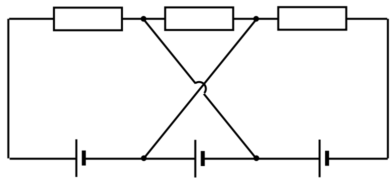
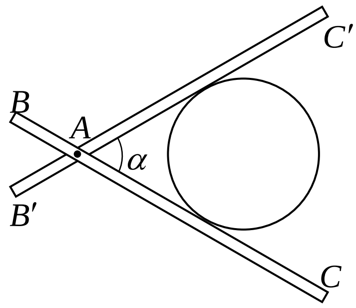
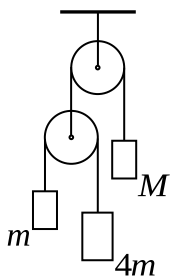
Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 10 класс
2019-2020 учебный год



1. Электрическая цепь, схема которой показана на рисунке, содержит три одинаковых источника с ЭДС $\varepsilon = 1{,}5$ В с нулевым внутренним сопротивлением и три резистора, два из которых имеют сопротивление $R = 100$ Ом, третий - $2R$. Найти ток через средний источник. Сопротивления проводов пренебрежимо малы.

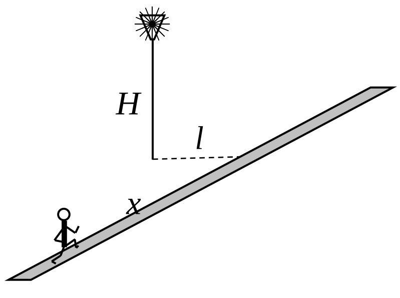


2. На горизонтальной поверхности между двумя одинаковыми стержнями BC и $B'C'$ находится шайба. Стержни скреплены шарнирно в точке А (см. рисунок; вид сверху). Концы стержней B и B' сжимают, перемещая шайбу по поверхности. При каком угле между стержнями α наступит заклинивание - шайба перестанет двигаться при любом усилии, прикладываемом к точкам B и B'? Коэффициент трения между стержнями и шайбой - μ, трение между шайбой и поверхностью отсутствует.



3. Имеется система трех грузов и двух блоков, показанная на рисунке. Блоки и нити в системе невесомы, нити нерастяжимы. Массы двух нижних тел равны m и $4m$. При какой массе третьего тела M одно из тел может находиться в покое?

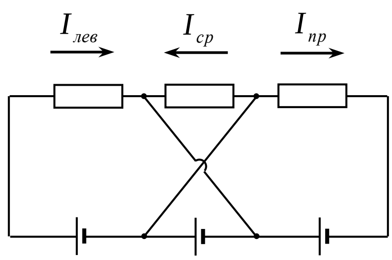
4. С некоторым количеством одноатомного идеального газа проводят процесс, в котором его теплоемкость остается постоянной, а газ совершает работу A ($A > 0$). Затем с этим же газом проводят изохорический процесс, в котором к нему подводят количество теплоты $Q = (3/4)A$, а его температура возвращается к первоначальному значению. Определить молярную теплоемкость газа в первом процессе. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$К) известна. Получает или отдает газ энергию в первом процессе в результате теплообмена?



5. Мальчик, рост которого h идет с постоянной скоростью v по прямой дорожке, проходящей на расстоянии l от фонаря высотой H (см. рисунок). Найти скорость тени на земле от головы мальчика в тот момент времени, когда расстояние от мальчика до точки дорожки, находящейся на минимальном расстоянии от основания фонаря, равно $x = 2l$.

Решения

1. Возможны два типа соединения двух резисторов R и одного $2R$ в рассматриваемой цепи – (1) резистор $2R$ находится посередине между двумя резисторами R или (2) резистор $2R$ находится с краю (неважно с какого, поскольку одно его расположение (например, «левое») сводится ко второму («правому») переворачиванием цепи и источников). Рассмотрим отдельно оба типа соединений.



