Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс, Москва, Россия, март 2020

Вариант № 1

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений для функций вида

$$f(x) = \frac{ax-5}{x+a-2}?$$

2. Каждое из четырех чисел $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2$ является результатом одной из четырех арифметических операций $\sin x + \sin y$, $\sin x - \sin y$, $\sin x \cdot \sin y$, $\sin x : \sin y$ над числами $\sin x$, $\sin y$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

3. При каких a решение (x, y, z) системы $\begin{cases} x + 2y = a \\ 2y + 3z = a + 1 \\ x + 3z = 5 \end{cases}$ удовлетворяет уравнению $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 19$? Найти эти решения.

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2020, для которого $P(5) = 2019$, $P(6) = 2021$ и $P(4+x) = P(8-x)$ для всех x.

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $45^0, 60^0, 75^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответы и решения

1. Рассмотрим произвольную дробно-линейную функцию $f(x)=\dfrac{ex+b}{cx+d}, ed-bc\neq 0, c\neq 0$. Выясним при каком соотношении коэффициентов e,b,c,d она совпадает со своей обратной

$$f(f(x))=\frac{e\cdot\dfrac{ex+b}{cx+d}+b}{c\cdot\dfrac{ex+b}{cx+d}+d}=\frac{(e^2+bc)x+(eb+bd)}{c(e+d)x+(d^2+bc)}\equiv x,\ x\neq-\frac{d}{c}.\qquad (*)$$

Если $(e+d)\neq 0$, то тождество (*) невозможно, поскольку равенство правой и левой частей (*) может быть не более, чем при двух значениях x. Если $e+d=0$, то

$$f(f(x))=\frac{\left(e^2+bc\right)x}{\left(e^2+bc\right)}\equiv x,\ \ e^2+bc\neq 0.$$

Таким образом, уравнение 1) имеет бесконечное число решений, если

$$\begin{cases} a=-(a-2), \\ a^2-5\neq 0, \\ a(a-2)+5\neq 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $a=1$. Соответствующая функция $f(x)=\dfrac{x-5}{x-1}$.

Уравнение 2) имеет бесконечное число решений, помимо $a=1$, в случае, когда дробно-линейная ($e+d\neq 0$) функция $g(x)=f(f(x))$ совпадает со своей обратной. Согласно (*) это бывает, если

$$e^2+bc=-\left(d^2+bc\right)\quad\text{или}\quad e^2+2bc+d^2=0 \qquad (**)$$

В условиях варианта 1 соотношение (**) примет вид:

$$a^2-10+(a-2)^2=0\quad\text{или}\quad a^2-2a-3=0.$$

Отсюда находим $a=-1$ или $a=3$. Второе условие $\left(e^2+bc\right)^2+c(eb+bd)(e+d)\neq 0$ при $a=-1$ и $a=3$ выполняется. Соответствующие этим значениям функции

$$f(x)=\frac{-x-5}{x-3},\quad f(x)=\frac{3x-5}{x+1}$$

Ответ: 1) $a=1,\quad f(x)=\dfrac{x-5}{x-1};$

2) $a=1,\quad f(x)=\dfrac{x-5}{x-1};\ a=-1,\ ,\ f(x)=\dfrac{-x-5}{x-3};$

$a=3,\quad f(x)=\dfrac{3x-5}{x+1}.$

2. Если число 2 является суммой $\sin x+\sin y$, то $\sin x=1,$ $\sin y=1,$ а $\sin x-\sin y=0,$ но такого числа нет среди предложенных. Аналогично, если $\sin x-\sin y=2$, то $\sin x=1,$ $\sin y=-1,$ а $\sin x+\sin y=0,$ а такого числа нет. Произведение $\sin x\cdot\sin y$ никогда не равно 2, поскольку при $\sin x=\pm 1,$ $\sin y=\pm 1$ имеем $\sin x-\sin y=0$, а такого числа нет среди заданных. Тогда единственной возможностью остается вариант $\sin x:\sin y=2,$ тогда $\sin x=2\sin y.$

Случай 1. $\sin x+\sin y=\dfrac{1}{2}.$ Имеем $3\sin y=\dfrac{1}{2}.$ Тогда $\sin y=\dfrac{1}{6},$ $\sin x=\dfrac{1}{3},$ $\sin x-\sin y=\dfrac{1}{6},$ а такого числа среди предложенных нет. Следовательно, случай 1 не реализуется.

