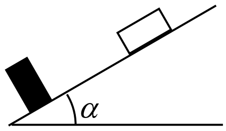
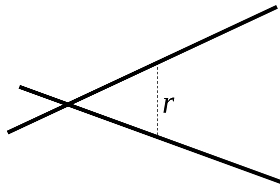
Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 11 класс (комплект 3)
2019-2020 учебный год

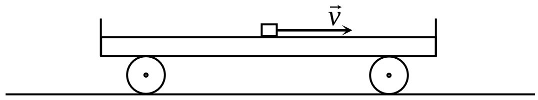


1. На наклонной плоскости с углом наклона α находится маленькое тело. На расстоянии l от тела находится упругая стенка. Коэффициент трения между телом и плоскостью k ($k = (1/2)\text{tg}\alpha$). Тело отпускают. Оно скользит по плоскости вниз, отражается от стенки, поднимется, снова движется в направлении стенки, снова отражается и т.д. Какой путь пройдет тело к моменту его полной остановки. Столкновения тела со стенкой упругие.

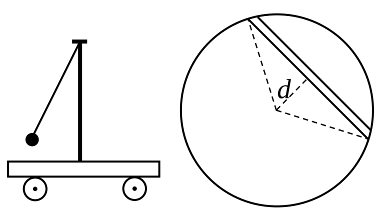
2. В некотором тепловом процессе объем одноатомного идеального газа зависит от температуры по закону $V = \alpha T^{-(5/2)}$, где α - известная постоянная. Найти молярную теплоемкость газа в этом процессе. Получает или отдает газ теплоту, если его объем возрастает?



3. Имеются две диэлектрических бесконечно длинных нити. Нити равномерно заряжены одноименными зарядами с линейной плотностью λ и 2λ. Нити расположили перпендикулярно друг другу в разных плоскостях, причем расстояние между их ближайшими точками равно r. Найти силу взаимодействия нитей. Ответ обосновать.



4. На горизонтальном столе покоится игрушечная тележка массой M и длиной L с высокими бортиками. В центре тележки находится точечное тело массой m. В некоторый момент времени телу толчком сообщили скорость v в направлении переднего бортика тележки (см. рисунок). Испытав упругое столкновение с передним бортиком, тело отражается в направлении заднего бортика, стукнувшись о него – в направлении переднего и т.д. Какой путь пройдет тележка к тому моменту, когда тело окажется в центре тележки, испытав 2020 столкновений с ее бортиками.



5. На тележке укреплен математический маятник длины l. Тележку отпускают в туннель, прокопанный внутри Земли по такой хорде, что минимальное расстояние от центра Земли до туннеля равно половине радиуса Земли $d = R/2$ (R - радиус Земли; см. рисунок). Сколько колебаний совершит маятник за то время, когда тележка пройдет весь туннель. Радиус и масса Земли R и ускорение свободного падения на поверхности Земли известны. Плоскость колебаний маятника совпадает с направлением движения тележки.

Решения

1. Поскольку $k < \operatorname{tg}\alpha$, то тело будет скользить по плоскости и окончательно остановится только около стенки. При этом, несмотря на подъемы и спуски по плоскости, работа силы тяжести будет равна убыли потенциальной энергии тела, т.е. $A_m = mgl\sin\alpha$. Из теоремы об изменении кинетической энергии заключаем, что эта работа равна минус работе силы трения, которая определяется пройденным телом путем $A_{mp} = -F_{mp}S = -kmg\cos\alpha S$. Отсюда заключаем, что пройденный телом путь есть

$$S = \frac{1}{k} l \operatorname{tg}\alpha = 2l$$

Критерии оценки задачи

1. Использована теорема об изменении кинетической энергии для тела – 0,5 балла,
2. Доказано, что суммарная работа силы тяжести равна $A_m = mgl\sin\alpha$ независимо от того, сколько подъемов и спусков совершило тело – 0,5 балла,
3. Правильное выражение для силы трения на наклонной плоскости при движении тела, правильная работа силы трения – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Пусть газ получает в рассматриваемом процессе малое количество теплоты δQ, а изменение температуры газа составило ΔT (обе эти величины являются алгебраическими, могут быть как положительными, так и отрицательными). Первый закон термодинамики для рассматриваемого процесса дает

$$\delta Q = \Delta U + \delta A$$

Поскольку в рассматриваемом процессе давление практически не изменилось, работу газа можно найти как $\delta A = p\Delta V$, где ΔV - изменение объема в рассматриваемом процессе, p - давление в рассматриваемом состоянии. Поэтому

$$\delta Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V \qquad (*)$$

Изменение объема газа ΔV можно найти из зависимости $V(T)$, давление газа p – из закона Клапейрона-Менделеева

$$\Delta V = \frac{dV}{dT}\Delta T = -\frac{5}{2}\alpha T^{-(7/2)}\Delta T, \qquad p = \frac{\nu RT}{V}$$

