Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс, СНГ, февраль 2020

Вариант № 1

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 200 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 40 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 20, Вова – 30 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

2. Решить неравенство:

$$\sin\left(\sin 2x+\cos 2x-1\right)\geq 2\sin x(\sin x-\cos x).$$

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\dfrac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 7 возросла в три раза. Найти p и q, если известно, что $НОД(p,q)=2$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n=\dfrac{1}{n+\dfrac{2019}{n+\dfrac{1}{n}}}$ принимает наибольшее возможное значение?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O. Угол DOC равен 58^0. Найти углы треугольника ABC, если известно, что точки D,O,E и C лежат на одной окружности.

Ответы и решения

1. Пусть s – путь, пройденный Петей на лодке, $T_1(s), T_2(s)$ – время окончания переправы Петей и Вовой соответственно, а $T(s)=\max\left(T_1(s),T_2(s)\right)$ – время окончания совместной переправы. Тогда

$$T_1(s)=\frac{s}{40}+\frac{200-s}{20}=10-\frac{s}{40},\quad T_2(s)=\frac{s}{30}+\frac{200-s}{40}=5+\frac{s}{120}.$$

Поскольку $T_1(s)$ монотонно убывает $\left(k_1=-\dfrac{1}{40}<0\right)$, $k_1<0$, а $T_2(s)$ – монотонно возрастает $\left(k_2=\dfrac{1}{120}>0\right)$, то минимальное значение функция $T(s)$ принимает, когда $T_1(s)=T_2(s)$:

$$10-\frac{s}{40}=5+\frac{s}{120}.$$

Отсюда находим $s=150$.

Ответ: 150 м.

2. Преобразуем правую часть уравнения

$$2\sin x(\sin x-\cos x)=2\sin^2 x-\sin 2x=1-\cos 2x-\sin 2x.$$

Обозначим $t=\sin 2x+\cos 2x-1,$.тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$\sin t\ge -t.$$

Решениями этого неравенства являются $t:t\ge 0.$ В результате приходим к неравенству

$$\sin 2x+\cos 2x\ge 1.$$

Разделим обе части полученного неравенства на $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos 2x\ge\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

и перепишем его в виде

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Его решения $-\frac{\pi}{4}+2\pi k \le 2x-\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in Z,$ откуда находим

$\pi k \le x \le \frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\pi k \le x \le \frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$.

3. По условию задачи $НОД(p,q)=2$ и $\frac{p+7}{q+7}=\frac{3p}{q}$, $\frac{p}{q}>0.$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$7(q-3p)=2pq.$$

Так как левая часть уравнения делится на 7, то и правая часть должна делиться на 7. Тогда хотя бы одно из p и q делится на 7.

Случай 1. $q=7k, k \in Z, k \ne 0.$.Имеем $7k-3p=2pk.$ Отсюда находим $p=\frac{7k}{2k+3}=\frac{7}{2}-\frac{21}{2(2k+3)}, k \in Z, k \ne 0.$

Число p будет ненулевым целочисленным при

$$2k+3 \in \{-21;-7;-3;-1;1;7;21\}.$$

Отсюда находим $k \in \{-12;-5;-3;-2;-1;2;9\}$. Отвечающие им значения p и q, а также $НОД(p,q)$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

k	-12	-5	-3	-2	-1	2	9
p	4	5	7	14	-7	2	3
q	-84	-35	-21	-14	-7	14	63
$НОД(p,q)$	4	5	7	14	7	2	3

Условию $НОД(p,q)=2$ удовлетворяет только одна дробь $\frac{2}{14}$.

Кроме того $\frac{2}{14}>0.$

Случай 2. $p = 7m, m \in Z$. Имеем $q - 21m = 2qm$. Отсюда находим $q = \dfrac{21m}{1-2m} = -\dfrac{21}{2} + \dfrac{21}{2(2m-1)}, m \in Z, m \neq 0$. Число q будет ненулевым целочисленным при

$$2m-1 \in \{-21; -7; -3; 1; 3; 7; 21\}.$$

Отсюда находим $m \in \{-10; -3; -1; 1; 2; 4; 11\}$. Отвечающие им значения p и q, а также $НОД(p, q)$ приведены в таблице 2.

Таблица 2

m	-10	-3	-1	1	2	4	11
p	-70	-21	-7	7	28	2	77
q	-10	-9	-7	-21	-14	-12	-11
$НОД(p,q)$	10	3	7	7	14	2	11

Дробь $\dfrac{2}{-12}$ удовлетворяет условию $НОД(p,q) = 2$, но она не удовлетворяет условию $\dfrac{p}{q} > 0$.

Ответ: $p = 2, q = 14$.

4. Преобразуем дробь к виду $a_n = \dfrac{n^2+1}{n(n^2+2020)}$. Найдем при каких n последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей, а при каких $n -$ убывающей. Для этого решим неравенство $a_n < a_{n+1}$:

$$\frac{n^2+1}{n(n^2+2020)} < \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)\left((n+1)^2+2020\right)}.$$