1. Пусть резистор $2R$ расположен между двумя резисторами R. Поскольку источники не имеют внутренних сопротивлений, напряжение на зажимах источника (при любом токе через них) равно его ЭДС. Поэтому напряжение на среднем сопротивлении равно ε, а ток через него можно найти по закону Ома для участка цепи

$$I_{ср} = \frac{\varepsilon}{2R},$$

течет этот ток справа налево (см. рисунок). Аналогично находим, что ток через левый резистор равен $I_{лев} = 2\varepsilon / R$ и течет слева направо (см. рисунок). Ток через правый резистор равен $I_{пр} = 2\varepsilon / R$ и течет слева направо (см. рисунок). В результате по проводу, наклоненному слева-направо-вниз, течет ток $I_{лев} + I_{ср}$, через правый источник справа налево течет ток $I_{пр}$. Следовательно, в правый нижний узел по двум проводам втекает ток $I_{лев} + I_{ср} + I_{пр}$, который должен вытекать по третьему проводу к среднему источнику. Поэтому через средний источник в направлении справа налево течет ток

$$I = I_{лев} + I_{ср} + I_{пр} = \frac{9\varepsilon}{2R} = 0{,}135 \text{ А}$$

2. Если больший резистор находится слева, ток через средний резистор также определяется формулой

$$I = I_{лев} + I_{ср} + I_{пр}$$

Но токи через резисторы меняются:

$$I_{лев} = \frac{2\varepsilon}{2R} = \frac{\varepsilon}{R},\ I_{ср} = \frac{\varepsilon}{R},\ I_{ср} = \frac{2\varepsilon}{R}$$

Поэтому

$$I = I_{лев} + I_{ср} + I_{пр} = \frac{4\varepsilon}{R} = 0{,}12 \text{ А}$$

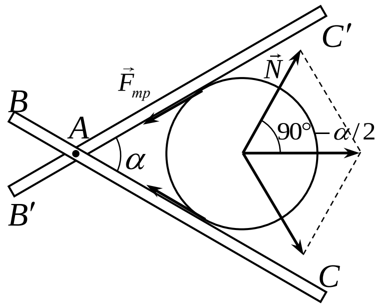
Течет этот ток справа налево. Если бы большее сопротивление было бы справа, ток через средний резистор был бы таким же.

Критерии оценки задачи

1. Правильная идея решения – закон Ома плюс условия ненакопления заряда в узлах (сумма токов, втекающих в каждый узел, равна сумме вытекающих) - 0,5 балла,
2. Понято, что есть два варианта расположения сопротивлений – 0,5 балла,
3. Правильные уравнения для закона Ома и ненакопления заряда в узлах – 0,5 балла,
4. Правильные ответы – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. При действии на точки B и B' «сжимающих» сил возникнут силы реакции, действующие со стороны стержней на шайбу, сумма которых направлена от шарнира, соединяющего стержни. Эта сила будет действовать на шайбу, выталкивая ее из системы стержней. С другой стороны, при этом возникнут силы трения, которые направлены к шарниру, скрепляющему стержни, и которые препятствуют движению шайбы (см. рисунок). Шайба будет двигаться, если сумма сил реакции (которые определяются тем, как мы сжимаем концы стержней B, и потому могут быть любыми) будет превосходить сумму двух сил трения, которая будет направлена к шарниру А. При этом силы трения будут принимать свои максимальные значения μN. То есть движение будет, если



$$2N\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) \geq 2\mu N\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

или

$$\mu \leq tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

И соответственно движения не будет ни при какой силе N (т.е. произойдет заклинивание), если

$$\mu \geq tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Критерии оценки задачи

1. Правильная расставлены силы, действующие на шайбу - 0,5 балла,
2. Правильное условие начала движения шайбы – 0,5 балла,
3. Использовано правильное условие для максимальной силы трения покоя – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Чтобы тело могло быть в покое, сумма действующих на него сил должна равняться нулю. Кроме того, должны выполняться условия связи сил натяжения (натяжение нижней веревки должно быть вдвое меньшим натяжения верхней). И должны быть связаны ускорения тел: если в покое находится тело массой M, ускорения тел m и $4m$ равны друг другу и направлены противоположно, если в покое находится одно из тел m или $4m$, ускорение второго тела и тела массой M должны отличаться вдвое. Проверим выполнимость этих условий для всех трех возможных вариантов покоя тел.

