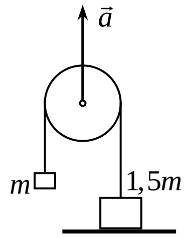
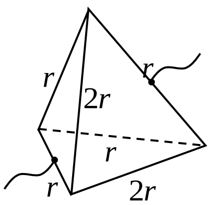
Отборочный тур
Отраслевой физико-математической олимпиады «Росатом»,
2019-2020 учебный год,
физика, 11 класс
(комплект 1)

1. Человек начинает бежать по эскалатору, движущемуся вверх, с ускорением a. Добежав до середины эскалатора, человек мгновенно останавливается (относительно эскалатора), разворачивается и начинает бежать вниз с таким же по величине ускорением. В течение какого времени человек будет находиться на эскалаторе? Длина эскалатора l, скорость u.

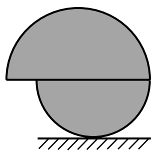
2. С одноатомным идеальным газом происходит процесс, в котором его теплоемкость остается постоянной, а газ совершает работу A ($A>0$). Затем с газом происходит изохорический процесс, в котором его температура возвращается к первоначальному значению, а газ получает количество теплоты $Q=3A/2$. Определить молярную теплоемкость газа в первом процессе.



3. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая веревка, прикрепленная к двум телам массой m и $1,5m$ (см. рисунок). Тело массой m висит, тело массой $1,5m$ лежит на горизонтальной опоре. С каким ускорением надо поднимать блок, чтобы второе тело оторвалось от опоры?



4. Из проволоки сделали пирамиду, сопротивления всех ребер которой показаны на рисунке. Пирамиду включили в электрическую цепь между серединами противоположных сторон (см. рисунок). Найти сопротивление пирамиды.



5. Из листа фанеры вырезали два полудиска - радиуса r и $R=1,2r$ и склеили их по диаметру так, как показано на рисунке. Существует ли у такой системы положение равновесия с опорой на меньший диск? И если да, то чему равен угол между общим диаметром полудисков и поверхностью в положении равновесия. Как будет меняться этот угол в пределе $R\to r$? А в пределе $R\to\infty$? Будет ли это положение устойчивым? Объяснить полученные результаты. **Указание.** Центр тяжести полудиска радиуса R находится на расстоянии $4R/3\pi$ от его центра.

Решения

1. Зависимость координаты человека x от времени t в системе координат, связанной с землей с началом координат, находящимся в нижней точке эскалатора, и осью x, направленной вдоль эсклатора, имеет вид

$$x(t)=ut+\frac{at^2}{2} \qquad (*)$$

Когда человек добежал до середины эскалатора, закон (*) дает

$$\frac{at_1^2}{2}+ut_1-\frac{l}{2}=0$$

где t_1 - время движения человека вверх до середины эскалатора. Отсюда

$$t_1=\frac{-u+\sqrt{u^2+al}}{a}$$

(второй корень является отрицательным). Закон движения человека вниз (в той же системе координат; время отсчитывается от момента разворота) имеет вид

$$x(t)=\frac{l}{2}+ut-\frac{at^2}{2}$$

Для возвращения человека в нижнюю точку эскалатора этот закон дает

$$\frac{at_2^2}{2}-ut_2-\frac{l}{2}=0$$

где t_2 - время движения человека до нижней точки эскалатора. Отсюда

$$t_2=\frac{u+\sqrt{u^2+al}}{a}$$

(второй корень является отрицательным). Поэтому время возращения человека в нижнюю точку эскалатора равно

$$\Delta t=t_1+t_2=\frac{2\sqrt{u^2+al}}{a}$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использован правильный закон равноускоренного движения для подъема – 0,5 балла
2. Правильное время подъема – 0,5 балла
3. Использован правильный закон равноускоренного движения для спуска – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

2. Поскольку во втором (изохорическом) процессе $Q>0$, то газ в нем нагревается $\Delta T_2>0$. Следовательно, изменение температуры газа в первом процессе отрицательно $\Delta T_1=-\Delta T_2<0$. Поэтому применение первого закона термодинамики к первому процессу дает

$$\nu C\Delta T_1=\frac{3}{2}\nu R\Delta T_1+A \qquad \Rightarrow \qquad -\nu C\Delta T_2=-\frac{3}{2}\nu R\Delta T_2+A$$

где ν - количество вещества (число молей) газа, C - его молярная теплоемкость. Здесь учтено, что количество теплоты, полученное газом в первом процессе, есть $Q_1=\nu C\Delta T_1$. Отсюда

$$\Delta T_2=\frac{A}{\nu\left((3/2)R-C\right)}$$

Поэтому применение первого закона термодинамики ко второму процессу дает

$$Q=\frac{3}{2}\nu R\Delta T_2=\frac{3}{2}\frac{AR}{\left((3/2)R-C\right)} \qquad \Rightarrow \qquad C=\frac{3}{2}R\frac{Q-A}{Q}=\frac{1}{2}R$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения - использование первого начала термодинамики - 0,5 балла
2. Правильное использование первого начала термодинамики для первого процесса – 0,5 балла