Случай 2. $\sin x+\sin y=\dfrac{3}{2}.$ Имеем $3\sin y=\dfrac{3}{2}.$ Тогда $\sin y=\dfrac{1}{2},$ $\sin x=1,$ $\sin x-\sin y=\dfrac{1}{2},$ $\sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{2}.$ Это означает, что случай 2 возможен. Он реализуется на парах $\left(x;y\right)$:

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z,\ y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z,\ y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$

3. Выразим x из 3 уравнения

$$x=-3z+5.$$

Подставим его в 1 уравнение

$$\begin{cases}-3z+2y=a-5,\\ 2y+3z=a+1.\end{cases}$$

Складывая 1 и 2 уравнения, получим $4y=2a-2$. Отсюда находим $y=\frac{a-2}{2}$. Тогда $z=\frac{a+1-2y}{3}=1$, а $x=2$.

Подставим найденное нами решение в уравнение сферы

$$1+\frac{(a+2)^2}{4}+9=19.$$

Перепишем это уравнение в виде $(a+2)^2=36$. Отсюда находим $a_1=4$, $a_2=-8$. При $a_1=4$ получаем $x=2, y=1, z=1$, а при $a_2=-8$ $x=2,\ y=-5,\ z=1$.

Ответ: 1) при $a=4,\ x=2, y=1, z=1;$

2) при $a=-8$ $x=2,\ y=-5,\ z=1.$

4. График функции $y=P(x)$ симметричен относительно прямой $x=x_0$, если $P(x_1)=P(x_2)$ для любых $x_1<x_0<x_2$, таких, что $x_0-x_1=x_2-x_0$ или $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$. В нашем случае $x_1=4+x$, $x_2=8-x$. Тогда $x_0=\frac{(4+x)+(8-x)}{2}=6$. Следовательно, график искомого многочлена, если он существует, симметричен относительно вертикальной прямой $x=6$. Рассмотрим многочлен $\hat{P}(x)=a(x-6)^{2020}+b$. Он симметричен относительно прямой

$x=6$ и имеет степень 2020. Подберем константы a и b так, чтобы выполнялись условия задачи

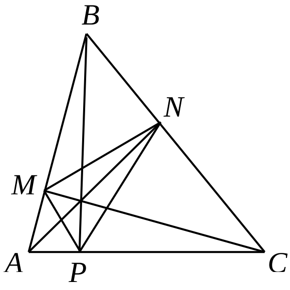
$$\begin{cases} \hat{P}(6)=b=2021, \\ \hat{P}(5)=a+b=2019. \end{cases}$$

Отсюда находим $a=-2$, $b=2021$. Подставляя эти значения, получаем искомый многочлен $P(x)=-2(x-6)^{2020}+2021.$

Ответ: существует, например, $P(x)=-2(x-6)^{2020}+2021.$

Точки M,N,P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $45^0, 60^0, 75^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

5. Пусть α,β,γ – углы треугольника ABC при вершинах A,B,C соответственно. Треугольник AMP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos\alpha$. Действительно, они имеют общий угол и $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AM}{AC}=\cos\alpha.$. Аналогично, треугольники BNM и CPN подобны треугольнику ABC с коэффициентами подобия $\cos\beta$ и $\cos\gamma,$ соответственно. Тогда



$$S_{AMP}:S_{ABC}=\cos^2\alpha, S_{BMN}:S_{ABC}=\cos^2\beta, S_{CPN}:S_{ABC}=\cos^2\gamma.$$

$$S_{MNP}=S_{ABC}-S_{AMP}-S_{BNM}-S_{CPN}=S_{ABC}\left(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma\right).$$

В условии варианта 1

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1+\cos150^0}{2}=\frac{5-\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\left(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}.$

Ответ: $\left(\sqrt{3}-1\right):4.$

Вариант № 2

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x))=x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x))))=x$ имеет бесконечное число решений для функций вида

$$f(x)=\frac{(2a+8)x-5}{2x-a}\ ?$$

Ответ: 1) $a=-8,\ \ f(x)=\dfrac{-8x-5}{2x+8};$

2) $a=-8,\ \ f(x)=\dfrac{-8x-5}{2x+8};\ \ a=-2,\ \ f(x)=\dfrac{4x-5}{2x+2};$

$a=-\dfrac{22}{5},\ \ f(x)=\dfrac{-4x-25}{10x+22}.$

2. Каждое из четырех чисел $-\sqrt{2};-1;-\dfrac{1}{2};0$ является результатом одной из четырех арифметических операций $\cos x+\cos y$, $\cos x-\cos y$, $\cos x\cdot\cos y$, $\cos x:\cos y$ над числами $\cos x$, $\cos y$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x;y)$.

