Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
11 класс, Россия, март 2020

Вариант № 1

1. Найти целые числа x и y, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{x}{17}+\log_2\frac{y}{5}.$$

2. При каких целых n функция $f(x)=\sin(nx)\cdot\cos\dfrac{6x}{n+1}$ имеет период $T=5\pi$?

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots,$ a_{2019}, для которых $2\cdot НОК(a_1, a_2, \ldots, a_{2019})=a_1+a_2+\ldots+a_{2019}$.

4. Саша и Маша задают друг другу по пять каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Машей вопрос Саша скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\dfrac{1}{2}$. Маша на вопрос Саши дает правдивый ответ с вероятностью $\dfrac{2}{3}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Маша дала на два правдивых ответа больше, чем Саша. С какой вероятностью это могло произойти?

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n=a_n\cdot\sin a_n$ также арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $2\cos^2 a_n=\cos a_{n+1}$.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 3 и 4 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 30^0.

Ответы и решения

1. Перепишем исходное уравнение

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{x}{17}+\log_2\frac{y}{5}$$

в виде

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{xy}{85}.$$

Отсюда получаем $\frac{x}{17}+\frac{y}{5}=\frac{xy}{85}$ или $5x+17y=xy$. Последнее уравнение перепишем в виде

$$(x-17)(y-5)=85.$$

Рассматриваем возможные варианты

x−*17*	1	5	17	85	−1	−5	−17	−85
y−*5*	85	17	5	1	−85	−17	−5	−1
x	18	22	34	102	16	12	0	−68
y	90	22	10	6	−80	−12	0	4

Отбирая натуральные решения, получаем ответ.

Ответ: $\begin{cases}x=18,\\ y=90;\end{cases}$ $\begin{cases}x=22,\\ y=22;\end{cases}$ $\begin{cases}x=34,\\ y=10;\end{cases}$ $\begin{cases}x=102,\\ y=6.\end{cases}$

2. При всех x должно выполнять равенство

$$f(x+5\pi)=f(x), \text{ т.е.}$$

$$\sin(nx+5\pi n)\cos\frac{6(x+5\pi)}{n+1}=\sin nx\cos\frac{6x}{n+1}.$$

При n=0 это равенство выполнено и поэтому в дальнейшем анализе мы можем не обращать внимание на это значение.

Случай 1.nчетное. Равенство принимает вид

$$\sin nx\cos\frac{6(x+5\pi)}{n+1}-\sin nx\cos\frac{6x}{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\sin nx\left(\cos\frac{6x}{n+1}-\cos\frac{6x+30\pi)}{n+1}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$2\sin nx\cdot\sin\frac{6x+15\pi}{n+1}\cdot\sin\frac{15\pi}{n+1}=0.$$

Рассмотрим нули первых двух функций, входящих в полученное произведение

$$\sin nx=0 \;\Leftrightarrow\; nx=\pi k(k\in Z) \;\Rightarrow\; \frac{x}{\pi}=\frac{k}{n};$$

$$\sin\frac{6x+15\pi}{n+1}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6x+15\pi}{n+1}=\pi m(m\in Z) \;\Rightarrow\; \frac{x}{\pi}=\frac{m(n+1)-15}{6}.$$

Для них отношение x/πрационально. Отсюда следует, что существует значение x , для которого
рассматриваемые функции не обращаются в ноль (достаточно взять $x=\pi y$, где y является иррациональным числом). Следовательно, условие задачи равносильно равенству

$$\sin\frac{15\pi}{n+1}=0.$$

Отсюда находим $\dfrac{15\pi}{n+1}=\pi m,\ m\in Z$ или $\dfrac{15}{n+1}=m,\ m\in Z,$ и, поэтому n+1 должно быть нечетным делителем числа 15, т.е.
$n+1\in\{1,-1,3,-3,5,-5,15,-15\}$ или $n\in\{0,-2,2,-4,4,-6,14,-16\}$.