После преобразований имеем

$$n^2(n+1)^2 - 2017n(n+1) + 2021 < 0.$$

Введем новую переменную $t = n(n+1), t \in [2; +\infty)$. Получаем квадратное неравенство

$$t^2 - 2017t + 2021 < 0.$$

Перепишем его в виде

$$(t - t_1)(t - t_2) < 0,$$

где

$$t_1 = \frac{2017 - \sqrt{2017^2 - 4 \cdot 2021}}{2} \approx 1,$$

$$t_2 = \frac{2017 + \sqrt{2017^2 - 4 \cdot 2021}}{2} \approx 2016.$$

Так как $t_1 < 2$, то неравенство справедливо при $t < t_2$. Возвращаясь к старым переменным, получаем неравенство

$$n(n+1) < t_2.$$

Перепишем его в виде

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < t_2 + \frac{1}{4}.$$

Отсюда находим

$$n < -\frac{1}{2} + \sqrt{t_2 + \frac{1}{4}} \approx 44,4.$$

Нам осталось посчитать a_n при $n = 44$ и $n = 45$ и выбрать, при каком из этих значений a_n наибольшее. Имеем

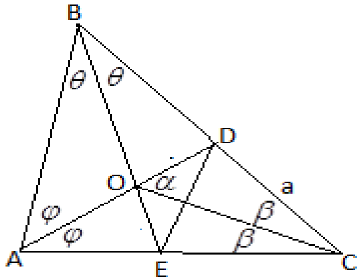
$$a_{44} = \frac{44^2 + 1}{44^3 + 2020 \cdot 44} = \frac{1937}{85184 + 88880} = \frac{1937}{174064} \approx 0,01112809,$$

$$a_{45} = \frac{45^2 + 1}{45^3 + 2020 \cdot 45} = \frac{2026}{91125 + 90900} = \frac{2026}{182025} \approx 0,01113034.$$

Таким образом, при $n = 45$ дробь a_n принимает наибольшее значение.

Ответ: $n = 45$.

5. Введем обозначения: $\measuredangle ABC = 2\theta$, $\measuredangle BCA = 2\beta$, $\measuredangle CAB = 2\varphi$. По теореме о сумме углов треугольника BOA получаем



$$\measuredangle BOA = 180^{\circ} - \theta - \varphi = 180^{\circ} - \frac{180^{\circ} - 2\beta}{2} = 90^{\circ} + \beta.$$

По условию четырехугольник $EODC$ вписанный, следовательно,

$$\measuredangle DOE = 180^{\circ} - 2\beta.$$

Из условия $\measuredangle BOA = \measuredangle DOE$ (вертикальные углы) получаем уравнение

$$90^{\circ} + \beta = 180^{\circ} - 2\beta.$$

Отсюда находим $\beta = 30^{\circ}$. Следовательно, $\measuredangle BCA = 2\beta = 60^{0}$.

В треугольнике ODC $\measuredangle DOC = 58^{\circ}$ по условию, $\measuredangle DCO = \beta = 30^{\circ}$, так как $OC -$ биссектриса угла $\measuredangle BCA$. Тогда

$$\measuredangle ODC = 180° - \measuredangle DOC - \measuredangle DCO = 180° - 58^{\circ} - 30° = 92^{\circ}.$$

Найдем $\measuredangle DAC$ треугольника DAC

$$\measuredangle DAC = \varphi = 180° - \measuredangle ODC - \measuredangle DCA = 180° - 92^{\circ} - 60° = 28^{\circ}.$$

Следовательно, $\measuredangle CAB = 2\varphi = 56°$. Осталось найти $\measuredangle ABC$:

$$\measuredangle ABC = 180^{\circ} - \measuredangle CAB - \measuredangle BCA = 180^{\circ} - 56^{\circ} - 60^{0} = 64^{\circ}.$$

Ответ: 56^{0}, 64^{0}, 60^{0}.

Вариант № 2

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 100 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 30 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 10, Вова – 20 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

Ответ: 80 м.

2. Решить неравенство:

$$\sin\left(\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}\right)\le 2\cos x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)\,.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi k\le x\le\dfrac{4\pi}{3}+\pi k, k\in Z$.

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\dfrac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 5 возросла в два раза. Найти p и q, если известно, что $НОД(p,q)=3$.

Ответ: $p=3, q=15$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n=\dfrac{1}{n+\dfrac{400}{n+\dfrac{1}{n}}}$ принимает наибольшее возможное значение?

Ответ: $n=20$.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O. Угол DOC равен 72^0. Найти углы треугольника ABC, если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Ответ: 84^0, 36^0, 60^0.

Вариант № 3

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 340 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 40 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 15, Вова – 25 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

Ответ: 250 м.

2. Решить неравенство:

$$\sin\left(\sin 4x + \cos 4x + 1\right) + 2\cos 2x(\sin 2x + \cos 2x) > 0 .$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2} < x < \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$.

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\dfrac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 4 возросла в четыре раза. Найти p и q, если известно, что $НОД(p,q)=5$.

Ответ: $p=-20, q=-5$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n = \dfrac{1}{n+\dfrac{900}{n+\dfrac{1}{n}}}$ принимает наибольшее возможное значение?

Ответ: $n = 30$.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O. Угол DOC равен 64^0. Найти углы треугольника ABC, если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Ответ: 68^0, 52^0, 60^0.

Вариант № 4

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 160 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 32 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 16, Вова – 24 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

Ответ: 120 м.

2. Решить неравенство:

$$\sin\left(\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x + 1\right) + 2\sin 2x(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x) < 0.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2} < x < \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$.

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\dfrac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 6 уменьшилась в два раза. Найти p и q, если известно, что $НОД(p,q) = 4$.

Ответ: $p = -8, q = -12$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n = \dfrac{1}{n + \dfrac{1600}{n + \dfrac{1}{n}}}$ принимает наибольшее возможное значение?

Ответ: $n = 40$.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O. Угол DOC равен 42^0. Найти углы треугольника ABC, если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Ответ: 24^0, 96^0, 60^0.