Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, Москва, март 2020

Вариант № 1

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за две минуты, Костя – за три. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin a; \sin 3a)$ симметрична точке с координатами $(\cos a; \cos 3a)$ относительно прямой с уравнением $x + y = 0$.

3. Поверхность коробки размером $3\times4\times5$ разбита на 94 квадрата размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 2880. Какие числа написаны на гранях коробки?

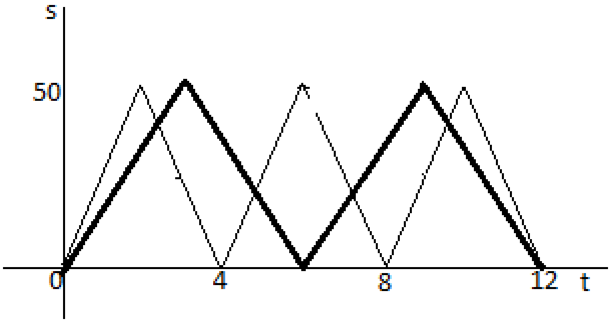
4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP:PB = 2:1, AQ:QC = 1:3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC.

5. Представить число 2020 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

6. В каком отношении $CE:CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 30^0, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Ответы и решения

1. Пусть $s_1(t), s_2(t)$ – расстояния до линии старта Пети и Кости соответственно в момент времени t. Графики этих функций изображены на рис.



Запишем аналитические выражения для $s_1(t), s_2(t)$:

$$s_1(t)=\frac{50}{\pi}\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right),\ \ s_2(t)=\frac{50}{\pi}\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right), t\geq 0$$

Моменты времени, когда пловцы находятся на одинаковом расстоянии от линии старта ($s=0$) определяются равенством:

$$s_1(t)=s_2(t)\to\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\to\left[\begin{array}{l} t_k=12k, k=0,1,.. \\ t_m=\dfrac{12m}{5}, m=0,1,.. \end{array}\right.$$

Вторая серия содержит в себе первую для m кратного 5. Неравенство $0 \le t_m \le 60$ дает искомое число раз:

$$0 \le \frac{12m}{5} \le 60 \to 0 \le m \le 25$$

т.е. 26 раз, включая начальное положение, пловцы находятся на одном расстоянии от линии старта.

Ответ: 26 раз.

2. Две точки $A(x;y)$ и $B(x';y')$ симметричны относительно прямой $x+y=0$, если $x'=-y, y'=-x$. Это приводит к системе:

$$\begin{cases} \sin a = -\cos 3a \\ \sin 3a = -\cos a \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$\sin a = -\cos 3a \to \cos 3a = \sin(-a) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) \to$$

$$\left[\begin{array}{l} 3a = \dfrac{\pi}{2} + a + 2\pi m \\ 3a = -\dfrac{\pi}{2} - a + 2\pi n \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{ll} a = \dfrac{\pi}{4} + \pi m & (*) \\ a = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} & (**) \end{array}\right. .$$

Подставляем (*) во второе уравнение системы:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+3\pi m\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi m\right) \to$$

$$(-1)^m \sin\frac{3\pi}{4} = -(-1)^m \cos\frac{\pi}{4} \to \frac{\sqrt{2}}{2} \ne -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Серия (*) решений не содержит.

Подставляем (**) во второе уравнение системы:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{3\pi n}{2}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right) \to$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{3\pi n}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}\right).$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{3\pi n}{2}=\dfrac{5\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{2}+2\pi s\\ \dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{3\pi n}{2}=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}+2\pi k\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{4}=-\pi n+2\pi s,\ (\wedge)\\ n=-k,\ (\wedge\wedge)\end{array}\right.$$

Серия (^) пуста, поскольку равенства нет ни при каких целых n и s. Серия (^^) содержит любые целые n. Серия (**) искомая.

Ответ: $a=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z.$

3. Пусть в квадратах граней $AA_1B_1B, AA_1D_1D, ABCD$ и параллельным им гранях написаны числа $x, y, z,$ соответственно. Длины ребер $AB=3, AD=5, AA_1=4$. Выберем любой центр M_1 квадрата, расположенного, например, в грани AA_1D_1D – начало маршрута Гоши. Существуют два допустимых по условиям 1) и 2) задачи маршрута с началом в этой точке. Первый, представляет собой ломаную пересечения поверхности коробки с плоскостью, проходящей через точку M_1, параллельную основанию $ABCD$. Сумма чисел σ_1, расположенных в квадратах на пути Гоши по этому маршруту, равна $\sigma_1=2(5y+3x)$. Второй допустимый маршрут – ломаная пересечения поверхности коробки и плоскости, проходящей через M_1 и параллельной грани AA_1B_1B. Соответствующая сумма для этого маршрута $\sigma_2=2(4y+3z)$. Возьмем любой центр M_2 квадрата, расположенного на грани DD_1C_1C и соответствующий ему маршрут, полученный пересечением поверхности коробки с плоскостью, параллельной грани AA_1D_1D. Соответствующая ему сумма $\sigma_3=2(4y+5z)$. Все три суммы по условию должны быть равными:

$$\begin{cases}2(4x+5z)=2(4y+3z)\\ 2(4x+5z)=2(3x+5y)\end{cases} \to \begin{cases}2x-2y+z=0\\ x-5y+5z=0\end{cases} \to$$

$$9x = 5y \to \begin{cases} x = 5t \\ y = 9t, t \in Z. \\ z = 8t \end{cases}$$

По условию,

$$2 \cdot (4x + 5z) = 2880.$$

В результате имеем

$$2(20t + 40t) = 2880 \to 120t = 2880 \to t = 24 \to$$
$$x = 5t = 120, y = 9t = 216, z = 8t = 192.$$

Ответ: $120, 192, 216$.

