Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
11 класс, СНГ, февраль 2020

Вариант № 1

1. Сколько существует натуральных чисел $n \le 2020$, для которых дробь $\dfrac{6n^3 + n^2 - 5n + 12}{6n^2 + 7n + 2}$ сократимая?

2. Решить уравнение $\sin\left(x\left(\eta(x) - \eta(x - 7\pi)\right)\right) = 1 + \cos x$, где $\eta(x) = \begin{cases} 1, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b) - P(a)$ делится на $(b - a)$ при любых целых $a, b, a \ne b$. Известно, что уравнение $P(x) = 8$ имеет целый корень на полуоси $x \ge 8$ и $P(4) = 17$. Найти этот корень.

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 5, имеющее при делении на 7 остаток 3.

5. Найти наименьшее положительное значение выражения $x + y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $(\sin x + \cos y)(\cos x - \sin y) = 1 + \sin(x - y)\cos(x + y)$.

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 30^0. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 2.

Ответы и решения

1. Разделим числитель дроби на знаменатель «уголком»:

$$6n^3+n^2-5n+12=(n-1)(6n^2+7n+2)+14.$$

Знаменатель дроби раскладывается на множители:

$$6n^2+7n+2=(2n+1)(3n+2)$$

Если числитель и знаменатель дроби делится на $p>1$, то p является делителем 14, т.е. $p=2,7,14$.

Случай 1. $p=2.$ Первый множитель знаменателя $(2n+1)$ на 2 не делится, второй множитель знаменателя $3n+2$ делится на 2 при четных n. е На отрезке $\left[1,2020\right]$ таких чисел 1010.

Случай 2. $p=7.$ Найдем n, при которых хотя бы один из множителей знаменателя кратен 7:

$$\left[\begin{array}{l}2n+1=7m\\3n+2=7k\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}7m-2n=1\to\begin{cases}m=1+2s,\\n=3+7s\ \ (*),s\in Z,\end{cases}\\[2ex]7k-3n=2\to\begin{cases}k=2+3t,\\n=4+7t\ \ (**),t\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Нечетных $n\le 2020$ вида $n=14t+3$, удовлетворяющих (*), 145. Нечетных n, удовлетворяющих (**), – 144 (серии (*) и (**) не пересекаются).

Случай 3. $p=14.$ Первый множитель знаменателя нечетный, поэтому на 14 не делится. Второй делится на 14, если $3n+2=14m,$ но это бывает только при четных n, а они уже учтены. Наконец, если первый множитель знаменателя делится на 7, а второй на 2:

$$\begin{cases}2n+1=7k\\3n+2=2s\end{cases},$$

то n может быть только четным, а такие n уже учтены. Таким образом, искомое число допустимых n равно

$$1010+145+144=1299.$$

Ответ: 1299 чисел.

2. Выражение $\eta(x)-\eta(x-7\pi)=\begin{cases}1, x\in[0,7\pi),\\ 0, x\in(-\infty;0)\cup[7;+\infty).\end{cases}$

Случай 1. $x\in[0,7\pi)$. Уравнение принимает вид

$$\sin x=1+\cos x.$$

Применяя метод введения вспомогательного аргумента, получим

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решим это уравнение

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z,\\ x=\pi+2\pi m, m\in Z.\end{array}\right.$$

С учетом $x\in[0,7\pi)$, имеем

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,1,2,3,\\ x=\pi+2\pi m, m=0,1,2.\end{array}\right.$$

Случай 2. $x\in(-\infty;0)\cup[7;+\infty)$. Уравнение принимает вид

$$1+\cos x=0.$$

Решим это уравнение

$$x=\pi+2\pi m, m\in Z.$$

С учетом $x\in(-\infty;0)\cup[7;+\infty)$, имеем

$$x=\pi+2\pi m, m=-1,-2,-3,\ldots,3,4,\ldots$$

Объединяя решения, полученные в рассмотренных выше случаях, решения, находим $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,1,2,3,$ $x=\pi(2m+1), m\in Z.$

Ответ: 1) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,1,2,3;$ 2) $x=\pi(2m+1), m\in Z.$

