Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019
8 класс

Вариант № 1

1. Для проведения социологического исследования отобрали группу учеников по принципу: испытуемый должен быть либо веселым, либо рыжим (возможно и то и другое). Оказалось, что 40% весельчаков рыжие, а 60% рыжих – веселые ребята. Какую часть в общей группы испытуемых составляют невеселые рыжие?

2. Целые числа, десятичная запись которых читается слева направо и справа налево одинаково, назовем симметричными. Например, число 51315 симметричное, а 51351 – нет. Сколько существует пятизначных симметричных чисел, прибавление к которым числа 11 оставляет их симметричными?

3. В городе «N» 9 горизонтальных и 15 вертикальных улиц, из которых пара горизонтальных и пара вертикальных улиц формируют прямоугольную границу города, а остальные разбивают его на кварталы, имеющие форму квадратов со стороной 100м. Каждый квартал имеет адрес, состоящий из двух целых чисел $(i; j), i=1,2,..,8, j=1,2,...,14$ – номеров улиц ограничивающих его снизу и слева. Такси развозит пассажиров из одного квартала в другой, соблюдая следующие правила: 1) посадка и высадка производятся в любой точке границы квартала по желанию пассажира; 2) запрещается заезжать внутрь квартала; 3) подвоз осуществляется по кратчайшему пути; 4) за каждые 100м проезда взимается плата 1 монета (округление расстояния до кратного 100м в пользу водителя). Сколько кварталов в городе? Какую максимальную и минимальную плату за подвоз из квартала $(2,3)$ в квартал $(5;12)$ может запросить водитель у пассажира, не нарушая правила.

4. Сколькими различными способами число 2020 можно представить в виде суммы 13 натуральных слагаемых, отличающихся друг от друга не более, чем на 2?

5. Блоха Кузя может совершить на плоскости прыжок в любом направлении на расстояние ровно 13 мм. Ее задача добраться из точки A в точку B на плоскости, расстояние между которыми

2019 см. Какое наименьшее число прыжков она должна при этом совершить?

Ответы и решения

1. Пусть x – число веселых испытуемых; y – число рыжих, а z – общее число испытуемых. Согласно условию,

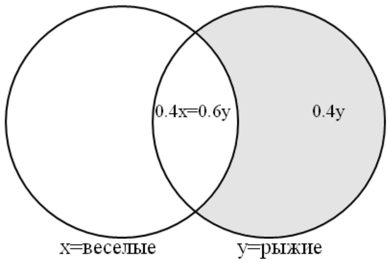
$$\frac{40}{100}x=\frac{60}{100}y,\quad z=x+\frac{40}{100}y=x+\frac{2}{5}y,$$

Имеем $2x=3y.$ Выразим все переменные через параметр $t\in\mathbb{N}$:

$$x=3t,\quad y=2t,\quad z=3t+\frac{4t}{5}=\frac{19}{5}t.$$

Поскольку z – натуральное число, то $t=5k,\ \mathrm{k}\in\mathbb{N},$ следовательно, $x=15k,\ y=10k,\ z=19k.$ Тогда число невеселых рыжих равно $\frac{2}{5}y=4k.$ Отношение числа невеселых рыжих к общему числу испытуемых равно $\dfrac{\frac{2}{5}y}{z}=\dfrac{4k}{19k}=\dfrac{4}{19}.$

Ответ: $\dfrac{4}{19}.$

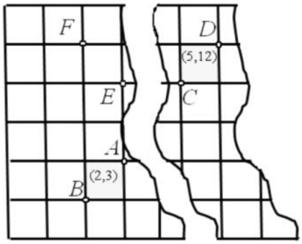


2. Пусть $A=\overline{abcba}$ – пятизначное симметричное число, $a\neq 0.$ Если $1\le a\le 8,$ то последней цифрой числа $A+11$ будет $a+1$, а значит и первая цифра в записи $A+11$ должна быть $a+1$. Это возможно только при переносе единицы разряда, т.е. при $b=c=9.$ Тогда $A+11=(a+1)999(a+1)$– симметричное число при любых $a=1,2,...,8$. Вариант $a=9$ невозможен, поскольку $A+11$ заканчивается нулем, а значит, в силу симметрии, должно с нуля начинаться. Но число не может начинаться с нуля.

