

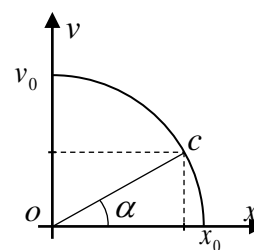
Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 11 класс
международный комплект
2019-2020 учебный год

1 вариант

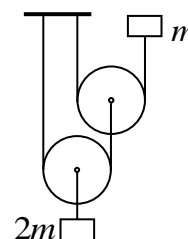
1. Цепочку с мелкими звеньями длиной l удерживают за верхний конец над горизонтальной опорой, которой она касается своим нижним концом. Цепочку отпускают, и она начинает падать на опору. Считая, что скорость упавших звеньев мгновенно гасится до нуля из-за абсолютно неупругого удара и упавшие звенья цепочки никак не влияют на движение остальных звеньев, найти, через какое время после начала движения цепочки кинетическая энергия еще не упавших звеньев будет максимальной? Чему равна эта максимальная кинетическая энергия?

2. Один моль азота находится в сосуде объемом $V = 1$ л под давлением $p = 10^5$ Па. Газ откачивают, поддерживая температуру сосуда (со всем содержимым) неизменной. Какую массу газа придется откачать к тому моменту, когда давление в сосуде упадет вдвое? Никаких других газов, кроме азота в сосуде нет. Дан ряд табличных параметров азота (не все они понадобятся для решения): молярная масса $\mu = 28$ г/моль, температура кипения при атмосферном давлении $t_k = -196^\circ\text{C}$, удельная теплота испарения $\lambda = 5,6$ кДж/моль, температура плавления $t_{пл} = -210^\circ\text{C}$. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$

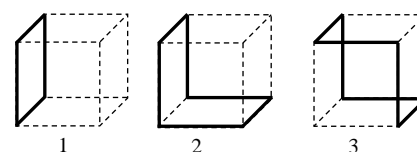
3. Тело движется вдоль некоторой оси x . Известно, что график зависимости проекции скорости тела на эту ось от его координаты по этой оси представляет собой (в определенном масштабе) «кусочек» окружности (см. рисунок). Найти проекцию ускорения тела в такой момент времени, когда координата и скорость тела соответствуют такой точке c данного графика, что $\angle cox = \alpha = 30^\circ$ (этот угол отмечен дугой на рисунке). Величины v_0 и x_0 - известны.



4. Механическую систему, состоящую из двух невесомых подвижных блоков, двух тел массой m и $2m$ и невесомых и нерастяжимых нитей, удерживают в определенном положении (см. рисунок). В некоторый момент времени систему отпускают. Найти ускорения тел.



5. Виток тонкого провода, изогнутого вдоль четырех ребер куба (рис. 1), обладает индуктивностью L_1 . Виток провода, изогнутого вдоль шести ребер того же куба (рис. 2), обладает индуктивностью L_2 . Найти индуктивность витка провода, изогнутого вдоль шести ребер того же куба так, как это показано на рисунке 3.



Решения

1. С одной стороны, чем дальше движется цепочка, тем больше ее скорость. С другой – меньше масса еще не упавших звеньев. Поэтому существует такое положение цепочки, в котором кинетическая энергия еще не упавших звеньев максимальна. Найдем этот максимум.

Пусть на стол упал кусочек цепочки длиной x . Тогда (поскольку цепочка движется с постоянным ускорением g) скорость еще не упавших на стол звеньев будет равна

$$v = \sqrt{2gx}$$

Масса не упавших к этому моменту звеньев равна

$$m_1 = \frac{l-x}{l}m$$

Поэтому еще не упавшие звенья цепочки имеют следующую кинетическую энергию

$$K = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{mg(l-x)x}{l}$$

Вычисляя производную этой величины как функции x и приравнявая производную к нулю, найдем длину x , отвечающую ее максимуму

$$x = \frac{l}{2}, \quad (*)$$

а затем и время движения до этого состояния

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Максимальную кинетическую энергию еще не упавших звеньев найдем, подставляя расстояние x (*) в формулу для кинетической энергии

$$K = \frac{1}{4}mgl$$

Критерии оценки задачи

1. Правильное нахождение скорости неупавших звеньев как функции длины упавших звеньев – 0,5 балла,
2. Правильное нахождение кинетической энергии неупавших звеньев как функции длины упавших звеньев – 0,5 балла,
3. Правильное нахождение минимума этой функции (через производную или формулы для квадратичной функции) – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Найдем температуру азота в сосуде по закону Клапейрона-Менделеева

$$T = \frac{pV}{\nu R} = 12K = -261^\circ C$$

Эта температура существенно ниже температуры кипения азота при атмосферном давлении, поэтому часть азота будет сконденсирована, а часть будет в виде газа. Следовательно, сосуд будет иметь

температуру кипения азота $t_k = -196^\circ\text{C}$, а газообразный азот представляет собой насыщенный «азотный пар».

