Очный отборочный тур олимпиады «Росатом» в регионах, осень 2019
11 класс, комплект 1

Вариант № 1

1. Петя совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 270 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Петя может в каждый момент времени t (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T=T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. На интервале времени $[0,5;1]$ Петя заметил, что $T>1$ и не меняется. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – 60 км/час. На каком расстоянии от пункта A находился автомобиль в этот момент? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 30 мин после начала движения?

2. Решить систему $\begin{cases} \cos x\cdot\cos(xy)=1 \\ 15y^2=6+y\cos\left(x/2\right) \end{cases}$.

3. Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел m и n числа $m+2019n$ и $n+2019m$ имеют общий простой делитель $d>5$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа d .

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-1;5]$. Найти вероятность того, что все корни квадратного уравнения $x^2-ax+a-3=0$ не меньше -1.

5. При каких значениях a уравнение $x^3-3(a-2)x+3(a-2)=0$ имеет ровно два корня? Найти эти корни.

6. На стороне AC треугольника ABC расположена точка D так, что $AD:AC=1:4$, при этом $2BD+BC=3AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке O пересекает BD в точках M и N. Найти угол MON.

Ответы и решения

1. По условию

$$T(t)=\frac{270-s(t)}{s(t)/t}=\frac{t(270-s(t))}{s(t)}=C>1,\ t\in[0,5;1].$$

Тогда $s(t)=\dfrac{270t}{t+C}$ на этом отрезке. Скорость движения

$v(t)=s'(t)=\dfrac{270C}{(t+C)^2}=60$ при $t=1$, т.е.

$$2c^2-5c+2=0\to C_1=2,\ C_2=\frac{1}{2}$$

Второе значение константы недопустимо по условию. Таким образом, $s(t)=\dfrac{270t}{t+2}$ и $s(1)=90$.

$$v(t)=\left.\frac{540}{(t+2)^2}\right|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{432}{5}=86,4 \text{ км/час.}$$

Ответ: 1) 90 км; 2) $86,4$ км/час

2. Возможны следующие случаи.

Случай 1. $\cos x=1,\ \ x=2\pi k, k\in Z, \cos xy=1$

$$\cos(x/2)=\cos(\pi k)=(-1)^k$$

Случай 1.а $k=2m,\ x=4\pi m$

$$15y^2-y-6=0\to\begin{cases} y_1=2/3\\ y_2=-3/5\end{cases}$$

Для $y=2/3$

$$\cos\left(\frac{2x}{3}\right)=\cos\left(\frac{8\pi m}{3}\right)=1\to\frac{8\pi m}{3}=2\pi s\to$$

$$\to 4m=3s\to\begin{cases}m=3t\\ s=4t\end{cases},t\in Z$$

Тогда получим первую серию решений $\begin{cases}x=12\pi t\\ y=2/3\end{cases}$.

Для $y=-3/5$

$$\cos\left(-\frac{3x}{5}\right)=\cos\left(\frac{12\pi m}{5}\right)=1\to\frac{12\pi m}{5}=2\pi s\to$$

$$\to 6m=5s\to\begin{cases}m=5t\\ s=6t\end{cases},t\in Z$$

Тогда получим вторую серию решений $\begin{cases}x=20\pi t\\ y=-3/5\end{cases}$.

Случай 1.б $k=2m+1,\ x=2\pi(2m+1)$

$$15y^2+y-6=0\to\begin{cases}y_3=-2/3\\ y_4=3/5\end{cases}$$

Для $y=-2/3$

$$\cos\left(-\frac{2x}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi(2m+1)}{3}\right)=1\to\frac{4\pi(2m+1)}{3}=2\pi s\to$$

$$\to 4m-3s=-2\to\to\begin{cases}m=3t-2\\ s=4t-2\end{cases},t\in Z$$

Тогда получим третью серию решений $\begin{cases}x=6\pi(2t-1)\\ y=-2/3\end{cases}$.

Для $y=3/5$

$$\cos\left(\frac{3x}{5}\right)=\cos\left(\frac{6\pi(2m+1)}{5}\right)=1\to\frac{6\pi(2m+1)}{5}=2\pi s\to$$

$$\to 6m-5s=-3\to\begin{cases}m=5t-3\\ s=6t-3\end{cases},t\in Z$$

Тогда получим четвертую серию решений $\begin{cases}x=10\pi(2t-1)\\ y=3/5\end{cases}$.

Случай 2. $\cos x=-1, \cos xy=-1, x=\pi(2k+1)$

$xy=\pi(2m+1), x=\pi(2k+1)\to y=\dfrac{2m+1}{2k+1}$ – рациональное число.

$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(2k+1)\right)=0, \forall k\in Z\to 15y^2=6\to y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ – иррациональное число. Случай 2 решений не имеет.

