Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
9 класс, Москва, Россия, март 2020

Вариант № 1

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 160, 60 и 20км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 400м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

2. Найти девять натуральных чисел кратных шести, среди которых ни одно число не кратно другому, но куб каждого числа кратен квадрату любого из них.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a, b, c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа $a, b, c.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ и имеющих сумму 120. Известно, что k -ое по порядку написанное число a_k, кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n .

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и $AC,$ пересекающие прямые AC и AB в точках

N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника. Найти угол при вершине A треугольника.

Ответы и решения

1. До выезда красного автомобиля на границу грунтового участка оба автомобиля движутся по шоссе с одинаковой скоростью, следовательно, расстояние между ними не меняется, оставаясь равным 400 метрам. Таким образом, можно начать рассматривать движение машин в момент пересечения красным автомобилем границы грунтового участка со стороны шоссе. При этом белый автомобиль находится на шоссе в 400 метрах до границы с грунтовым участком. Он достигнет этой границы через $\frac{0,400}{160}$ часа, за это время красный автомобиль проедет $s_1 = \frac{0,400}{160} \cdot 60 = 0,150$ км. Здесь мы учитываем, что по условию задачи оба автомобиля могли находиться на грунтовой дороге одновременно. Пока оба автомобиля находятся на грунте расстояние между ними остается равным $s_1 = 150$ м. Аналогичными рассуждениями получаем, что расстояние между автомобилями на грязевом участке пути постоянно и равно $s_2 = \frac{0,150}{60} \cdot 20 = 0,050$ км $= 50$ м.

Ответ: $s_1 = 150$ м, $s_2 = 50$ м.

2. При решении задачи возможны следующие рассуждения. Все искомые числа делятся на 6, значит, в их разложении на простые множители должны присутствовать числа 2 и 3. Пусть тогда $a_1 = 2^m \cdot 3^n$. Если в последующих числах $a_2, a_3, \ldots, a_9$ показатели m монотонно возрастают, а показатели n монотонно убывают, например, $a_2 = 2^{m+1} \cdot 3^{n-1}$, $a_3 = 2^{m+2} \cdot 3^{n-2}$, ... , $a_9 = 2^{m+8} \cdot 3^{n-8}$, то ни одно из чисел не может быть кратно другому, таким образом выполняется второе условие задачи. Далее, у кубов этих чисел наименьший показатель двойки есть $3m$ и он должен быть не меньше, чем наибольший показатель двойки у квадратов чисел, то есть $2(m+8)$. Из $3m \geq 2(m+8)$ получаем, что $m \geq 16$. Аналогично, для показателей тройки имеем условие $3(n-8) \geq 2n$. Откуда $n \geq 24$. Таким образом, при $m \geq 16$ и $n \geq 24$ куб каждого из чисел $a_1, \ldots, a_9$ будет делится на квадрат любого другого из них.

Ответ: Например, $a_1 = 2^{16} \cdot 3^{24}$, $a_2 = 2^{17} \cdot 3^{23}$, $a_3 = 2^{18} \cdot 3^{22}$, ... , $a_9 = 2^{24} \cdot 3^{16}$.

Замечание. Очевидно, верный ответ определен неоднозначно. Существует много других правильных стратегий решения данной задачи. Общим во всех стратегиях является то, что все числа набора содержат одинаковые простые множители, среди которых обязательно должны быть 2 и 3. В качестве иного возможного ответа можно привести набор чисел вида $a_k = a^2 \cdot p_k$, $k = 1, ..., 9$, где $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots, p_9 = 23$ – первые девять простых чисел, и $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_9$.

3. Поскольку a, b, c являются последовательными членами возрастающей целочисленной арифметической прогрессии, то $a = b - d$, $c = b + d$; $b, d \in Z$, $d > 0$. Кроме того, $b \neq 0$, $b \neq \pm d$, так как по условию рассматриваются ненулевые члены прогрессии.