Ответ: $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z,\ y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

3. При каких a решение (x, y, z) системы $\begin{cases} 2x+3y=a-1 \\ 3y+4z=a+1 \\ x+2z=a-2 \end{cases}$ удовлетворяет уравнению $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=\dfrac{49}{9}$? Найти эти решения.

Ответ: 1) при $a=-3, x=-3, y=\dfrac{2}{3}, z=-1;$

2) при $a=\dfrac{9}{5}$, $x=-\dfrac{3}{5}$, $y=\dfrac{2}{3}$, $z=\dfrac{1}{5}$.

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2019, для которого $P(2018)=2020$ и $P(2014+x)+P(2022-x)=4040$ для всех x.

Ответ: существует, например, $P(x)=(x-2018)^{2019}+2020.$

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $30^0, 75^0, 75^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $\left(2\sqrt{3}-3\right):4.$

Вариант № 3

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x))=x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x))))=x$ имеет бесконечное число решений для функции вида

$$f(x)=\frac{(5-3a)x-2}{5x+a-1}?$$

Ответ: 1) $a=2,\ \ f(x)=\dfrac{-x-2}{5x+1};$

2) $a=2,\ \ f(x)=\dfrac{-x-2}{5x+1};\ a=3,\ \ f(x)=\dfrac{-4x-2}{5x+2};$

$$a=\frac{1}{5},\quad f(x)=\frac{22x-10}{25x-4}.$$

2. Каждое из четырех чисел $-1;-1;-\frac{1}{4};0$ является результатом одной из четырех арифметических операций $\sin x+\cos y$, $\sin x-\cos y$, $\sin x\cdot\cos y$, $\sin x:\cos y$ над числами $\sin x$, $\cos y$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x;y)$.

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z,\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

3. При каких a решение (x,y,z) системы $\begin{cases} x-2y=a-1 \\ 2z-y=a+2 \\ x+4z=a+3 \end{cases}$ удовлетворяет уравнению $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=20$? Найти эти решения.

Ответ: 1) при $a=8, x=-1, y=-4, z=3$;

2) при $a=-8,\ x=-1,\ y=4,\ z=-1.$

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2024, для которого $P(2006)=2020, P(2007)=2018$ и $P(2014+x)=P(2000-x)$ для всех x.

Ответ: существует, например, $P(x)=2(x-2007)^{2024}+2018.$

5. Точки M,N,P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $37,5^0, 60^0, 82,5^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $\left(\sqrt{2}-1\right):4.$

Вариант № 4

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x))=x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x))))=x$ имеет бесконечное число решений для функции вида

$$f(x)=\frac{(a+3)x-13}{x+2a+3}?$$

Ответ: 1) $a=-2,\quad f(x)=\dfrac{x-13}{x-1};$

2) $a=-2,\quad f(x)=\dfrac{x-13}{x-1};\ a=-1,\quad f(x)=\dfrac{-x-13}{x-5};$

$a=\dfrac{1}{5},\quad f(x)=\dfrac{17x-65}{5x+19}.$

2. Каждое из четырех чисел $-3;-1;\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ является результатом одной из четырех арифметических операций $tgx+ctgy$, $tgx-ctgy$, $tgx\cdot ctgy$, $tgx:ctgy$ над числами tgx, $ctgy$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x;y)$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z,\ y=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z.$

3. При каких a решение (x,y,z) системы $\begin{cases}3x-y=a-2\\ y+2z=-a-1\\ 3x-2z=2a+3\end{cases}$ удовлетворяет уравнению $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$? Найти эти решения.

Ответ: 1) при $a=-3, x=-1, y=2, z=0$;

2) при $a=-\dfrac{51}{13}, x=-\dfrac{17}{13}, y=2, z=\dfrac{6}{13}.$

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2021, для которого $P(2019)=2022$ и $P(2014+x)+P(2024-x)=4044$ для всех x.

Ответ: существует, например, $P(x) = (x - 2019)^{2021} + 2022.$

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $37{,}5^0, 67{,}5^0, 75^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6} - 4\right) : 8.$