Ответ:

$$\begin{cases}x=12\pi t\\ y=2/3\end{cases}, \begin{cases}x=20\pi t\\ y=-3/5\end{cases}, \begin{cases}x=6\pi(2t-1)\\ y=-2/3\end{cases}, \begin{cases}x=10\pi(2t-1)\\ y=3/5\end{cases}, t\in Z$$

3. Если $m+2019n$ и $n+2019m$ делятся на d, то число

$$2019(m+2019n)-(n+2019m)=(2019^2-1)n$$

также делится на d. Если n делится на d, $m+2019n$ делится на d, то m делится на d и числа m и n взаимно простыми не являются. Следовательно, на d делится число

$$2019^2-1=2018\cdot 2020=2^3\cdot 5\cdot 101\cdot 1009.$$

Таким образом, наименьшим допустимым простым числом является $d=101$. Осталось найти взаимно простые m и n, на которых оно реализуется. Например, $m=102, n=1$. Тогда

$$m+2019n=102+2019=2121=21\cdot 101 \text{ и}$$

$$n+2019m=1+2019\cdot 102=205939=2039\cdot 101.$$

Ответ: $d_{\min}=101$.

4. Дискриминант квадратного трехчлена

$$D=a^2-4a+12=(a-2)^2+8>0$$

и поэтому уравнение всегда имеет два различных корня. Воспользуемся условиями расположения корней квадратного трехчлена. В случае положительного дискриминанта корни

$$f(x) = x^2 + px + q$$

лежат справа от $x=b$ тогда и только тогда, когда $f(b) \geq 0$ и абсцисса вершины графика также лежит справа от $x=b$. Это приводит к системе

$$\begin{cases} 2a - 2 \geq 0 \\ \dfrac{a}{2} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ a \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1$$

Таким образом, пространство всех событий составляет отрезок [-1;5], а пространство благоприятных событий – отрезок [1;5]. Вероятность искомого события $P(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{2}{3}$.

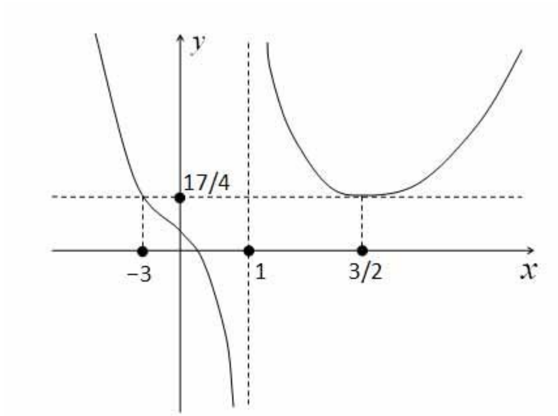
5. Разрешая уравнение относительно параметра, получаем

$$a = \frac{x^3 + 6x - 6}{3(x-1)}.$$

Производная

$$a'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{3(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{3(x-1)^2}$$

имеет только одну точку смены знака (с минуса на плюс) x=3/2. Следовательно, это единственная точка экстремума (минимума) $a(x)$, в которой a=17/4



Из графика функции видно, что два решения уравнение имеет в единственном случае a = 17/4. Само уравнение при этом значении параметра принимает вид

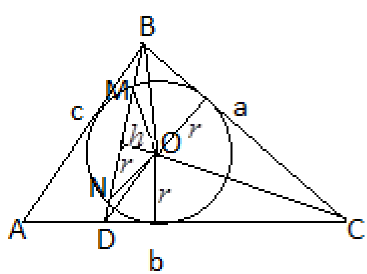
$$x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{27}{4} = 0$$

и имеет корни $x = -3$ и $x = 3/2$.

Ответ: a=17/4; x=–3 и x=3/2.

6. Введем обозначения: $a, b, c -$ стороны треугольника ABC, $h -$ высота треугольников BDO и MNO, $r -$ радиус вписанной окружности. Площадь треугольника BDC равна $\frac{3}{4}S_{ABC} = \frac{3}{8}(a+b+c)\cdot r$.

С другой стороны,



$S_{BDC} = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}r \cdot \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}BD \cdot h$. Приравнивая полученные выражения, получим

$$\frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}r \cdot \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}BD \cdot h = \frac{3}{8}(a+b+c) \cdot r \to 4BD \cdot h = (3c-a)r \to$$

$$\to \frac{h}{r} = \frac{3AB - BC}{4BD} = \frac{2BD}{4BD} = \frac{1}{2}.$$

Но

$$\frac{h}{r} = \sin \angle MNO \to \angle MNO = 30^0 \to \angle MON = 180^0 - 2 \cdot 30^0 = 120^0.$$

Ответ: 120^0.

