{2019}}\simeq\frac{1}{4}.$$

Ответ: $P(A)=\dfrac{3^{2019}+1}{4\cdot 3^{2019}}$.

5. Рассмотрим сначала пары, в которых $a=0$. Для таких пар получим линейное уравнение $bx+108=0$. Пусть x_1 – его положительный корень. Имеем $b\cdot x_1=-108=-2^2\cdot 3^3$, значит, $b<0$, и числа b и x_1 не могут иметь простых делителей, отличных от 2 и 3. Всего имеется $(2+1)(3+1)=12$ различных (положительных) делителей числа 108, поскольку у делителя кратность двойки можно выбрать тремя способами: 0, 1 или 2; при этом кратность тройки можно выбрать четырьмя способами: 0, 1, 2 или 3. Таким образом, x_1 может принимать 12 различных значений, при каждом из них b определяется однозначно: $b={}^{-108}\!/\!_{x_1}$. Соответственно, существует 12 пар вида $(0,b)$.

Пусть теперь $a\neq 0$ и x_1, x_2 – целые положительные решения уравнения $ax^2+bx+108=0$. Тогда по теореме Виета получим $a\cdot x_1\cdot x_2=108=2^2\cdot 3^3$. Следовательно, $a>0$, а числа a, x_1, x_2 не могут иметь простых делителей, отличных от 2 и 3. Таким образом, имеют место разложения $a=2^s3^q, x_1=2^{s_1}3^{q_1}, x_2=2^{s_2}3^{q_2}$, где $s,s_1,s_2,q,q_1,q_2\geq 0$ – кратности простых множителей, причем

$$s_1+s_2=2-s,\quad q_1+q_2=3-q.$$

При фиксированных s,q существует $(3-s)(4-q)$ способов выбрать s_1,q_1, то есть выбрать x_1. При этом s_2,q_2, а значит и x_2 определяются однозначно: $s_2=2-s-s_1$, $q_2=3-q-q_1$. В силу того, что наборы (x_1,x_2), очевидно обладают симметрией, различных значений сумм будет $\left[\frac{(3-s)(4-q)+1}{2}\right]$(квадратные скобки означают целую часть числа).

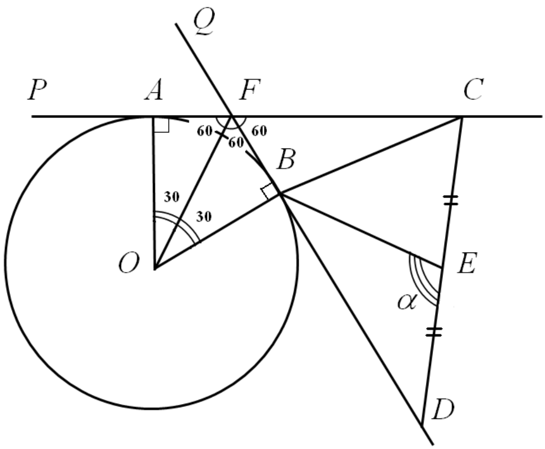
a		Способов выбрать s_1 $(3-s)(4-q)$	Различных значений сумм x_1+x_2
q	s		
0	0	12	6
	1	8	4
	2	4	2
1	0	9	5
	1	6	3
	2	3	2
2	0	6	3
	1	4	2
	2	2	1
3	0	3	2
	1	2	1
	2	1	1
			Всего: 32

Поскольку по теореме Виета $b=-(x_1+x_2)a$, число различных пар a и b, удовлетворяющих условию задачи, в случае квадратного уравнения равно 32.

Общее количество пар будет 32+12 =44.

Ответ: 44 пары.

6. Пусть точка O – центр окружности. Тогда $OA \perp P$, $OB \perp Q$, $OA = OB = 1$.



По условию хорда AB стягивает дугу окружности в $60°$, значит $\measuredangle AOB = 60°$.

Далее, $AF = FB$, так как это отрезки касательных, проведенных к данной окружности из одной точки.

Проведем отрезок OF. Тогда прямоугольные треугольники AOF и BOF равны по гипотенузе и катету. Значит, $\measuredangle AOF = \measuredangle BOF = 30°$. Тогда $\measuredangle AFO = \measuredangle BFO = 60°$. Отсюда $\measuredangle BFC = 60°$.

Из прямоугольных треугольников AOF и BOF получаем $AF = FB = 1 \cdot \operatorname{tg} 30° = 1/\sqrt{3}$.

Применим теорему косинусов в треугольниках BFC и DFC:

$$BC^2 = BF^2 + CF^2 - 2 \cdot BF \cdot CF \cdot \cos 60° =$$

$$= \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 5 - 2\sqrt{3},$$

$$CD^2 = DF^2 + CF^2 - 2 \cdot DF \cdot CF \cdot \cos 60° =$$

$$= \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 5.$$

Рассмотрим теперь треугольник BCD. Пусть $m_B = BE$ – его медиана. Тогда $CE = DE = 1/2\, CD$.

