Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
9 класс, СНГ, февраль 2020

Вариант № 1

1. В 9а классе есть ученики, увлеченные кино, но есть и такие, которые увлечены чтением книг. Шестая часть любителей просмотра кинофильмов читает книги, а 20% книголюбов с удовольствием смотрят кино. В классе есть только три ученика, которые не смотрят фильмов и не читают книг. Сколько учеников в 9а классе, если их не менее 25, но не более 35?

2. На окружности отмечены 18 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно единице. Найти их сумму.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 2 : 1$. Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 8.

4. Сумма $b_5 + b_6 + \ldots + b_{2019}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 18, а их произведение $b_5 \cdot b_6 \cdot \ldots \cdot b_{2019}$ равно 3^{2015}. Найти сумму обратных величин $\frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_6} + \ldots + \frac{1}{b_{2019}}$.

5. Известно, что в трапецию с углом 30^0 при основании можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение площади трапеции к площади, вписанного в нее круга. Найти отношение площади трапеции к площади, описанного около нее круга.

Ответы и решения

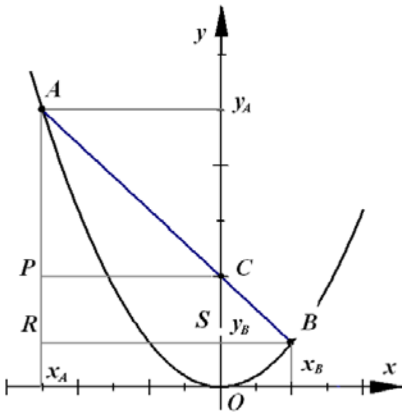
1. Пусть x – число кинолюбителей в классе, y – число книголюбов, а z – число кинолюбителей, которые любят читать книги, $x, y, z \in Z$. По условию, $z = \frac{x}{6} = \frac{y}{5}$, следовательно $\begin{cases} x = 6z \\ y = 5z \end{cases}$. Отсюда получаем общее число учеников в классе $n = x + y - z + 3 = 10z + 3$. Поскольку $n \in [25; 35]$, имеем двойное неравенство $25 \le 10z + 3 \le 35$, откуда $z = 3 \Rightarrow n = 10 \cdot 3 + 3 = 33$.

Ответ: 33 ученика.

2. Все написанные числа неотрицательные, поскольку они равны модулю разности соседей. Рассмотрим число с наибольшим значением. Без ограничения общности можно считать, что $x_2 = 1$. Его соседи x_1 и x_3 – два неотрицательных числа, не превосходящие 1, такие что $|x_1 - x_3| = 1$. Этим условиям удовлетворяют только числа 0 и 1 (в любом порядке). Таким образом возможны два расположения тройки чисел: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$ и $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$. Каждая из троек однозначно определяет все остальные числа на окружности. Это будут последовательности $0,1,1,0,1,1,\ldots,0,1,1$ и $1,1,0,1,1,0,\ldots,1,1,0$ соответственно. В любом случае, на окружности нарисованы 12 единиц и 6 нулей. Их сумма равна 12.

Ответ: 12.

3. Пусть $(x_A; y_A), (x_B; y_B)$ – соответственно координаты точек A и B на параболе. Тогда $y_A = x_A^2$, $y_B = x_B^2$. Рассмотрим ради определенности случай $x_A < 0,\ x_B > 0$. Согласно условию, длины отрезков AC и CB равны $2t$ и t соответственно, значит, точка A лежит выше точки B. Поскольку $\triangle APC \sim \triangle ARB$, имеет место пропорция $\frac{y_A - y_B}{y_A - 8} = \frac{2t + t}{2t} = \frac{3}{2}$, откуда $y_A = 24 - 2y_B$.



Далее, $\triangle CSB \sim \triangle ARB$, поэтому $\dfrac{x_B - x_A}{x_B} = \dfrac{2t+t}{t} = \dfrac{3}{2}$, тогда

$$x_A = -2x_B \Rightarrow x_A^2 = 4x_B^2 \Rightarrow y_A = 4y_B.$$

Наконец, решая систему $\begin{cases} y_A = 24 - 2y_B \\ y_A = 4y_B \end{cases}$, получим что

$$y_B = 4 \Rightarrow x_B = 2 \Rightarrow x_A = -4.$$

Из соображений симметрии, при $x_A > 0,\ x_B < 0,$ имеется решение $x_B = -2,\ x_A = 4.$