Общее количество решений равно количеству возможностей выбора числа $a,$ то есть восьми.

Ответ: восемь чисел вида $\overline{a999a}$, где $a = 1, 2, ..., 8.$

3. Девять горизонтальных и пятнадцать вертикальных улиц образуют всего $(9-1)(15-1) = 112$ квадратных кварталов города «N». Пусть на плане A и $C-$ ближайшие точки кварталов $(2;3)$ и $(5;12)$, тогда путь между ними (по правилам) имеет



длину $100\left(|5-2|+|12-3|-2\right) = 1000.$ Один из возможных маршрутов – движение по ломаной $AEC.$ Пусть теперь B и $D-$ наиболее удаленные точки кварталов, тогда путь между ними (по правилам) имеет длину $100\left(|5-2|+|12-3|+2\right) = 1400.$ Один из возможных маршрутов – движение по ломаной $BFD.$ Следовательно минимальное количество монет равно $c_{\min} = 1000:100 = 10,$ а максимальное – $c_{\max} = 1400:100 = 14.$

Ответ: 112 кварталов; $c_{\min} = 10$ монет, $c_{\max} = 14$ монет.

4. Пусть три натуральных слагаемых, отличающихся друг от друга не более, чем на 2, это $x,$ $x+1$ и $x+2,$ и их кратности равны соответственно $m,$ n и $k.$ Тогда имеем систему уравнений с ограничениями:

$$\begin{cases} mx + n(x+1) + k(x+2) = 2020, \\ m + n + k = 13, \\ x \geq 1,\ n > 0,\ k > 0,\ n + k < 13. \end{cases}$$

Получаем, что $13x + n + 2k = 2020,$ тогда $n = 2020 - 2k - 13x,$ а $n + k = 2020 - 13x - k.$ Значит, должны быть выполнены условия

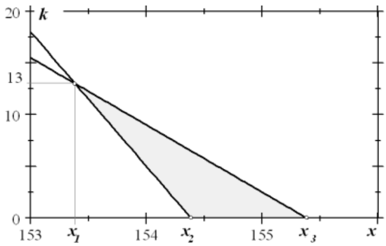
$$\begin{cases} 2020-2k-13x \ge 0, \\ 2020-13x-k \le 13, \\ x \ge 1, \;\; k>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k \le \left(2020-13x\right), \\ k \ge 2007-13x, \\ x \ge 1, \; k>0. \end{cases}$$

Множество допустимых точек на плоскости (k, x), представлено на рисунке:

$$x_1 = \frac{1994}{13} \approx 153{,}4,$$

$$x_2 = \frac{2007}{13} \approx 154{,}4,$$

$$x_3 = \frac{2020}{13} \approx 155{,}4.$$



Таким образом, для меньшего натурального слагаемого x существует два допустимых значения: $x=154$ или $x=155$. При этом $n+2k=2020-13x$. Составим таблицу возможных значений $m,\, k,\, n,$ учитывая, что $n>0, k>0, m=13-n-k>0.$

Если $x=154,$ тогда $n+2k=2020-154\cdot 13=18,$ при этом имеется 5 возможных наборов значений кратностей:

k	n	m
5	8	0
6	6	1
7	4	2
8	2	3
9	0	4

Если $x=155,$ тогда $n+2k=2020-155\cdot 13=5,$ при этом имеется 3 возможных набора значений кратностей:

k	n	m
0	5	8
1	3	8
2	1	10

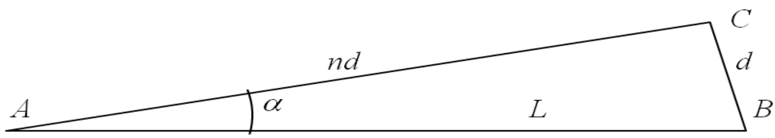
Таким образом, существует $5+3=8$ различных способов представить число 2020 в виде суммы натуральных слагаемых, отличающихся друг от друга не более, чем на 2.

Ответ: 8 способов.