Так как откачивание азота происходит при постоянной температуре (температуре насыщенного «азотного пара» при атмосферном давлении), то «азотный пар» останется насыщенным пока не испарится вся жидкая фракция азота. Поэтому пока в сосуде остается жидкий азот, давление «паров азота» будет равно атмосферному. Следовательно, когда давление азота в сосуде упадет вдвое, весь жидкий азот испарится, и останется только газ. Применяя к нему закон Клапейрона-Менделеева, получим

$$p_1V = \nu_1RT_k$$

где $p_1 = 0,5 \cdot 10^5$ Па, ν_1 - количество молей азота, оставшееся в сосуде, $T = 77\text{ K}$ - температура кипения азота ($77\text{ K} = -196^\circ\text{C}$). Отсюда находим количество вещества азота в сосуде

$$\nu_1 = \frac{p_1V}{RT_k} = \frac{pV}{2RT_k} = 0,078 \text{ моль,}$$

масса которого равна $m_1 = 0,078 \cdot 28 (\text{г}) = 2,2 (\text{г})$. Отсюда находим массу азота, который был откачан из сосуда)

$$\Delta m = (\nu - \nu_1)\mu = \left(\nu - \frac{pV}{2RT_k} \right) \mu = 25,8 \text{ г}$$

Критерии оценки задачи

1. Правильно понято, что часть азота находится в сконденсированном состоянии, – 0,5 балла,
2. Доказано, что температура в сосуде равна температуре кипения азота при атмосферном давлении – 0,5 балла,
3. Понято и доказано, что к тому моменту, когда давление упадет вдвое, весь азот испарится – 0,5 балла,
4. Правильно найдена масса откачанного азота – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Если зависимость скорости от координаты представляет собой окружность, то движение тела представляет собой гармонические колебания. Действительно, для гармонических колебаний потенциальная энергия тела является квадратичной функцией координат, поэтому закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E \quad (*)$$

А графиком функции (*) при определенном масштабе для координаты и скорости и является окружность. Поэтому зависимость координаты и скорости (при определенном выборе начала отсчета времени) имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin \omega t \\ v(t) &= x_0 \omega \cos \omega t = v_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

Из этих формул можно найти циклическую частоту колебаний и ускорение тела. Из второй формулы находим циклическую частоту колебаний

$$\omega = \frac{v_0}{x_0},$$

а, дифференцируя скорость по времени, получаем проекцию ускорения тела на ось x

$$a(t) = -x_0 \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$$

Из этой формулы следует, что ускорение тела пропорционально его координате, причем коэффициент пропорциональности находится из данных графика в условии задачи. Поэтому для нахождения проекции ускорения нужно найти координату тела в этот момент. Очевидно, что когда координата и скорость тела соответствуют точке c данного в условии задачи графика, то скорость тела составляет половину максимальной скорости, а координата – составляет долю $\sqrt{3}/2$ от максимальной координаты.

Отсюда получаем

$$a = -\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} x_0 = -\left(\frac{v_0}{x_0}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_0^2 x_0$$

Критерии оценки задачи

1. Доказано, что движение тела представляет собой гармоническое колебание – 0,5 балла,
2. По данному графику правильно восстановлены зависимости координаты и скорости тела от времени и найдена частота колебаний – 0,5 балла,
3. Правильно найдена фаза колебаний в рассматриваемый момент времени – 0,5 балла,
4. Правильный ответ для ускорения – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Силы, действующие на тела системы и не блоки, показаны на рисунке (из которого ясны все обозначения). Второй закон Ньютона для тел в проекциях на ось, направленную вертикально вниз, дает

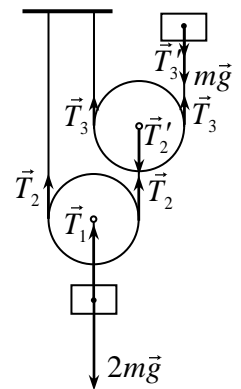
$$\begin{aligned} 2ma_1 &= 2mg - T_1 \\ ma_2 &= T_3 + mg \end{aligned} \quad (*)$$

Установим условия связи ускорений и сил натяжения. Поскольку левый блок – невесом $T_1 = 2T_2$. Аналогично из условия невесомости второго блока $T_2 = 2T_3$.