Случай 2. nнечетное. Равенство принимает вид

$$-\sin nx\cos\frac{6(x+5\pi)}{n+1}-\sin nx\cos\frac{6x}{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\sin nx\left(\cos\frac{6x}{n+1}+\cos\frac{6x+30\pi)}{n+1}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$2\sin nx\cdot\cos\frac{6x+15\pi}{n+1}\cdot\cos\frac{15\pi}{n+1}=0.$$

Аналогично предыдущему пункту нетрудно видеть, что если отношение x/πиррационально, то значение x не является нулем первых двух функций, входящих в произведение в левой части последнего равенства. Таким образом, это равенство равносильно соотношению

$$\cos\frac{15\pi}{n+1}=0.$$

Отсюда находим

$$\frac{15\pi}{n+1}=\frac{\pi(2m+1)}{2},\ m\in Z,\ \text{или}\ \frac{30}{n+1}=2m+1,\ m\in Z.$$

Следовательно, $n+1\in\{2,-2,6,-6,10,-10,30,-30\}$, а $n\in\{1,-3,5,-7,9,-11,29,-31\}$.

Объединяя найденные значения, получаем ответ.

Ответ:

$$n\in\{-31;-16;-11;-7;-6;-4;-3;-2;0;1;2;4;5;9;14;29\}.$$

3. Пусть $a_1=a_2=...=a_{2018}=1,\ a_{2019}=2018.$ Покажем, что этот набор удовлетворяет условию задачи

$$a_1+a_2+...+a_{2018}+a_{2019}=(1+1+...+1)+2018=2018+2018=2\cdot 2018.$$

Ответ: $a_1=a_2=...=a_{2018}=1,\ a_{2019}=2018.$

4. Число правильных ответов Саши распределено по биномиальному закону с вероятностью успеха 1/2

$$P_1(k)=C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}=\frac{C_5^k}{32}.$$

k	0	1	2	3	4	5

$P_1(k)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Число правильных ответов Маши распределено по биномиальному закону с вероятностью успеха 2/3

$$P_2(k) = C_5^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} = \frac{2^k C_5^k}{243}.$$

k	0	1	2	3	4	5
$P_2(k)$	1/243	10/243	40/243	80/243	80/243	32/243

Совместное распределение вероятностей определяется произведением одномерных распределений

$$P(k,m) = P_1(k)P_2(m).$$

В задаче требуется определить вероятность объединения событий, отвечающих значениямk=0,m=2; k=1,m=3; k=2,m=4 и k=3,m=5. Искомая вероятность

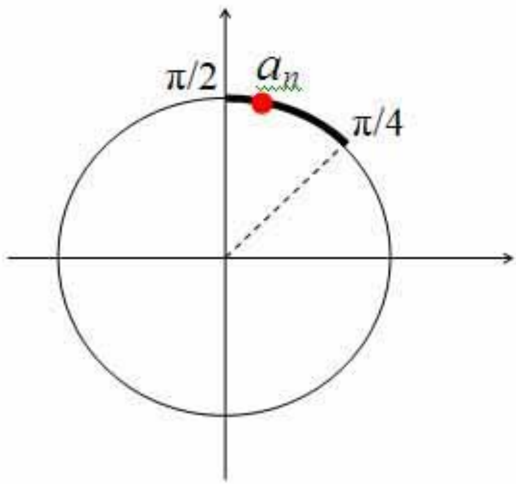
$$p = P(0,2) + P(1,3) + P(2,4) + P(3,5) =$$

$$= \frac{1}{32}\cdot\frac{40}{243} + \frac{5}{32}\cdot\frac{80}{243} + \frac{10}{32}\cdot\frac{80}{243} + \frac{10}{32}\cdot\frac{32}{243} =$$

$$= \frac{40+400+800+320}{32\cdot 243} = \frac{1560}{32\cdot 243} = \frac{3\cdot 8\cdot 65}{4\cdot 8\cdot 3\cdot 81} = \frac{65}{324}.$$

Ответ: $\frac{65}{324}$.

5. Из уравнения $2\cos^2 a_n = \cos a_{n+1}$ следует, что при всех nзначение $\cos a_{n+1} \ge 0$ и $|\cos a_n| = \sqrt{\frac{\cos a_{n+1}}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. на тригонометрическом круге все значения a_n попадают на участок [π/4;π/2].