4. По условию задачи случайная величина $\xi = \dfrac{CM}{CB}$ равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Если x – значение с.в. ξ, то

$$\mathrm{s}(x) = \mathrm{S}_{PQM} = S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{3x}{4} - \frac{(1-x)}{3}\right) = \frac{S_{ABC}}{12}(6 - 5x) \to \frac{\mathrm{S}_{PQM}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{3}.$$

Тогда условие $\dfrac{\mathrm{S}_{PQM}}{S_{ABC}} \geq \dfrac{1}{3}$ принимает вид

$$\frac{6 - 5x}{12} \geq \frac{1}{3}.$$

Отсюда находим $x \leq \dfrac{2}{5}$. С учетом равномерности распределения $P(A) = \dfrac{2}{5}$.

Найдем математическое ожидание случайной величины $X = \dfrac{S_{PQM}}{S_{ABC}}$:

$$M_X = \int_0^1 \frac{6 - 5x}{12} dx = -\frac{1}{120}(6 - 5x)^2 \Big|_0^1 = \frac{7}{24}.$$

Ответ: 1) $P(A) = \dfrac{2}{5}$; 2) $M_X = \dfrac{7}{24}$.

5. Заметим, что для любого $n \in Z$

$$(n+1)^3+(n-1)^3+(-n)^3+(-n)^3=6n,$$

т.е. любое целое число вида $a=6n$ можно представить в виде суммы кубов четырех, а значит, с учетом нуля, и пяти целых чисел. Числа вида $a=6n\pm 1$ могут быть представлены в форме

$$a=(n+1)^3+(n-1)^3+(-n)^3+(-n)^3+\left(\pm 1\right)^3. \qquad (1)$$

Числа вида $a=6n+2=6(n-1)+8$ представляются суммой пяти кубов:

$$a=n^3+(n-2)^3+(-n+1)^3+(-n+1)^3+2^3. \qquad (2)$$

Для чисел вида $a=6n-2=6(n+1)-8$ справедливо представление:

$$a=(n+2)^3+n^3+(-n-1)^3+(-n-1)^3+\left(-2\right)^3. \qquad (3)$$

Наконец, для $a=6n+3=6(n-4)+27$ справедливо представление:

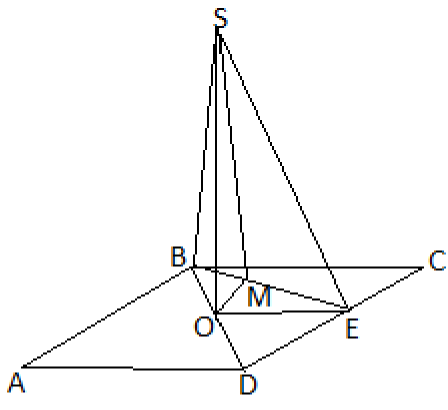
$$a=(n-3)^3+(n-5)^3+(-n+4)^3+(-n+4)^3+\left(3\right)^3 \qquad (4)$$

Представление числа $a=2020=337\cdot 6-2$ может быть получено по формуле (3) для $n=337$:

$$2020=(339)^3+337^3+(-338)^3+(-338)^3+\left(-2\right)^3.$$

Ответ: $2020=(339)^3+337^3+(-338)^3+(-338)^3+\left(-2\right)^3$.

6. Введем обозначения (см. рис): a – сторона основания, $\measuredangle SBO=\beta$, $OM\perp BE$, $\measuredangle CBE=\alpha$ – переменная величина, $\measuredangle EBD=45^0-\alpha$, $SO=H$ – высота пирамиды, $\measuredangle SMO=\gamma$.



Тогда

$$BO=\frac{a}{\sqrt{2}},OM=\frac{a\sin\left(45^0-\alpha\right)}{\sqrt{2}},BE=\frac{a}{\cos\alpha}.$$

Найдем площадь проекции сечения BSE

$$S_{BOE}=\frac{a^2\sin\left(45^0-\alpha\right)}{2\sqrt{2}\cos\alpha}.$$

Вычислим угол наклона сечения BSE :

$$tg\gamma=\frac{H}{OM}=\frac{H\sqrt{2}}{a\sin(45^0-\alpha)}\to 1+tg^2\gamma=1+\frac{2H^2}{a^2\sin^2(45^0-\alpha)}\to$$

$$\frac{1}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{2H^2+a^2\sin^2(45^0-\alpha)}}{a\sin(45^0-\alpha)}.$$

Тогда

$$S_{SBE}=\frac{S_{BOE}}{\cos\gamma}=\frac{a}{2\sqrt{2}\cos\alpha}\sqrt{2H^2+a^2\sin^2\left(45^0-\alpha\right)}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$S_{SBE}=\frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4H^2+a^2(1-\sin 2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}}$$

Наименьшее значение площади соответствует значению α, $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, при котором функция

$$f(\alpha)=\frac{4H^2+a^2(1-\sin 2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}$$

имеет минимум.