Поэтому из (*) получаем связь количество теплоты и изменения температуры в рассматриваемом процесс

$$\delta Q = -\nu R\Delta T$$

И, следовательно, молярную теплоемкость

$$C = \frac{\delta Q}{\nu\Delta T} = -R$$

(от α молярная теплоемкость не зависит). Теплоемкость газа оказалась отрицательной, что означает, что процесс лежит «между» изотермой и адиабатой. Если объем газа возрастает, то, как следует из связи давления и температуры, температура газа уменьшается - $\Delta T < 0$, и, следовательно, газ получает теплоту.

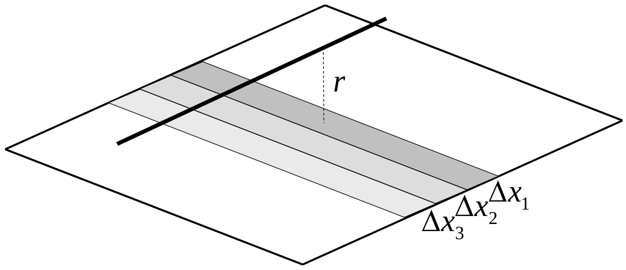
Критерии оценки задачи

1. Использовано правильное определение теплоемкости – 0,5 балла,

2. Для рассматриваемого процесса правильно использовано первое начало термодинамики – 0,5 балла,
3. Правильный ответ для теплоемкости газа – 0,5 балла,
4. Правильный ответ на вопрос о том, получает или отдает газ тепло при увеличении его объема – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Рассмотрим вспомогательную задачу. Найдем силу взаимодействия очень длинной нити с линейной плотностью заряда λ и очень большой плоскости с поверхностной плотностью заряда σ. С одной стороны (поскольку сила взаимодействия плоскости с поверхностной плотностью σ и точечного заряда q есть $\sigma q / 2\varepsilon_0$) эта сила равна



$$F = \frac{\sigma\lambda l}{2\varepsilon_0} \qquad (*)$$

где l - длина нити. С другой стороны, если мысленно разбить плоскость на длинные полоски толщиной Δx_1, Δx_2, …, перпендикулярные нити (см. рисунок), то эта же сила складывается из сил взаимодействия с каждой полоской.

$$F = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + ... \qquad (*)$$

Причем в этой формуле суммируются не векторы, а модули, поскольку силы взаимодействия нити с каждой полоской направлены одинаково (отталкивание от полосок). А поскольку полоски и нить – очень-очень большие, то все полоски по отношению к нити расположены одинаково, и, следовательно, силы взаимодействия с разными полосками $\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3, ...$ могут отличаться только из-за разных зарядов полосок. А поскольку их заряды пропорциональны их толщине (при условии, что полоски – тонкие), то все эти силы можно записать как

$$\Delta F_i = f_0 \Delta x_i$$

где величина f_0 одинакова для каждой полоски. Подставляя это выражение в формулу для силы взаимодействия (**) и используя (*), найдем

$$\frac{\sigma\lambda l}{2\varepsilon_0} = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + ... = f_0\Delta x_1 + f_0\Delta x_2 + f_0\Delta x_3 + ... = f_0 l$$

Отсюда

$$f_0 = \frac{\sigma\lambda}{2\varepsilon_0}$$

Поэтому сила взаимодействия нити с линейной плотностью заряда λ с полоской толщиной Δx равна

$$F = \frac{\lambda\sigma\Delta x}{2\varepsilon_0} \qquad (***)$$

Но поскольку полоска тонкая, а $\sigma\Delta x$ есть заряд единицы длины полоски, то линейная плотность заряда полоски есть $\lambda_1 = \sigma\Delta x$. Поэтому формула (***) дает силу взаимодействия двух перпендикулярных нитей, равномерно заряженных с линейной плотностью λ и λ_1.