3. Правильное использование первого начала термодинамики для второго процесса – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

3. При нулевом ускорении блока сила натяжения веревки равна mg. Если «включить» ускорение блока, тело массой m начнет подниматься вверх, и, следовательно, сила натяжения веревки увеличится. При некотором ускорении блока сила натяжения станет равна $1{,}5mg$, и тогда второе тело оторвется от опоры. Для нахождения этого ускорения рассмотрим случай малых ускорений блока (когда второе тело от опоры не отрывается), найдем силу натяжения веревки, и исследуем возможность ее увеличения до величины $1{,}5mg$. Итак, пока тело с массой $1{,}5m$ не отрывается от опоры второй закон Ньютона для тела массой m дает (в проекциях на ось, направленную вертикально вверх)

$$T - mg = ma_1$$

где T - сила натяжения веревки, a_1 - ускорение тела массой m. Пока второе тело не отрывается от опоры, ускорение тела массой m будет в два раза больше ускорения блока, поскольку при смещении блока на некоторое расстояние тело массой m будет подниматься на вдвое большее расстояние. Поэтому

$$T = 2ma + mg$$

Из этой формулы следует, что сила натяжения веревки становится равной $1{,}5mg$ при

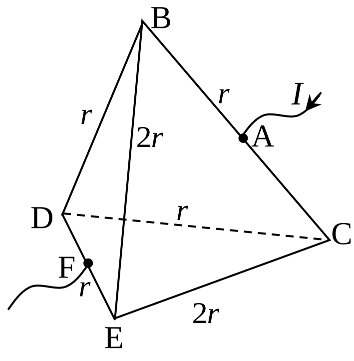
$$a = \frac{g}{4}$$

Следовательно, второе тело оторвется от опоры при

$$a \geq \frac{g}{4}$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильно использован второй закон Ньютона для случая неотрыва тела от поверхности – 0,5 балла
2. Правильная связь ускорений двух тел для случая неортыва третьего тела от поверхности – 0,5 балла
3. Правильное условие отрыва третьего тела от поверхности – равенство нулю силы реакции опоры – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

4. Пусть в пирамиду в узел А (см. рисунок) втекает ток I. Найдем падение напряжения на пирамиде, а затем и ее сопротивление. Очевидно (благодаря симметрии цепи), что в узле А ток делится пополам.



Найдем как делится ток в узлах В и С. Пусть в узле В ток делится так – ток I_1 течет через проводник с сопротивлением R, ток I_2 течет через сопротивление $2R$. (Конечно, благодаря симметрии цепи, и в узле С ток разделится в той же пропорции). Поэтому на участке DF течет ток $2I_1$, на участке EF - $2I_2$. Поскольку падение напряжения на участке AF, вычисленное по проводникам AB-BD-DF, равно падению напряжения, вычисленному по проводникам AC-CE-EF, имеем для токов I_1 и I_2

$$I_1 + I_2 = \frac{I}{2}$$

$$\frac{I}{2}\cdot\frac{r}{2} + I_1\cdot r + 2I_1\cdot\frac{r}{2} = \frac{I}{2}\cdot\frac{r}{2} + I_2\cdot 2r + 2I_2\cdot\frac{r}{2}$$

Отсюда находим

$$I_1 = \frac{3}{10}I, \qquad I_2 = \frac{2}{10}I$$

А теперь и напряжение между узлами A и B

$$U = \frac{I}{2}\cdot\frac{r}{2} + \frac{3I}{10}\cdot r + \frac{6I}{10}\cdot\frac{r}{2} = \frac{17}{20}Ir$$

Отсюда получаем

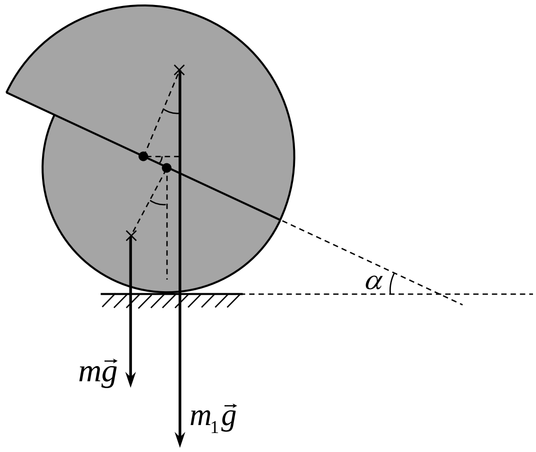
$$R_{об} = \frac{U}{I} = \frac{17}{20}r$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – по заданному току найти напряжение U_{AF} (с использованием симметрии цепи) – 0,5 балла
2. Использование закона Ома для установления связи токов в разных коленах цепи - 0,5 балла
3. Правильное нахождение всех напряжений по закону Ома для участка цепи - 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