Для нахождения экстремумов вычислим производную полученной функции и приравняем ее нулю:

$$f'(\alpha)=\left(\frac{4H^2+a^2(1-\sin 2\alpha)}{1+\cos 2\alpha}\right)'=$$

$$\frac{-2a^2\cos 2\alpha\cdot\left(1+\cos 2\alpha\right)+2\left(4H^2+a^2(1-\sin 2\alpha)\right)\sin 2\alpha}{\left(1+\cos 2\alpha\right)^2}=$$

$$=\frac{-2a^2+2(4H^2+a^2)\sin 2\alpha-2a^2\cos 2\alpha}{\left(1+\cos 2\alpha\right)^2}=$$

$$\frac{4(4H^2+a^2)\sin\alpha\cos\alpha-4a^2\cos^2\alpha}{\left(1+\cos 2\alpha\right)^2}=0.$$

На отрезке $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos\alpha\neq 0$, поэтому единственной критической точкой $\alpha=\alpha*$ является точка, для которой

$$tg\alpha*=\frac{a^2}{4H^2+a^2}.$$

Так как $f'(0)=-a^2<0,$ а $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8H^2>0,$ то найденная точка является точкой минимума. С учетом того, что $H=\frac{atg\beta}{\sqrt{2}}$, получаем

$$tg\alpha*=\frac{1}{2tg^2\beta+1}.$$

Тогда $CE:CD=CE:BC=tg\alpha*=\frac{1}{2tg^2\beta+1}=\frac{1}{2/3+1}=\frac{3}{5}.$

Ответ: $3:5$.

Вариант № 2

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за две минуты, Костя – за три. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

Ответ: 46 раз.

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin a; \sin 3a)$ симметрична точке с координатами $(\cos a; \cos 3a)$ относительно прямой с уравнением $x + y = 0$.

Ответ: $a = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ a = (2n-1)\pi,\ n \in Z.$

3. Поверхность коробки размером $3\times4\times5$ разбита на 94 квадрата размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 2880. Какие числа написаны на гранях коробки?

Ответ: 18, 20, 8.

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 2:1,\ AQ : QC = 1:3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC.

Ответ: 1) $P(A) = \frac{9}{16}$; 2) $M_X = \frac{4}{15}$.

5. Представить число 2020 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

Ответ: $2024 = 337^3 + (335)^3 + (-336)^3 + (-336)^3 + 2^3.$

6. В каком отношении $CE:CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 30^0, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Ответ: $1:4$.

Вариант № 3

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за одну минуту, Костя – за 80 сек. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 45 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

Ответ: 40 раз.

2. При каких значениях a точка с координатами $(\sin 2a; \cos 3a)$ симметрична точке с координатами $(\sin 3a; \cos 2a)$ относительно оси ординат.

Ответ: $a = \dfrac{2\pi n}{5}, n \in Z.$

3. Поверхность коробки размером $3 \times 5 \times 7$ разбита на 142 квадрата размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 1260. Какие числа написаны на гранях коробки?

Ответ: $21, 75, 81$.

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 1:3$, $AQ : QC = 1:1$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в шесть раз. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC.

Ответ: 1) $P(A) = \dfrac{5}{6}$; 2) $M_X = \dfrac{1}{4}$.

5. Представить число 1947 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

Ответ: $1947 = (321)^3 + (319)^3 + (-320)^3 + (-320)^3 + (3)^3$.

6. В каком отношении $CE : CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с углом при вершине 60^0, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Ответ: $1:3$.

Вариант № 4

1. В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за 42 сек, Костя – за 90 сек. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

Ответ: 80 раз.

2. При каких значениях a точка с координатами $(\cos a; \sin a)$ симметрична точке с координатами $(\cos 2a; -\sin 2a)$ относительно прямой с уравнением $x - y = 0$.

Ответ: $a = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

3. Поверхность коробки размером $4 \times 5 \times 6$ разбита на 148 квадратов размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила: 1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки; 2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту; 3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 960. Какие числа написаны на гранях коробки?

Ответ: $36, 50, 56.$

4. Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 1:4,\ AQ : QC = 3:1$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в два раза. Найти математическое ожидание случайной величины – отношения площадей треугольников PQM и ABC.

Ответ: 1) $P(A) = \dfrac{2}{11}$; 2) $M_X = \dfrac{13}{40}$.

5. Представить число 1480 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

Ответ: $1480=(249)^3+247^3+(-248)^3+(-248)^3+\left(-2\right)^3$.

6. В каком отношении $CE:CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, противоположные боковые ребра которой составляют угол 60^0, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

Ответ: $1:7$.