Из того, что числа a_nобразуют арифметическую прогрессию, следует тот факт, что разность d этой прогрессии должна быть кратна длине окружности 2π. В самом деле, если величина d больше ближайшего числа кратного 2π к числу a_n , то один из последующих членов последовательности, располагаясь на единичной окружности против часовой стрелки от a_n и смещаясь от него на постоянное значение вдоль дуги, выйдет за участок дуги [π/4;π/2]. Аналогично, если величина d меньше ближайшего числа кратного 2π к числу a_n , то один из последующих членов последовательности, располагаясь на единичной окружности почасовой стрелки от a_n и смещаясь от него на постоянное значение вдоль дуги, также выйдет за участок дуги [π/4;π/2]. Таким образом,

$$d = 2\pi k,\ k \in Z.$$

При этом $k \neq 0$ так как по условию задачи $d \neq 0$.

Из доказанного утверждения следует, что при всех n

$$\cos a_n = \cos(a_1 + (n-1)d) = \cos(a_1 + (n-1) \cdot 2\pi k) = \cos a_1.$$

Это обстоятельство дает уравнение для определения первого члена прогрессии

$$2\cos^2 a_1 = \cos a_1.$$

Решая уравнение, находим

$$\left[\begin{array}{l}\cos a_1 = 0 \\ \cos a_1 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z, \\ a_1 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.\end{array}\right.$$

Первая серия дает

$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi m + (n-1)2\pi k \ \Rightarrow\ b_n = a_n,$$

а две оставшиеся

$$a_n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m + (n-1)2\pi k \ \Rightarrow\ b_n = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a_n.$$

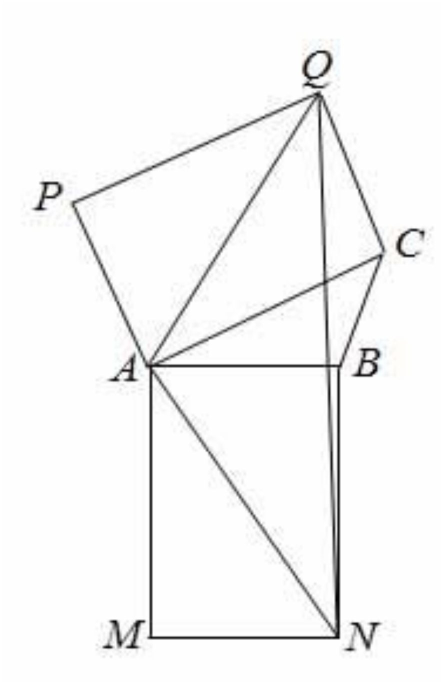
Все серии удовлетворяют условиям задачи.

$$1)\ a_1 = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$$

Ответ: $2)\ a_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$

$$3)\ a_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0.$$

6. Рассмотрим чертеж



По условию AC=4, а так как AB=3, то также и QC=3. По теореме Пифагора для треугольника ACQ получаем, что AQ=5. Прямоугольники $APQC$ и $AMNB$ равны, следовательно, AN также равно 5. Из равенства прямоугольных треугольников AQC и ABN следует, что сумма углов QAB и BAN равна 90 градусов. По условию задачи угол CAB равен 30 градусов. Следовательно, угол QAN равен сумме 30+90=120 градусов. По теореме косинусов для треугольника QAN

$$NQ = \sqrt{AQ^2 + AN^2 - 2 \cdot AQ \cdot AN \cos(QAN)} =$$

$$= \sqrt{25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot (-1/2)} = \sqrt{25 + 25 + 25} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $5\sqrt{3}$.

Вариант № 2

1. Найти целые числа x и нечетные y, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{14}\right)=\log_2\frac{x}{6}+\log_2\frac{y}{14}.$$

Ответ: $\begin{cases} x=10, \\ y=35; \end{cases}$ $\begin{cases} x=18, \\ y=21; \end{cases}$ $\begin{cases} x=34, \\ y=17; \end{cases}$ $\begin{cases} x=90, \\ y=15. \end{cases}$

2. При каких целых n функция $f(x)=\cos((n+1)x)\cdot\sin\dfrac{8x}{n-2}$ имеет период $T=3\pi$?