1. Пусть в покое находится тело M. Тогда сила натяжения веревки, переброшенной через верхний блок, должна равняться Mg, а сила натяжения веревки, переброшенной через нижний блок - $Mg/2$. Ускорения тел m и $4m$ в этом случае равны

$$a_m = \frac{(M/2 - m)}{m}g\,,\ a_{4m} = \frac{(4m - M/2)}{4m}g$$

Приравнивая эти ускорения, получаем уравнение на массу M, откуда находим

$$M = \frac{16}{5}m$$

2. Пусть в покое находится тело m. Тогда сила натяжения веревки, переброшенной через нижний блок, равна mg. Такая же сила действует и на второй груз, который в результате имеет ускорение, направленное вниз и равное

$$a_{4m} = \frac{3}{4} g$$

На тело массой M, следовательно, действует сила натяжения $2mg$, которая сообщает этому телу ускорение

$$a_M = \frac{(2m - M)}{M} g$$

А поскольку ускорение тела M в этом случае вдвое меньше ускорения тела $4m$, то должно быть выполнено условие

$$2\frac{(2m - M)}{M} g = \frac{3}{4} g$$

Откуда находим

$$M = \frac{16}{11} m$$

3. Пусть в покое находится тело $4m$. Тогда сила натяжения веревки, переброшенной через нижний блок, равна $4mg$. Такая же сила действует и на второй груз, который в результате имеет ускорение, направленное вверх и равное

$$a_m = 3g$$

На тело массой M тогда действует сила натяжения $8mg$, и его ускорение (направленное вниз) равно

$$a_M = \frac{(M - 8m)}{M} g$$

А поскольку ускорение тела M должно быть вдвое больше ускорения тела m, то

$$3g = 2\frac{(M - 8m)}{M} g$$

Отсюда находим

$$M = -16m$$

А поскольку такого быть не может, этот случай не реализуется.

Таким образом:

Тело m может находиться в покое при

$$M = \frac{16}{11} m$$

Тело M может находиться в покое при

$$M = \frac{16}{5} m$$

Тело $4m$ в покое не может находиться в покое ни при какой массе тела M.

Критерии оценки задачи
1. Правильные вторые законы Ньютона для всех тел - 0,5 балла,
2. Правильные условия связи в случаях, когда одно из тел в покое – 0,5 балла,
3. Доказано, что в покое могут находится два тела – 0,5 балла,
4. Правильные ответы – 0,5 балла,
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Пусть начальная температура газа в первом процессе - T_1, конечная - T_2. Тогда в первом процессе газ получает количество теплоты $C\nu\left(T_2-T_1\right)$ (C - молярная теплоемкость газа в первом процессе, ν - количество вещества газа). Поэтому первый закон термодинамики для первого процесса дает

$$C\nu\left(T_2-T_1\right)=\frac{3}{2}\nu R\left(T_2-T_1\right)+A \qquad (*)$$

Второй процесс, происходящий с газом – изохорический, с начальной температурой T_2, конечной – T_1. И поскольку в нем не совершается работа, а газ – одноатомный, количество теплоты, сообщенное газу в этом процессе, определяется соотношением

$$Q=\frac{3}{2}\nu R\left(T_1-T_2\right)$$

При этом по условию это количество теплоты – положительное, поэтому $T_1>T_2$ (в первом процессе газ охлаждается, во втором нагревается). Выражая из этой формулы разность температур и подставляя ее в (*), получим

$$C=\frac{3}{2}R\frac{Q-A}{Q}$$

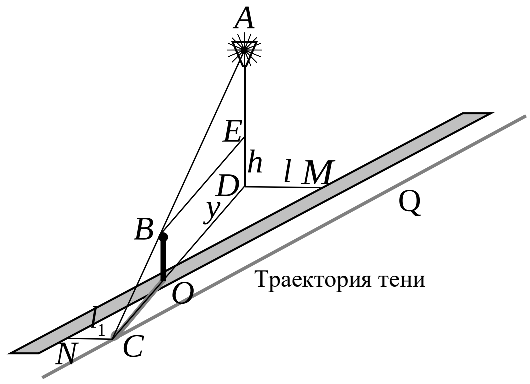
Используя теперь данные условия задачи ($Q=(3/4)A$), найдем

$$C=-\frac{1}{2}R=-4{,}16\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}$$