Ответ: $\left(x_A = -4,\ x_B = 2\right),\ \left(x_A = 4,\ x_B = -2\right).$

4. Поскольку все члены прогрессии положительны, ее знаменатель $q > 0$. Легко проверить, что $q \neq 1$. Иначе все рассматриваемые члены прогрессии были бы меньше единицы, и их произведение не могло бы равняться 18. Теперь рассмотрим сумму

$$b_5 + b_6 + \ldots + b_{2019} = b_5\left(1 + q + \ldots + q^{2014}\right) = b_5 \cdot \frac{1 - q^{2015}}{1 - q} = 18,$$

и произведение

$$b_5 \cdot b_6 \cdot \ldots \cdot b_{2019} = b_5^{2015} \cdot q^{1+2+\ldots+2014} = b_5^{2015} \cdot q^{\frac{(1+2014)}{2}\cdot 2014} = .$$

$$b_5^{2015} \cdot q^{2015\cdot 1007} = \left(b_5 \cdot q^{1007}\right)^{2015} = 3^{2015} \Rightarrow b_5 \cdot q^{1007} = 3.$$

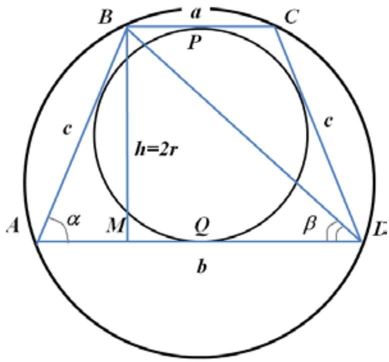
Обратные величины также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1}{q}$ и первым членом $\dfrac{1}{b_5}$, так что получим:

$$\frac{1}{b_5}+\frac{1}{b_6}+\ldots\frac{1}{b_{2019}}=\frac{1}{b_5}\left(1+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q^{2014}}\right)=\frac{1}{b_5}\cdot\frac{1-\frac{1}{q^{2015}}}{1-\frac{1}{q}}=$$

$$\frac{1}{b_5}\cdot\frac{q^{2015}-1}{(q-1)q^{2014}}=b_5\cdot\frac{q^{2015}-1}{(q-1)}\cdot\frac{1}{\left(b_5\cdot q^{1007}\right)^2}=\frac{18}{3^2}=2.$$

Ответ: 2.

5. Введем обозначения: $ABCD-$данная трапеция с основаниями AD и BC, $r-$радиус вписанной окружности, $R-$ радиус описанной окружности, $BM=h=2r-$ высота трапеции. Поскольку трапеция вписана в окружность, она равнобедренная. Пусть $BC=a$, $AD=b$, $AB=CD=c$. Угол при основании трапеции $\alpha=30^0$, угол $\measuredangle MDB=\beta$, $P,Q-$середины оснований.



По свойству описанных около окружности четырехугольников, имеем $2c=a+b$. Тогда $\frac{2r}{c}=\frac{4r}{a+b}=\sin\alpha=\frac{1}{2}$, следовательно $a+b=8r$. Площадь трапеции $S=\frac{a+b}{2}h=(a+b)r=8r^2=\frac{c^2}{2}$.

Площадь вписанной окружности $S_1=\pi r^2$, поэтому $\frac{S}{S_1}=\frac{8r^2}{\pi r^2}=\frac{8}{\pi}$.

Далее, $MD = MQ + QD = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{a+b}{2} = c.$ Из $\triangle BMD$ получаем: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2r}{c} = \sin\alpha,$ откуда $\dfrac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \sin^2\alpha = \dfrac{5}{4},$ следовательно $\dfrac{1}{\cos\beta} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$ Таким образом, $BD = \dfrac{c}{\cos\beta} = \dfrac{c\sqrt{5}}{2}.$

По теореме синусов, $2R = \dfrac{BD}{\sin\alpha} = c\sqrt{5} \Rightarrow R = \dfrac{c\sqrt{5}}{2}.$

Отсюда площадь описанной окружности $S_2 = \pi R^2 = \dfrac{5\pi c^2}{4}.$

Тогда $\dfrac{S}{S_2} = \dfrac{c^2}{2}\dfrac{4}{5\pi c^2} = \dfrac{2}{5\pi}.$

Ответ: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{8}{\pi}, \quad \dfrac{S}{S_2} = \dfrac{2}{5\pi}.$

Вариант № 2

1. В $9^{б}$ классе 25% любителей рока с удовольствием слушают классическую музыку, а пятая часть любителей классики слушает рок. Только два ученика в классе не слушают музыку. Сколько учеников в $9^{б}$ классе, если известно, что их не менее 25, но не более 30?