5. Понятно, что положения равновесия, отклоненного влево от положения дисков, показанного на рисунке, нет. Действительно, центр тяжести большого диска находится левее точки касания нижнего диска и опоры, а при повороте всей конструкции влево центр тяжести большого диска смещается больше, чем центр тяжести малого, и моменты сил тяжести для большего и меньшего дисков относительно точки опоры не смогут компенсировать друг друга. Таким образом, если диск предоставить самому себе в положении, показанном на рисунке в условии, он упадет. Но условие задачи поставлено по-другому – необходимо найти положение равновесия склеенных полудисков с опорой на меньший диск, причем необязательно то, куда эта конструкция придет сама из положения, показанного на рисунке. Поэтому отклоним диски вправо и попробуем найти равновесие в таком положении. Ясно, что такое равновесие можно найти даже для очень большого (и тяжелого) верхнего диска: если его отклонить так, что центр тяжести большого диска будет над точкой касания, и тогда его момент может оказаться небольшим (малое плечо) и может быть компенсирован даже небольшим моментом малого диска.

Итак, пусть диски отклонены от положения, показанного на рисунке, так, что угол, который составляет их диаметр с землей, равен α (см. рисунок; для упрощения вычисления плеч сил все углы α отмечены на рисунке дугами). В положении равновесия сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Поскольку силы тяжести полудисков приложены к их центрам тяжести, а центры тяжести находятся напротив их центров на расстоянии $4R/3\pi$ от центра, то условие моментов относительно точки касания нижнего диска и земли дает

$$mg\gamma r\sin\alpha = m_1 g\left(\gamma R\sin\alpha - \left(R-r\right)\cos\alpha\right)$$



где m и m_1 - массы малого и большого полудисков соответственно, r и R - их радиусы, $\gamma = 4/3\pi$ - отношение расстояние от центра тяжести полудиска до его центра к радиусу. Поскольку массы полудисков пропорциональны квадратам их радиусов, из этой формулы находим

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R_1^2}{\gamma\left(R_1^2 + RR_1 + R^2\right)} = \frac{3\pi R_1^2}{4\left(R_1^2 + RR_1 + R^2\right)} \approx 0,30\pi \approx 0,93 \quad (*)$$

Неожиданным является предельный переход $R \to r$.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 \quad (\alpha \approx 38°) \qquad (**)$$

И это при том, что в этом случае диск является однородным, и, казалось бы, его диаметр должен занять горизонтальной положение. Эти рассуждения неверны. Действительно, поскольку однородный диск может занимать любое положение; то он займет такое положение, которое будет положением устойчивого равновесия для бесконечно малого отличия дисков друг от друга, которое и определяется формулой (*).

При $R \to \infty$ из формулы (*) получаем

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3\pi}{4} = 2,355 \quad (\alpha \approx 67°) \qquad (***)$$

Этот переход еще более удивительный. Ведь, казалось бы, при бесконечных размерах верхнего полудиска момента силы тяжести, действующей на нижний полудиск, не сможет его скомпенсировать. Неверно! Компенсация момента верхнего полудиска может произойти, но только при нулевом плече силы тяжести относительно точки касания (тогда даже при $R \to \infty$ момент силы тяжести, действующей на верхний полудиск, относительно точки опоры будет конечным). Именно к такому положению и приводит формула (***). Действительно, при $R \gg r$ центр тяжести верхнего полудиска окажется в точности над точкой касания нижнего полудиска и опоры.

Очевидно, все рассмотренные равновесия являются неустойчивыми. Действительно, если предоставить полудиски самим себе из положения, показанного на рисунке в условии задачи. Тогда вся конструкция будет падать влево. Поэтому ее отклонение вправо приводит к увеличению потенциальной энергии склееных полудисков. А поскольку положение равновесия – одно, то оно отвечает максимуму потенциальной энергии. Т.е. это положение равновесия – неустойчиво.

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное использование условия равновесия тела – равенство нулю моментов сил относительно центра нижнего полудиска – 0,5 балла
2. Правильное уравнение моментов – 0,5 балла

3. Правильный ответ для угла, который плоскость касания полудисков составляет с горизонтом, анализ устойчивости равновесия – 0,5 балла
4. Правильный анализ и объяснение предельных случаев, которые сформулированы в условии – 0,5 балла

Оценка работы. Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. «Полуцелая» оценка не округляется.