5. Пусть расстояние между точками A и B равно L мм, а длина прыжка блохи равно d мм. Если бы L делилось на d нацело, то стратегия блохи прыгать по прямой, соединяющей точки A и $B,$ была бы оптимальной. Для достижения цели понадобилось бы сделать $\frac{L}{d}=n,\ n\in\mathbb{N}$ прыжков. По условию $L=20190,\ d=13.$ Таким образом, $\frac{L}{d}=\frac{20190}{13}=1553.07\ldots,$ и, двигаясь по прямой $AB,$ блоха не сможет за целое число шагов $n=1553$ добраться из точки A в точку B. Покажем, что существует стратегия, при которой можно добраться за $n+1$ шаг.

Поскольку имеет место двойное неравенство $nd<L<(n+1)d,$ то существует треугольник со сторонами $BC=d=13,\quad AC=nd=20189,\quad AB=L=20190,$ в котором по теореме косинусов

$$\alpha=\arccos\frac{L^2+n^2d^2-d^2}{2\cdot nd\cdot L}=\arccos\frac{20190^2+20189^2-13^2}{2\cdot 20189\cdot 20190}\approx 0.04^\circ.$$



Тогда блоха, делая 1553 прыжка в направлении, составляющем угол α с направлением луча $AB,$ попадает в точку C. Оттуда она последним, 1554, прыжком оказывается в точке B.

Замечание: Существуют и другие стратегии, позволяющие за 1554 прыжка добраться до точки B.

Ответ: $n_{\min}=1554$ прыжка.

Вариант № 2

1. На яхте, совершающей морской круиз, собрались люди по следующему принципу: одни богаты, другие счастливые (возможно и то и другое). Оказалось, что 30% богатых счастливы, а 20% счастливых – богаты. Какую часть от общего числа пассажиров яхты составляют богатые с дефицитом счастья?

Ответ: $\frac{7}{22}$.

2. Целые числа, десятичная запись которых читается слева направо и справа налево одинаково, назовем симметричными. Например, число 513315 симметричное, а 513325 – нет. Сколько существует шестизначных симметричных чисел, прибавление к которым числа 110 оставляет их симметричными?

Ответ: 81 число вида $\overline{ab99ba}$, где $a=1,2,...,9,\ b=0,1,2,...,8.$

3. В городе «N» 12 горизонтальных и 16 вертикальных улиц, из которых пара горизонтальных и пара вертикальных улиц формируют прямоугольную границу города, а остальные разбивают его на кварталы, имеющие форму квадратов со стороной 100м. Каждый квартал имеет адрес, состоящий из двух целых чисел $(i;j), i=1,2,..,11, j=1,2,...,15$ – номерам улиц, ограничивающих его снизу и слева. Такси развозит пассажиров из одного квартала в другой, соблюдая следующие правила: 1) посадка и высадка производятся в любой точке границы квартала по желанию пассажира; 2) запрещается заезжать внутрь квартала; 3) подвоз осуществляется по кратчайшему пути; 4) за каждые 100м проезда взимается плата 1 монета (округление расстояния до кратного 100м в пользу водителя). Сколько кварталов в городе? Какую максимальную и минимальную плату за подвоз из квартала $(7,2)$ в квартал $(2;1)$ может запросить водитель у пассажира, не нарушая правила.

Ответ: 165 кварталов; $c_{\min}=4$ монет, $c_{\max}=8$ монет.

4. Сколькими различными способами число 2021 можно представить в виде суммы 25 натуральных слагаемых, отличающихся друг от друга не более, чем на 2 ?

Ответ: 14

5. Блоха Кузя может совершить на плоскости прыжок в любом направлении на расстояние ровно 15 мм. Ее задача добраться из точки A в точку B на плоскости, расстояние между которыми 2020 см. Какое наименьшее число прыжков она должна при этом совершить?

Ответ: $n_{\min} = 1347$ прыжков.

Вариант № 3

1. В кондитерской находились либо люди с лишним весом, либо любители сладкого (возможно и то и другое). Оказалось, что 80% людей с излишним весом любят сладкое, а 70% сладкоежек – имеют лишний вес. Какая часть собравшихся любит сладкое, но не страдают лишним весом?

Ответ: $\dfrac{12}{47}$.

2. Целые числа, десятичная запись которых читается слева направо и справа налево одинаково, назовем симметричными. Например, число 5134315 симметричное, а 5134415 – нет. Сколько существует семизначных симметричных чисел, прибавление к которым числа 1100 оставляет их симметричными?