Отсюда

$$T_1 = 4T_3$$

Для установления связи ускорений рассмотрим малое перемещение тела $2m$. Пусть это тело переместилось вниз на некоторую величину Δx . Тогда на эту же величину переместится вниз и левый блок. Для такого перемещения слева и справа от него потребуются два лишних кусочка веревки длиной Δx . А для этого правый блок должен опуститься вниз на величину $2\Delta x$. Для такого его перемещения слева и справа от него потребуются два кусочка веревки длиной $2\Delta x$. Следовательно, тело m переместится вниз на величину $4\Delta x$. Это значит, что перемещение тела m в любые интервалы времени вчетверо больше перемещения тела $2m$. Поэтому его скорость в любой момент времени вчетверо больше скорости второго тела. А, следовательно, такое же соотношение имеет место и для ускорений



$$a_2 = 4a_1.$$

В результате система уравнений (*) принимает вид

$$2ma_1 = 2mg - 4T_3$$

$$4ma_1 = T_3 + mg$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$a_1 = \frac{1}{3}g, \quad a_2 = \frac{4}{3}g$$

То что ускорение второго тела оказалось больше ускорения свободного падения подтверждает факт натянутости всех нитей – в противном случае тела падали бы с ускорением g .

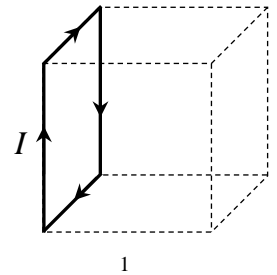
Критерии оценки задачи

1. Правильно расставлены силы, правильный второй закон Ньютона для тел системы – 0,5 балла,
2. Правильные условия связи сил – 0,5 балла,
3. Правильные условия связи ускорений – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Поскольку индуктивность витка, показанного на рисунке 1, равна L_1 , то при пропускании через такой виток тока I он будет создавать сам через себя поток магнитной индукции

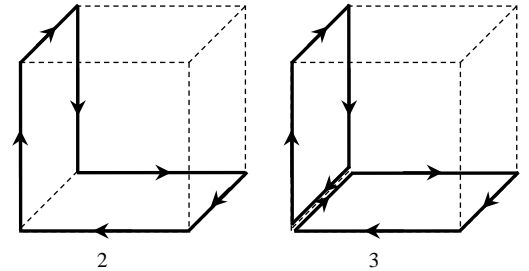
$$\Phi_1 = L_1 I. \quad (*)$$



Рассмотрим теперь цепь, показанную на рисунке 2. С одной стороны, поскольку ее индуктивность равна L_2 , поток вектора магнитной индукции ее собственного тока через нее при пропускании через нее тока I равен

$$\Phi_2 = L_2 I \quad (**)$$

С другой стороны, эту цепь можно заменить эквивалентной цепью (рис. 3), которая содержит два лишних провода, но создает



абсолютно такое же магнитное поле как и цепь, показанная на рисунке 3. Последнее связано с тем, что по этим двум проводам текут противоположно направленные токи, поэтому с точки зрения создания магнитного поля цепи, показанные на рисунках 2 и 3, одинаковы. А поток собственного магнитного поля такой цепи через нее саму можно найти как сумму потоков поля двух контуров, как на рисунке 1 через них самих, и сумму двух потоков поля таких контуров через расположенный рядом в перпендикулярной плоскости контур такой же площади

$$\Phi_2 = 2\Phi_1 + 2\Phi_{12}$$

где Φ_{12} - поток магнитного поля квадратного контура через квадратный контур такой же площади, расположенный рядом с ним. Отсюда и формул (*) и (**) находим

$$\Phi_{12} = \left(\frac{L_2}{2} - L_1 \right) I \quad (***)$$

Рассмотрим теперь контур, показанный на рисунке 4. С одной стороны при пропускании через него тока I поток собственного магнитного поля через него самого равен

$$\Phi_3 = L_3 I \quad (4^*)$$

где L_3 - индуктивность этого контура. С другой стороны эту цепь можно заменить эквивалентной цепью, содержащей 6 дополнительных проводов, по которым текут противоположно направленные токи, и которая состоит из трех квадратных контуров как на рисунке 1. Поток собственного магнитного поля через такую цепь равен трем потокам поля квадратного контура через сам себя и шести потокам поля квадратного контура через квадратный контур такой же площади, расположенный рядом с ним. Т.е.

$$\Phi_3 = 3\Phi_1 + 6\Phi_{12}$$

Поэтому используя формулы (*), (***) и (4*), получим

$$L_3 I = 3L_1 I + 6 \left(\frac{L_2}{2} - L_1 \right) I$$

Отсюда

$$L_3 = 3(L_2 - L_1)$$

Критерии оценки задачи

1. Правильная идея решения – связь потоков магнитного поля в трех случаях – 0,5 балла,
2. Правильная связь потока магнитного поля в первом и втором случае – 0,5 балла,
3. Правильная связь потока магнитного поля в первом и третьем случае – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