Имеется три возможных значения дискриминанта для квадратных уравнений с коэффициентами a, b, c, взятыми в произвольном порядке: $D_1 = b^2 - 4(b-d)(b+d) = 4d^2 - 3b^2$,

$$D_2 = (b-d)^2 - 4b(b+d) = d^2 - 6bd - 3b^2,$$

$$D_3 = (b+d)^2 - 4b(b-d) = d^2 + 6bd - 3b^2.$$

Для существования двух различных корней у всех квадратных уравнений, должны быть выполнены условия:

$$\begin{cases} 4d^2 - 3b^2 > 0, \\ d^2 - 6bd - 3b^2 > 0, \\ d^2 + 6bd - 3b^2 > 0. \end{cases}$$

Решим эту систему неравенств, учитывая, что $d > 0$. Имеем

$$\begin{cases} -\dfrac{2d}{\sqrt{3}} < b < \dfrac{2d}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1 < b < \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1 \\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1 < b < \dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow |b| < \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)d \Leftrightarrow d > \dfrac{|b|\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

Наименьшее значение $|b| = 1$. Тогда $d > \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \approx 6,5$ и наименьшее целое $d_{\min} = 7$. Для $b = -1$ получаем значения $a = -8, c = 6$. Для $b = 1$ будут значения $a = -6, c = 8$.

Ответ: $d_{\min} = 7;\ a_1 = -8,\ b_1 = -1,\ c_1 = 6;\ \ a_2 = -6,\ b_2 = 1,\ c_2 = 8.$

4. По условию, $a_k = \dfrac{a_1 + a_2 + ...a_{k-1} + a_{k+1} + ...a_n}{k+1} = \dfrac{120 - a_k}{k+1}$ для всех $k = 1, 2, ..., n-1$. Отсюда $(k+2)a_k = 120$ и $a_k = \dfrac{120}{k+2}$.

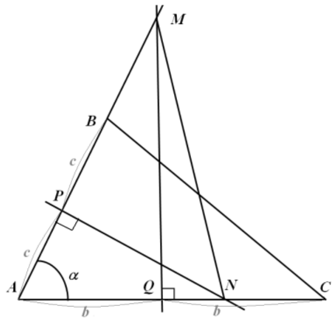
С учетом того, что a_k – целые числа, максимальное значение n определяется условием делимости числителя на $3, 4, 5, ..., n, (n+1)$. Поскольку 120 делится на $3, 4, 5, 6$, но не делится на 7, получаем $n + 1 = 6,$ следовательно $n_{\max} = 5.$ Вычисляем $a_1 = \dfrac{120}{3} = 40,$ $a_2 = \dfrac{120}{4} = 30,\ a_3 = \dfrac{120}{5} = 24,\ a_4 = \dfrac{120}{6} = 20.$ Теперь находим оставшееся число $a_5 = 120 - (40 + 30 + 24 + 20) = 6.$

Ответ: $n_{\max} = 5,\ a_1 = 40,\ a_2 = 30,\ a_3 = 24,\ a_4 = 20,\ a_5 = 6.$

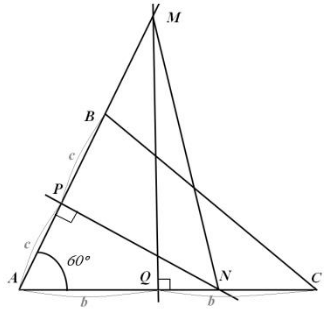
5. Введем обозначения: $AB = 2c,\ AC = 2b,\ \measuredangle BAC = \alpha.$ Основания серединных перпендикуляров обозначим точками P и Q. Тогда в прямоугольном $\triangle AMQ$ гипотенуза $AM = \dfrac{b}{\cos\alpha}$. А в прямоугольном $\triangle ANP$ гипотенуза $AN=\dfrac{c}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольников AMN и ABC соответственно, имеем

$$NM^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos\alpha=\frac{c^2+b^2-2bc\cos\alpha}{\cos^2\alpha},$$

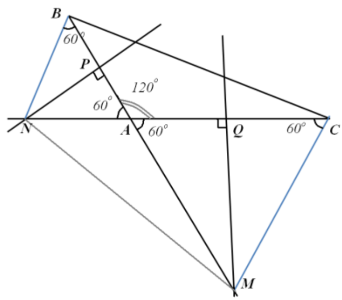
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha=4\left(c^2+b^2-2bc\cos\alpha\right).$$



По условию, $MN=BC$, следовательно $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha=60^0$ или $\alpha=120^0$. Покажем, что оба случая реализуются, то есть что если $\alpha=60^0$ или $\alpha=120^0$, то $MN=BC$.



Случай 1. Если $\alpha=60^0$, то $\measuredangle PNA=30^0$, тогда $AN=2c=AB$, и $\measuredangle AMQ=30^0$, тогда $AM=2b=AC$. Отсюда $\triangle ANM=\triangle ABC$ по двум сторонам и углу α между ними. Следовательно, $MN=BC$.