$$F = \frac{\lambda\lambda_1}{2\varepsilon_0}$$

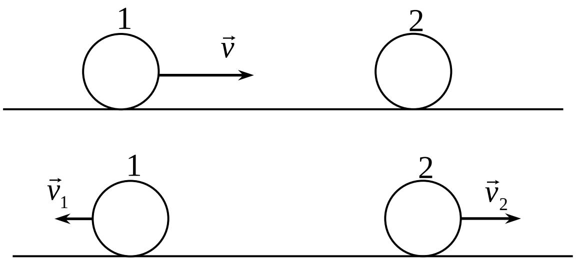
Поскольку в рассматриваемой задаче $\lambda_1 = 2\lambda$, получаем окончательно

$$F = \frac{2\lambda^2}{2\varepsilon_0}$$

От расстояния между нитями эта сила не зависит.

Критерии оценки задачи
1. Использовано правильное выражение для поля бесконечной заряженной плоскости или бесконечной заряженной нити – 0,5 балла,
2. Правильное сведение взаимодействия двух нитей к взаимодействию плоскости и нити (или правильное сведение взаимодействия двух нитей к интегралу) – 0,5 балла,
3. Нахождение взаимодействия нити с каждым участком плоскости (или вычисление соответствующего интеграла) – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Докажем, что при лобовом упругом столкновении тел их относительная скорость не меняется по величине, а меняет только направление. Пусть одно тело массой m движется со скоростью $\vec{v}$, второе массой M покоится (относительная скорость тел первого тела относительно второго равна $v_{отн} = v$ и направлена вправо; см. рисунок).



Скорости тел после центрального упругого столкновения можно найти по законам сохранения импульса и энергии (пусть для определенности $m < M$, тогда скорость первого тела направлена противоположно скорости $\vec{v}$):

$$mv = -mv_1 + Mv_2$$
$$mv^2 = mv_1^2 + Mv_2^2$$

Отсюда находим скорости тел после столкновения

$$v_1 = \frac{M - m}{M + m} v\,,\ v_2 = \frac{2m}{M + m} v$$

и относительную скорость первого тела относительно второго

$$v_{отн} = v_1 - v_2 = v$$

Отсюда с учетом того, что v_1 поменяла направление, заключаем, что относительная скорость такая же по величине, но направлена противоположно. При следующем столкновении с бортиками тележки такая же картина сохранится.

Теперь вернемся к решению задачи. Поскольку система тел – «тележка-тело» замкнута, центр масс тела и тележки движется с постоянной скоростью

$$v_0 = \frac{mv}{m + M}\,.$$

В начале (поскольку тело находится в центре тележки) центр масс системы находится в центре тележки. В конце (поскольку тело снова в центре) там же находится и центр масс. Поэтому перемещение тележки равно перемещению центра масс системы за то время, за которое тело совершило 2020 столкновений с бортиками. Т.е.

$$S_m = \frac{mv}{m + M} t$$

Где t - время, прошедшее от толчка тела до того как оно вернулось в ту же точку, испытав 2020 столкновений с бортиками. Найдем это время. От 1-го столкновения до 2020-го тело пройдет 2019 длин тележки с одной и той же относительной скоростью. Поэтому затратит на это время

$$\frac{2019l}{v}$$

И еще два раза по половине тележки – после начального толчка до первого удара, и от 2020 удара до попадания в центр тележки. В результате находим, что