3. Для доказательства утверждения запишем общий вид многочлена $P(x)$ степени n

$$P(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+...+c_1x+c_0,\; c_k\in Z, k=0,1,...,n, c_n\neq 0.$$

Рассмотрим

$$P(b)-P(a)=c_n(b^n-a^n)+c_{n-1}(b^{n-1}-a^{n-1})+...+c_1(b-a).$$

Используя известную формулу

$$b^k-a^k=(b-a)\cdot\left(b^{k-1}+b^{k-2}a+\ldots+a^{k-1}\right),$$

получим

$$P(b)-P(a)=(b-a)\cdot Q_{n-1}(a,b),$$

где $Q_{n-1}(a,b)$ – многочлен степени $(n-1)$ переменных a,b с целыми коэффициентами. Следовательно, выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых $a,b,a\neq b$.

Рассмотрим вторую часть задачи. Если x решение уравнения $P(x)=8$, а $P(4)=17$, то $P(x)-P(4)=-9$. По доказанному выше, $P(x)-P(4)$ делится на $x-4$, следовательно, выражение $x-4$ является делителем числа т.е. $x-4=\pm1,\pm3,\pm9.$ Отсюда находим $x=-5,1,3,5,7,13.$ Ограничению $x\geq 8$ удовлетворяет единственное $x=13$.

Ответ: $x=13.$

4. Посчитаем количество вариантов написать 3 цифры:

$$10\cdot10\cdot10=1000.$$

Получим формулу для числа A, кратного 5 и имеющего при делении на 7 остаток 3. Это число имеет вид

$$A=5k=7n+3.$$

Решая уравнение $5k-7n=3$ в целых числах, находим

$$\begin{cases} k=7t+2, \\ n=5t+1. \end{cases}$$

Следовательно, $A=35t+10,\; t\in Z,\; t\geq 0.$ Так как по условию задачи A это трехзначное число, то $100\leq 35t+10\leq 999.$ Отсюда, с учетом целочисленности $t,$ получаем $t=2,3,\ldots,28.$ Это означает, что количество трехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно 26. Следовательно, вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 5, имеющее при делении на 7 остаток 3, равна $\frac{26}{1000}$.

Ответ: $P = 0,026.$

5. Преобразуем левую часть уравнения

$$(\sin x + \cos y)(\cos x - \sin y) =$$

$$= \sin x \cos x + \cos y \cos x - \sin x \sin y - \cos y \sin y =$$

$$= \cos(x+y) + \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \sin 2y\right) = \cos(x+y) + \sin(x-y)\cos(x+y).$$

Подставим полученное выражение в исходное уравнение

$$\cos(x+y) + \sin(x-y)\cos(x+y) = 1 + \sin(x-y)\cos(x+y).$$

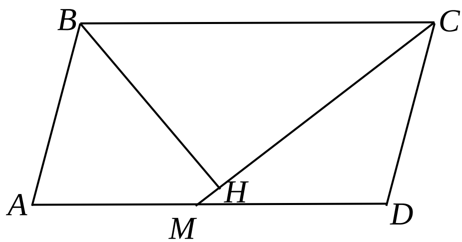
Отсюда получаем $\cos(x+y) = 1.$ Решая это уравнение, находим

$$x + y = 2\pi k, k \in Z.$$

Следовательно, наименьшим, положительным значением для $x+y$ является 2π .

Ответ: $\left(x+y\right)_{\min} = 2\pi.$

6. Обозначим длину стороны AB параллелограмма $ABCD$ через a. Опустим из вершины B перпендикуляр BH на прямую CM. Рассмотрим прямоугольный треугольник BHC. По



условию задачи $BH = AB = a.$ Так как $BC \parallel AB,$ то $\angle BCH = \angle CMD = 30^\circ$. Отсюда следует, что $BC = 2BH = 2a.$ Теперь рассмотрим треугольник $MDC.$ Так как

$MD=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{BC}{2}=a,\;\; CD=AB=a,$ то этот треугольник равнобедренный. Следовательно, $\angle MCD=\angle CMD=30^{\circ}$. Тогда

$$\angle CDA=180^{\circ}-2\cdot 30^{\circ}=120^{\circ},$$

а

$$\angle BAD=180^{\circ}-\angle CAD=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}.$$

Вычислим площадь параллелограмма $ABCI$ при условии, что $AD=2$:

$$S_{ABCD}=AD\cdot BC\sin 120^{0}=2\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

Ответ: 1) $60^{0},\; 120^{0}$; 2) $S_{ABCD}=\sqrt{3}.$

Вариант № 2

1. Сколько существует натуральных чисел $n\le 2024$, для которых дробь $\dfrac{15n^{3}+11n^{2}-8n+2}{15n^{2}-4n-4}$ несократимая?