Ответ: $n\in\{3;1;5,-1;10;-6;26;-22\}$.

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, ...,$ a_{2020}, для которых $3\cdot HOK(a_1, a_2, ..., a_{2020}) = 2(a_1+a_2+...+a_{2020})$.

Ответ: подходит, например, $a_1=a_2=...=a_{2019}=1,\ a_{2020}=4038.$

4. Коля и Толя задают друг другу по четыре каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Толей вопрос Коля скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\dfrac{1}{3}$. Толя на вопрос Коли дает правдивый ответ с вероятностью $\dfrac{1}{4}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Коля дал на три правдивых ответа больше, чем Толя. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $\dfrac{5}{24}$.

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n=a_n\cdot\cos a_n$ также арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\sin 2a_n+\cos a_{n+1}=0$.

Ответ:
1) $a_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$
2) $a_1 = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0.$

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны $\sqrt{3}$ и 1 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 60^0.

Ответ: $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Вариант № 3

1. Найти целые числа y и четные x, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{7}+\frac{y}{6}\right) = \log_2\frac{x}{7} + \log_2\frac{y}{6}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 8, \\ y = 48; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10, \\ y = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 14, \\ y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 28, \\ y = 8. \end{cases}$

2. При каких целых n функция $f(x) = \sin((2n+1)x)\cdot\sin\dfrac{5x}{n-1}$ имеет период $T = 7\pi$?

Ответ: $n \in \{2; 0; 6, -4; 8; -6; 36; -34\}$.

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots,$ a_{2021}, для которых $4\cdot НОК(a_1, a_2, \ldots, a_{2021}) = 3\cdot(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2021})$.

Ответ: подходит, например, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2020} = 1, \quad a_{2021} = 6060$.

4. Катя и Паша задают друг другу по четыре каверзных вопроса и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Пашей вопрос Катя скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{3}$. Паша на вопрос Кати дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{3}{5}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Паша дал на два правдивых ответа больше, чем Катя. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $\frac{48}{625}$.

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n = a_n \cdot tg a_n$ также арифметическая прогрессия. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\sin a_n + \sin a_{n+2} = 1$.

Ответ:
$$1)\ a_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$$
$$2)\ a_1 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0.$$

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны $2\sqrt{2}$ и 1, соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 45^0.

Ответ: $3\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Вариант № 4

1. Найти целые числа x и y такие, что $x + y$ – четное и

$$\log_2\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{8}\right)=\log_2\frac{x}{5}+\log_2\frac{y}{8}.$$

Ответ: $\begin{cases} x=6, \\ y=48; \end{cases}$ $\begin{cases} x=10, \\ y=16; \end{cases}$ $\begin{cases} x=13, \\ y=13; \end{cases}$ $\begin{cases} x=45, \\ y=9. \end{cases}$

2. При каких целых n функция $f(x)=\cos((n-1)x)\cdot\cos\frac{15x}{2n+1}$ имеет период $T=\pi$?

Ответ: $n\in\{0;-2;2;-8\}$.

3. Доказать, что существует набор натуральных чисел $a_1, a_2, ...,$ a_{2022}, для которых $5\cdot НОК(a_1, a_2, ..., a_{2022}) = 4\cdot(a_1+a_2+...+a_{2022})$.

Ответ: подходит, например, $a_1=a_2=...=a_{2021}=1,\ \ a_{2022}=8084.$

4. Аня и Боря задают друг другу по три каверзных вопроса и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Борей вопрос Аня скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{4}$. Боря на вопрос Ани дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{2}{5}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Боря дал на один правдивый ответ больше, чем Аня. С какой вероятностью это могло произойти?

Ответ: $\frac{297}{4000}$.

5. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n=a_n\cdot ctga_n$ также арифметическая прогрессия. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $\cos a_n+\cos 3a_{n+1}=0$.

Ответ:

1) $a_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z;\ d = \pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0;$

2) $a_1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2},\ m \in Z;\ d = 2\pi k,\ k \in Z,\ k \neq 0.$

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 5 и $\sqrt{11}$, соответственно, а угол при вершине A треугольника равен $\arccos\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\sqrt{72 + 48\sqrt{2}}$.