Применим теорему косинусов в треугольниках BCE и BDE:

$$BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2 \cdot BE \cdot DE \cdot \cos\alpha,$$
$$BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2 \cdot BE \cdot CE \cdot \cos\left(180^\circ - \alpha\right) =$$
$$= BE^2 + CE^2 + 2 \cdot BE \cdot CE \cdot \cos\alpha.$$

Складывая, получим

$$BC^2 + BD^2 = 2 \cdot BE^2 + DE^2 + CE^2,$$

откуда, домножив на 2 и учитывая равенство CE и DE, получим:

$$4 \cdot BE^2 = 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - 2\left(DE^2 + CE^2\right) = 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - CD^2.$$

Окончательно,

$$BE^2 = \frac{2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - CD^2}{4} = \frac{2\left(5 - 2\sqrt{3} + 4\right) - 5}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда медиана $m_B = BE = \sqrt{\dfrac{13 - 4\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{\left(2\sqrt{3} - 1\right)^2}}{2} = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}.$

Ответ: $m_B = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}.$

Вариант № 2

1. Каждого спортсмена, участвующего в марафоне, можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: веселые, тренированные, новички. Известно, что каждый шестнадцатый веселый – новичок, а пятая часть новичков – веселятся. Каждый пятый тренированный спортсмен веселый и только каждый десятый весельчак тренирован. Наконец, пятая часть новичков оказалась тренированной, а каждый восьмой из тренированных – новичок. Только три участника марафона являются тренированными, веселыми новичками одновременно. Сколько спортсменов вышло на старт, если им было выдано не более 150 номеров?

Ответ: 130 спортсменов.

2. На плоскости расположены четырехугольники, координаты $\left(x; y\right)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $16x^2 - 8x\sin(2x\pi + 3y) + 1 = 0.$ Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

Ответ: $S_{\min} = \dfrac{\pi}{3}.$

3. Действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются тремя корнями уравнения $x^3 - 3x^2 + 2(1-p)x + 4 = 0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $\left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 + \left(x_3 - 1\right)^2$. При каком p оно реализуется?

Ответ: наименьшее значение 6 реализуется при $p = 1$.

4. Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины A и, совершив 2024 прыжка, оказалась не в вершине A. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $P\left(A\right) = \dfrac{3^{2024} - 1}{4 \cdot 3^{2023}}.$

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2 + bx + 16875 = 0$ имеет целые положительные корни?

Ответ: 78+20= 98 пар.

6. Окружность радиуса 2 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче FA, а точка D – на луче BF так, что $AC = BD = 3$. Найти длину медианы треугольника CBD, проведенной из вершины B.

Ответ: $m_B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 1.$

Вариант № 3

1. В процессе опроса группы старшеклассников выяснилось, что каждого из них можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: умеющих водить автомобиль, мотоцикл и кататься на самокате. Известно, что каждый шестой водитель автомобиля может управлять мотоциклом, а каждый третий мотоциклист способен вести автомобиль. Каждый четвертый автомобилист может ехать на самокате, при этом шестая часть самокатчиков может управлять автомобилем. Наконец, каждый четвертый мотоциклист может ехать на самокате, при этом только двенадцатая часть самокатчиков может управлять мотоциклом. Только один самокатчик признался, что умеет ездить на машине и мотоцикле. Сколько школьников участвовало в опросе, если анкет было выдано не более семидесяти?

Ответ: 60 школьников.

2. На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $9x^2-6x\cos\left(\dfrac{3\pi x}{2}+2y\right)+1=0$. Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

Ответ: $S_{\min}=\dfrac{2\pi}{3}$.

3. Действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются тремя корнями уравнения $2x^3-(p-4)x^2-(2p-1)x-p+8=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. При каком p оно реализуется?

Ответ: наименьшее значение $\dfrac{417}{64}$ реализуется при $p=\dfrac{15}{4}$.

4. Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины A и, совершив 2019 прыжков, оказалась в вершине B. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $P(A)=\dfrac{3^{2019}+1}{4\cdot 3^{2019}}$.

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+1944=0$ имеет целые положительные корни?

Ответ: 108+24=132 пары.

6. Окружность радиуса 3 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче AF, а точка D – на луче FB так, что $AC=BD=4$. Найти длину медианы треугольника CAD, проведенной из вершины A.

Ответ: $m_A=2\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}$.

Вариант № 4

1. Выяснилось, что каждого из опрошенных можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: любитель рока, джаза и классики. Известно, что каждый пятый любитель рока с удовольствием слушает джаз, а каждый третий поклонник джаза слушает рок. Четыре из каждых пятнадцати любителей классики могут слушать рок, а пятая часть поклонников рока получает удовольствие, слушая классику. Наконец, каждый пятый любитель классики является поклонником джаза, а четвертая часть джазовых фанатов слушает классику. Пять любителей рока считают себя поклонниками джаза и классики. Сколько человек было опрошено, если их число не превысило девяносто?

Ответ: 77 человек.

2. На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $36x^2-12x\cos(3\pi x+4y)+1=0$. Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

Ответ: $S_{\min}=\dfrac{\pi}{6}$.

3. Действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются тремя корнями уравнения $x^3-(p+4)x^2+(4p+5)x-4p-5=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $\left(x_1+1\right)^2+\left(x_2+1\right)^2+\left(x_3+1\right)^2$. При каком p оно реализуется?

Ответ: наименьшее значение $\dfrac{257}{16}$ реализуется при $p=-\dfrac{5}{4}$.

4. Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины A и, совершив 2018 прыжков, оказалась в вершине C. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $P(A)=\dfrac{3^{2018}-1}{4\cdot 3^{2018}}$.

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+432=0$ имеет целые положительные корни?

Ответ: 78+20=98 пар.

6. Окружность радиуса 4 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче FA, а точка D – на луче BF так, что $AC=BD=5$. Найти длину медианы треугольника CAD, проведенной из вершины A.

Ответ: $m_A=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-2$.