Ответ: 675 чисел.

2. Решить уравнение

$$\cos\left(2x\left(\eta(x+3\pi)-\eta(x-8\pi)\right)\right)=\sin x+\cos x,$$

где $\eta(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Ответ: 1) $x=2\pi k, k\in Z;$ 2) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\;\; k=-1,0,1,2,3,4.$

3) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z, k\ne -1,0,1,2,3;$

4) $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi m, m=-2,-1,...,8.$

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых $a, b, a \neq b$. Известно, что уравнение $P(x) = 15$ имеет целый корень на полуоси $x \leq -2$ и $P(3) = 7$. Найти этот корень.

Ответ: $x = -5$.

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 3, имеющее при делении на 8 остаток 5.

Ответ: $P = 0,037$.

5. Найти наибольшее отрицательное значение выражения $x - y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$(\sin x + \sin y)(\cos x - \cos y) = \frac{1}{2} + \sin(x - y)\cos(x + y).$$

Ответ: $\left(x + y\right)_{\max} = -\frac{\pi}{6}$.

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 45^0. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 1.

Ответ: 1) 75^0, 105^0; 2) $S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

Вариант № 3

1. Сколько существует натуральных чисел $n \leq 1947$, для которых дробь $\frac{15n^3 + 17n^2 + n + 14}{15n^2 + 2n - 1}$ сократимая?

Ответ: 908 чисел.

2. Решить уравнение $tg\left(x\left(\eta(x-2\pi)-\eta(x-5\pi)\right)\right)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1,$

где $\eta(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Ответ:: 1) $x=\pi k, k\in Z;$ 2) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m, m=2,3,4.$

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых $a,b,a\neq b$. Известно, что уравнение $P(x)=-9$ имеет целый корень на полуоси $x>12$ и $P(5)=-23$. Найти этот корень.

Ответ: $x=19.$

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 4, имеющее при делении на 5 остаток 2.

Ответ: $P=0,045.$

5. Найти наименьшее положительное значение выражения $x+y$ для всех пар чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $(tgx-2)(tgy-2)=5$.

Ответ: $\left(x+y\right)_{\min}=\pi-arctg\dfrac{1}{2}.$

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 15^0. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 6.

Ответ: 1) 45^0, 135^0; 2) $S_{ABCD}=9(\sqrt{3}-1).$

Вариант № 4

1. Сколько существует натуральных чисел $n \le 1998$, для которых дробь $\dfrac{21n^3+50n^2+39n+31}{21n^2+29n+10}$ несократимая?

Ответ: 1142 чисел.

2. Решить уравнение

$$ctg\left(2x\left(\eta(x+3\pi)-\eta(x-6\pi)\right)\right)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x},$$

где $\eta(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k=-3,-2,\ldots,5.$

3. Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b)-P(a)$ делится на $(b-a)$ при любых целых $a,b,a\ne b$. Известно, что уравнение $P(x)=13$ имеет целый корень на полуоси $x\le -4$ и $P(-2)=2$. Найти этот корень.

Ответ: $x=-13.$

4. Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число кратное 7, имеющее при делении на 3 остаток 1.

Ответ: $P=0,043.$

5. Найти наибольшее отрицательное значение выражения $x-y$ для всех пар чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $(1-ctgx)(1+ctgy)=2$.

Ответ: $(x+y)_{\max}=-\dfrac{3\pi}{4}.$

6. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 75^0. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 4.

Ответ: 1) 75^0, 105^0; 2) $S_{ABCD} = 4(\sqrt{3}+2)$.