Случай 2. Если $\alpha=120^0$, то $\measuredangle BAN=60^0$. Далее, $AN=NB$, то есть $\triangle NAB-$ равнобедренный, поэтому $\measuredangle ABN=60^0$, таким образом, $\triangle NAB-$ равносторонний. Следовательно, $AN=AB$. Аналогично $\triangle MAC-$ равносторонний. Следовательно, $AM=AC$. Отсюда

$\triangle ANM = \triangle ABC$ по двум сторонам и углу α между ними. Следовательно, $MN = BC$.

Ответ: 60^0 или 120^0.

Вариант № 2

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 120, 40 и 10км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 600м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

Ответ: $s_1 = 200$ м, $s_2 = 50$ м.

2. Найти 10 натуральных чисел кратных 15, среди которых ни одно число не кратно другому, но четвертая степень каждого числа кратна кубу любого из них.

Ответ: Например, $a_1 = 3^{27} \cdot 5^{36}$, $a_2 = 3^{28} \cdot 5^{35}$, $a_3 = 3^{29} \cdot 5^{34}$, ... , $a_{10} = 3^{36} \cdot 5^{27}$.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами убывающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $2a, 2b, c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа a, b, c.

Ответ: $d_{\max} = -5$; $a = 4$, $b = -1$, $c = -6$.

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > ... > a_n$ и имеющих сумму 2520. Известно, что k-ое по порядку написанное число a_k, кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n.

Ответ: $n_{\max} = 9$; $a_1 = 840$, $a_2 = 630$, $a_3 = 504$, $a_4 = 420$, $a_5 = 360$, $a_6 = 315$, $a_7 = 280$, $a_8 = 252$, $a_9 = -1081$.

5. В треугольнике ABC с углом 120^0 при вершине A проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и AC, пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина стороны BC равна 8. Найти длину отрезка NM.

Ответ: 8.

Вариант № 3

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 100, 70 и 15км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 500м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

Ответ: $s_1 = 350$ м, $s_2 = 75$ м.

2. Найти 13 натуральных чисел кратных 21, среди которых ни одно число не кратно другому, но пятая степень каждого числа кратна четвертой степени любого из них.

Ответ: например, $a_1 = 3^{48} \cdot 7^{60}$, $a_2 = 3^{49} \cdot 7^{59}$, $a_3 = 3^{50} \cdot 7^{58}$, ... , $a_{13} = 3^{60} \cdot 7^{48}$.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a, b, 2c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два различных корня. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа a, b, c.

Ответ: $d_{\min} = 4;\ a = -5,\ b = -1,\ c = 3.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > ... > a_n$ и имеющих сумму $420.$ Известно, что k -ое по порядку написанное число $a_k,$ кроме последнего, полученного при $k = n,$ в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного $n.$

Ответ: $n_{\max} = 6;\ a_1 = 140,\ a_2 = 105,\ a_3 = 84,\ a_4 = 70,\ a_5 = 60,$ $a_6 = -39.$

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и $AC,$ пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника и равна $2\sqrt{3}.$ Найти радиус окружности, описанной около треугольника $ABC.$

Ответ: $R = 2.$

Вариант № 4

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 150, 60 и 18км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 300м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

Ответ: $s_1 = 120$ м, $s_2 = 36$ м.

2. Найти 15 натуральных чисел кратных 35, среди которых ни одно число не кратно другому, но шестая степень каждого числа кратна пятой степени любого из них.

Ответ: Например, $a_1 = 5^{70} \cdot 7^{84}$, $a_2 = 5^{71} \cdot 7^{83}$, $a_3 = 5^{72} \cdot 7^{82}$, ... , $a_{15} = 5^{84} \cdot 7^{70}$.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами убывающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a, 2b, 4c$, взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа a, b, c.

Ответ: $d_{\max} = -3$; $a = 4$, $b = 1$, $c = -2$.

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > ... > a_n$ и имеющих сумму 840. Известно, что k-ое по порядку написанное число a_k, кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n.

Ответ: $n_{\max} = 7$; $a_1 = 280$, $a_2 = 210$, $a_3 = 168$, $a_4 = 140$, $a_5 = 120$, $a_6 = 105$, $a_7 = -183$.

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и AC, пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника. Угол при вершине C треугольника равен 40^0. Найти угол при вершине B треугольника.

Ответ: 80^0 или 20^0.