Ответ: 26 учеников.

2. На окружности отмечены 15 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно двум. Найти сумму квадратов написанных чисел.

Ответ: 40.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 5 : 3$ Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 15.

Ответ: $(x_A = -5,\ x_B = 3),\ (x_A = 5,\ x_B = -3)$.

4. Сумма $b_7 + b_6 + \ldots + b_{2019}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\},\ b_n > 0$ равна 27, а сумма их обратных величин $\frac{1}{b_7} + \frac{1}{b_6} + \ldots + \frac{1}{b_{2019}}$ равна 3. Найти произведение $b_7 \cdot b_6 \cdot \ldots \cdot b_{2019}$.

Ответ: $b_7 \cdot b_6 \cdot \ldots \cdot b_{2019} = 3^{2013}$.

5. Известно, что в трапецию с углом 60^0 при основании можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение периметра трапеции к длине, вписанной в нее окружности. Найти отношение периметра трапеции к длине, описанной около нее окружности.

Ответ: $\frac{P}{L_1} = \frac{8\sqrt{3}}{3\pi},\ \frac{P}{L_2} = \frac{4\sqrt{21}}{7\pi}$.

Вариант № 3

1. В $9^{в}$ классе пятая часть любителей сладкого любят поесть соленого, а треть любителей соленого не отказывается от сладкого. Только четыре ученика не едят ни сладкого, ни соленого. Сколько учеников в $9^{в}$ классе, если их не менее 30 и не более 36?

Ответ: 32 ученика.

2. На окружности отмечены 12 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Сумма всех чисел равна 24. Найти наибольшее из них.

Ответ: 3.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 3 : 2$. Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 12.

Ответ: $\left(x_A = -3\sqrt{2},\ x_B = 2\sqrt{2}\right),\ \left(x_A = 3\sqrt{2},\ x_B = -2\sqrt{2}\right)$.

4. Сумма $b_6 + b_7 + ... + b_{2018}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 6. Сумма тех же членов взятых с чередованием знаков $b_6 - b_7 + b_8 - ... - b_{2017} + b_{2018}$ равна 3. Найти сумму квадратов тех же членов $b_6^2 + b_7^2 + ... + b_{2018}^2$.

Ответ: $b_6^2 + b_7^2 + ... + b_{2018}^2 = 18$.

5. Известно, что в трапецию $ABCD$, у которой диагональ BD образует с основанием угол 45^0, можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение площади трапеции к площади, вписанного в нее круга. Найти отношение площади трапеции к площади, описанного около нее круга.

Ответ: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{4}{\pi}$, $\quad \dfrac{S}{S_2} = \dfrac{2}{\pi}$.

Вариант № 4

1. В $9^г$ классе 25% учеников, играющих в футбол, занимаются шахматами, а каждый седьмой любитель шахмат играет в футбол. Только один ученик не играет в футбол и не играет в шахматы. Сколько учеников в $9^г$ классе, если их не менее 18, но не более 25?

Ответ: 21 ученик.

2. На окружности отмечены 9 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно четырем. Найти сумму кубов этих чисел.

Ответ: 384.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 5 : 2$ Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 20.

Ответ: $\left(x_A = -5\sqrt{2},\ x_B = 2\sqrt{2}\right),\ \left(x_A = 5\sqrt{2},\ x_B = -2\sqrt{2}\right).$

4. Сумма $b_8^2 + b_9^2 + \ldots + b_{2020}^2$ квадратов членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 4. Сумма их обратных величин $\frac{1}{b_8^2} + \frac{1}{b_9^2} + \ldots + \frac{1}{b_{2020}^2}$ равна 1. Найти произведение $b_8^2 \cdot b_9^2 \cdot \ldots \cdot b_{2020}^2$.

Ответ: $b_8^2 \cdot b_9^2 \cdot \ldots \cdot b_{2020}^2 = 2^{2013}.$

5. Известно, что в трапецию $ABCD$, у которой диагональ BD образует с основанием угол 30^0, можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение периметра трапеции к длине, вписанной в нее окружности. Найти отношение периметра трапеции к длине, описанной около нее окружности.

Ответ: $\frac{P}{L_1} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi},\quad \frac{P}{L_2} = \frac{2}{\pi}.$