Теплоемкость газа в первом процессе оказалась отрицательной (график процесса лежит между изотермой и адиабатой). А поскольку в этом процессе газ охлаждался, то он получает в нем положительное количество тепла. Или, другими словами, в первом процессе газ получает энергию в результате теплообмена.

Критерии оценки задачи
1. Правильно (с учетом знаков) написан первый закон термодинамики для первого процесса - 0,5 балла,
2. Правильно (с учетом знаков) написан первый закон термодинамики для второго процесса – 0,5 балла,
3. Правильный (с учетом знака) ответ для теплоемкости – 0,5 балла,
4. Правильный ответ на вопрос о том, получает или отдает энергию газ в первом процессе – 0,5 балла,
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Докажем, что тень от головы мальчика движется по прямой линии, параллельной дорожке. Для этого рассмотрим такое положение мальчика, когда расстояние от него до фонаря равно некоторой величине y (см. рисунок; мальчик схематически показан жирным вертикальным отрезком с шариком (головой) наверху). Тогда из подобия треугольников ABE и ACD (см. рисунок) имеем



$$\frac{y}{DC} = \frac{H-h}{H}$$

где H - высота фонаря (сторона AD в треугольнике ACD), $H-h$ - сторона AE в треугольнике ABE. Из этого соотношения находим

$$OC = DC - y = \frac{hy}{H-h}$$

Теперь из подобия треугольников ODM и OCN находим расстояние от тени от головы мальчика ($l_1 = NC$)

$$\frac{l_1}{l} = \frac{OC}{OD} = \frac{h}{H-h} \qquad \Rightarrow \qquad l_1 = \frac{lh}{H-h} \qquad (*)$$

Из формулы (*) следует, что расстояние от тени от головы мальчика до дорожки не зависит от положения мальчика, и, следовательно, тень движется по прямой, параллельной дорожке.

Поэтому чтобы найти скорость тени нужно следить только за ее координатой вдоль дорожки (а не поперек, поскольку последняя, как мы доказали, не меняется). Расстояние от тени до точки Q, ближайшей от траектории тени до основания фонаря CQ (см. рисунок) также можно найти из подобия треугольников ODM и OCN

$$\frac{NO}{OM} = \frac{l_1}{l} = \frac{h}{H-h} \qquad \Rightarrow \qquad NO = \frac{h}{H-h}OM \qquad CQ = NO + OM = \frac{H}{H-h}OM,$$

Когда мальчик идет, расстояние OM уменьшается со скоростью v, соответственно уменьшается и расстояние CQ - перемещается тень. Если мальчик пройдет малое расстояние Δx, отрезок OM уменьшится на величину Δx, расстояние CQ уменьшится на величину

$$\Delta z = \frac{H}{H-h}\Delta x$$

которое и представляет собой перемещение тени. Отсюда находим скорость тени

$$v_{тени} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{H}{H-h}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{Hv}{H-h}$$

Поскольку эта величина не зависит от положения мальчика, тень движется с постоянной скоростью.

Критерии оценки задачи

1. Доказано, что граница тени от головы мальчика движется по прямой – 0,5 балла,
2. Уравнение для вычисления мгновенной скорости границы тени в рассматриваемый момент (не для средней скорости за какой-то интервал времени) – 0,5 балла,
3. Правильная геометрическая связь перемещения мальчика и перемещения границы тени – 0,5 балла,

4. Правильный ответ с комментарием, что скорость границы тени постоянна – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.