Вариант № 2

1. Костя совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 320 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Костя может в каждый момент времени t (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T = T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – 60 км/час. На интервале времени $[1;2]$ Костя заметил, что $T > 1$ и не меняется. На каком расстоянии от пункта A находился автомобиль через два часа после начала движения? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 2 часа после начала движения?

Ответ: 1) 128 км; 2) $38,4$ км/час.

2. Решить систему $\begin{cases} \sin x \cdot \cos(xy) = -1 \\ 10y^2 - ytg(x/2) = 2 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{2}(4t+1) \\ y = -\dfrac{2}{5} \end{cases}, t \in Z$

3. Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел m и n числа $m+2024n$ и $n+2024m$ имеют общий простой делитель $d>7$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа d.

Ответ: $d_{\min} = 17$.

Например,

$$m=16,\ n=1 \to 2024m+n = 2024\cdot 16+1 = 32385 = 17\cdot 1905,$$

$$m+2024n = 16+2024 = 17\cdot 120$$

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $\left[-4;4\right]$. Найти вероятность того, что хотя бы один из корней квадратного уравнения $x^2-2ax-a-4=0$ по абсолютному значению не превосходит 1.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

5. При каких значениях a уравнение

$$x^3-12(a-1)x+4(a+2)=0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

Ответ:1) $a=2$; 2) $x_1=-4,\ x_2=2$.

6. На стороне AC треугольника ABC расположена точка D так, что $AD:AC=1:3$, при этом $BD+2BC=4AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке O пересекает BD в точках M и N. Найти угол MON.

Ответ: $2\arccos\dfrac{1}{6}$.

Вариант № 3

1. Вася совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 360 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Вася может в каждый момент времени t (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T=T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. На интервале времени $[0,5;1,5]$ Вася заметил, что $T>1$ и не меняется. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – 80 км/час. На каком расстоянии от пункта A находился автомобиль в этот момент? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 30 мин после начала движения?

Ответ: 1) 120 км; 2) $115,2$ км/час.

2. Решить систему $\begin{cases} \sin(xy)\cdot\cos x=1 \\ 8y^2=2y\sin\left(x/2\right)+15 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x=\pi(4t+1) \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\pi(4t+3) \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$, $t\in Z$

3. Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел m и n числа $m+1941n$ и $n+1941m$ имеют общий простой делитель $d>8$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа d.

Ответ: $d_{\min}=97$.

Например,

$$m=96,\ n=1\to 1941m+n=1941\cdot 96+1==97\cdot 1921,$$

$$m+1941n=96+1941=97\cdot 21$$

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-2;1]$. Найти вероятность того, что все корни квадратного уравнения $ax^2-x-4a+1=0$ по абсолютному значению превосходят 1.

Ответ: $P(A)=\dfrac{7}{9}$.

5. При каких значениях a уравнение

$$x^3+27(a+1)x+18(a-1)=0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

Ответ:1) $a=-2$; 2) $x_1=-3,\ x_2=6$.

6. На стороне AC треугольника ABC расположена точка D так, что $AD:AC=1:5$, при этом $5\sqrt{2}\cdot BD+2BC=8AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке O пересекает BD в точках M и N. Найти угол MON.

Ответ: 90^0.

Вариант № 4

1. Даня совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 300 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Даня может в каждый момент времени t (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T=T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $\left[0;t\right]$. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – 75 км/час. На интервале времени $\left[1;1,5\right]$ Даня заметил, что T не меняется. На каком расстоянии от пункта A находился автомобиль через 90 мин после начала движения и какова была его скорость?

Ответ: 1) 180 км; 2) 48 км/час .

2. Решить систему $\begin{cases} \sin x\cdot\sin(xy)=-1 \\ 6y^2=ytg\left(x/2\right)+1 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2}(4t+1), \\ y = \dfrac{1}{3}, \end{cases} t \in Z.$

3. Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел m и n числа $m+1947n$ и $n+1947m$ имеют общий простой делитель $d>9$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа d.

Ответ: $d_{\min} = 139.$

Например,

$$m = 138, n = 1 \to 1947m + n = 1947 \cdot 138 + 1 == 139 \cdot 1933,$$

$$m + 1947n = 138 + 1947 = 139 \cdot 15$$

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-1;4]$. Найти вероятность того, что оба корня квадратного уравнения $ax^2 + 4x + a - 3 = 0$ отрицательные.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{5}.$

5. При каких значениях a уравнение

$$x^3 + 48(a+2)x + 32(a-1) = 0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

Ответ: 1) $a = -3$; 2) $x_1 = -4,\ x_2 = 8.$

6. На стороне AC треугольника ABC расположена точка D так, что $AD:AC = 2:5$, при этом $BD + 2BC = 3AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке O пересекает BD в точках M и N. Найти угол MON.

Ответ: $2\arccos\dfrac{1}{5}.$