$$t = \frac{2020l}{v}$$

Отсюда получаем окончательно

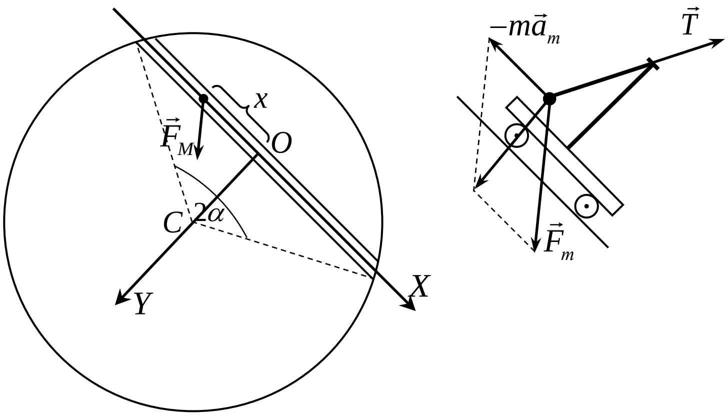
$$S_m = \frac{2020ml}{m + M}$$

Критерии оценки задачи

1. Использование законов сохранения энергии и импульса для упругого столкновения – 0,5 балла,
2. Доказательство, что относительная скорость тел при столкновении не меняется (или нахождение скорости тележки тела после столкновения) – 0,5 балла,
3. Сведение вычисления пройденного тележкой пути к пути, пройденного центром масс системы (или вычисление пути, пройденного тележкой между каждой парой столкновений) – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Пусть туннель «опирается» на угол 2α (см. рисунок). Как известно, на тело массой m, находящееся внутри Земли на расстоянии r от ее центра, действует направленная к центру Земли сила тяжести



$$F_m = \frac{mgr}{R}$$

где mg - сила тяжести, действующая на тело на поверхности Земли, R - радиус Земли. Применяя второй закон Ньютона к тележке, найдем, что ее ускорение a_m направлено вдоль туннеля и равно по величине

$$a_m = \frac{F_{m,x}}{m} = \frac{gr_x}{R} \qquad (1)$$

где F_x - проекция силы тяжести на ось OX, направленную вдоль туннеля (см. рисунок), m - масса тележки. Поскольку $r_x = x$, из уравнения (1) следует, что ускорение тележки пропорционально расстоянию от нее до точки O (ближайшей к центру точки туннеля); это значит, что тележка (вместе с маятником на ней) будет совершать гармонические колебания относительно точки O с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (2)$$

Следовательно, до противоположной точки туннеля тележка доедет за половину периода (2)

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (3)$$

(причем независимо от того, на какой угол «опирается» туннель).

Второй закон Ньютона для маятника имеет вид

$$m_0\vec{a}_м = \vec{F}_m + \vec{T}$$

где m_0 - масса маятника, $\vec{a}_м$ - его ускорение в инерциальной системе отсчета (например, относительно Земли), $\vec{T}$ - сила натяжения нити. Но поскольку маятник колеблется на тележке, которая движется с ускорением, нам нужно найти его ускорение относительно тележки $\vec{a}_{м.о.т.}$. Используя далее, закон, аналогичный закону сложения скоростей (но для ускорений) - $\vec{a}_м = \vec{a}_{м.о.т.} + \vec{a}_m$, получим

$$m_0\vec{a}_{м.о.т.} = \vec{F}_m + \vec{T} - m_0\vec{a}_m \qquad (4)$$

(для знакомых с понятием сил инерции отметим, что уравнение (4) является вторым законом Ньютона в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой, а $-m_0\vec{a}_m$ и есть действующая на маятник сила инерции). Но с учетом (1) величина $m_0\vec{a}_m$ есть проекция действующей на маятник силы тяжести на ось x, поэтому вектор $\vec{F}_m - m_0\vec{a}_m$ направлен перпендикулярно туннелю, а его величина равна проекции силы тяжести на ось OY , перпендикулярную туннелю. Поэтому модуль этого вектора равен

$$\left|\vec{F}_m - m_0\vec{a}_m\right| = \frac{m_0 g r_y}{R} = \frac{m_0 g\, OC}{R} = m_0 g \cos\alpha \qquad (5)$$

и не меняется в процессе движения тележки по туннелю (см. рисунок). Из уравнений (4)-(5) следует, что уравнение для ускорения маятника относительно тележки совпадает с уравнением для ускорения математического маятника, но в качестве «силы тяжести» в нем фигурирует постоянная сила $m_0 g \cos\alpha$. А это значит, что маятник будет совершать колебания с периодом

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$$

Поэтому за время t (3) маятник совершит следующее количество колебаний

$$N = \frac{t}{T} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R\cos\alpha}{l}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{l}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{2l}}$$

Критерии оценки задачи

1. Правильно найдена или использована сила тяжести, действующая на тележку внутри Земли – 0,5 балла,
2. Доказано, что движение тележки по шахте представляет собой гармоническое колебание и правильно найден его период – 0,5 балла,
3. Правильно найдено ускорение маятника относительно тележки – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.