Ответ: 810 чисел вида $\overline{abc9cba}$, где $a = 1, 2, \ldots, 9$, $b = 0, 1, 2, \ldots, 9$, $c = 0, 1, 2, \ldots, 8$.

3. В городе «N» 7 горизонтальных и 13 вертикальных улиц, из которых пара горизонтальных и пара вертикальных улиц формируют прямоугольную границу города, а остальные разбивают его на кварталы, имеющие форму квадратов со стороной 100м. Каждый квартал имеет адрес, состоящий из двух целых чисел $(i; j), i = 1, 2, .., 6, j = 1, 2, \ldots, 12$ – номерам улиц, ограничивающих его снизу и слева. Такси развозит пассажиров из одного квартала в другой, соблюдая следующие правила: 1) посадка и высадка производятся в любой точке границы квартала по желанию пассажира; 2) запрещается заезжать внутрь квартала; 3) подвоз осуществляется по кратчайшему пути; 4) за каждые 100м проезда взимается плата 1 монета (округление расстояния до кратного 100м в пользу водителя). Сколько кварталов в городе? Какую максимальную и минимальную плату за подвоз из квартала $(4, 2)$ в квартал $(1; 9)$ может запросить водитель у пассажира, не нарушая правила.

Ответ: 72 квартала; $c_{\min} = 8$ монет, $c_{\max} = 12$ монет.

4. Сколькими различными способами число 2019 можно представить в виде суммы 41 натуральных слагаемых, отличающихся друг от друга не более, чем на 2?

Ответ: 22.

5. Блоха Кузя может совершить на плоскости прыжок в любом направлении на расстояние ровно 17 мм. Ее задача добраться из точки A в точку B на плоскости, расстояние между которыми 1947 см. Какое наименьшее число прыжков она должна при этом совершить?

Ответ: $n_{\min} = 1146$ прыжков.

Вариант № 4

1. В туристическую группу попали либо любители фотографировать, либо люди, умеющие играть на гитаре (возможно и то и другое). Выяснилось, что 10% фотографов умеют играть на гитаре, а 60% владеющих гитарой – фотографы. Какая часть туристической группы играет на гитаре, но не любит фотографировать?

Ответ: $\dfrac{1}{16}$.

2. Целые числа, десятичная запись которых читается слева направо и справа налево одинаково, назовем симметричными. Например, число 513151315 симметричное, а 513152315 – нет. Сколько существует девятизначных симметричных чисел, прибавление к которым числа 11000 оставляет их симметричными?

Ответ: 8100 чисел вида $\overline{abcd9dcba}$, где $a = 1, 2, ..., 9$, $b = 0, 1, 2, ..., 9$, $c = 0, 1, 2, ..., 9$, $d = 0, 1, 2, ..., 8$.

3. В городе «N» 10 горизонтальных и 12 вертикальных улиц, из которых пара горизонтальных и пара вертикальных улиц формируют прямоугольную границу города, а остальные разбивают его на кварталы, имеющие форму квадратов со стороной 100м. Каждый квартал имеет адрес, состоящий из двух целых чисел $(i; j), i = 1, 2, .., 9, j = 1, 2, ..., 11$ – номерам улиц, ограничивающих его снизу и слева. Такси развозит пассажиров из одного квартала в другой, соблюдая следующие правила: 1) посадка и высадка производятся в любой точке границы квартала по желанию пассажира; 2) запрещается заезжать внутрь квартала; 3) подвоз осуществляется по кратчайшему пути; 4) за каждые 100м проезда взимается плата 1 монета (округление расстояния до кратного 100м в пользу водителя). Сколько кварталов в городе? Какую максимальную и минимальную плату за подвоз из квартала $(7,1)$ в квартал $(2;10)$ может запросить водитель у пассажира, не нарушая правила.

Ответ: 99 кварталов; $c_{\min} = 10$ монет, $c_{\max} = 14$ монет.

4. Сколькими различными способами число 2024 можно представить в виде суммы 8 натуральных слагаемых, отличающихся друг от друга не более, чем на 2 ?

Ответ: 7.

5. Блоха Кузя может совершить на плоскости прыжок в любом направлении на расстояние ровно 19 мм. Ее задача добраться из точки A в точку B на плоскости, расстояние между которыми 1812 см. Какое наименьшее число прыжков она должна при этом совершить?

Ответ: $n_{\min} = 954$ прыжка.