228977
Регистрационный номер

Фамилия Пустовит
Имя Владислав
Отчество Сергеевич

414
(не заполнять)

Подпись

ЮНИОР

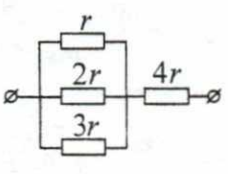
«Утверждаю»
Председатель оргкомитета конкурса

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор», профиль «Инженерные науки»,
Заключительный этап, 10 класс

1. В комнате висят двое плоских настенных часов, с длиной минутных стрелок 15 см и 20 см соответственно. Расстояние между началами минутных стрелок равно 1 м. Время, показываемое на часах, всегда отличается на 15 мин, хотя часовые механизмы обоих часов исправны. Найти максимальное и минимальное возможное расстояние между концами минутных стрелок.

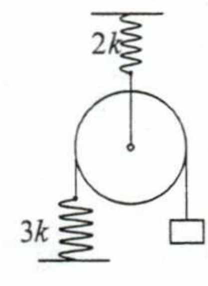
2. Два угла треугольника ABC равны $45°$ и $75°$. Точки M, N, P – основания высот, проведенных из вершин треугольника ABC. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

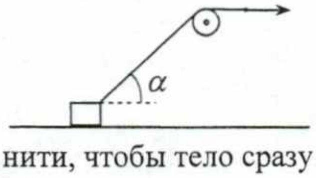
3. Найти простые числа p, при которых уравнение $p^x = y^2 - 9$ имеет решение (x, y) с натуральными x и y.



4. К электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, приложено некоторое напряжение. Известно, что мощность, которая выделяется на сопротивлении r, равна P. Найти мощность, которая выделяется на сопротивлении $4r$.

5. Через невесомый блок, прикрепленный к потолку с помощью пружины, перебросили веревку. К одному концу веревки прикрепили тело массой m, к другому пружину, второй конец которой закрепили на полу. Коэффициенты жесткости пружин $2k$ и $3k$ (см. рисунок). Насколько переместится тело по сравнению с положением, когда пружины не деформированы?





6. К телу, находящемуся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок (см. рисунок). Угол между нитью и горизонтом равен α, после блока нить горизонтальна. Какое минимальное ускорение нужно сообщить концу нити, чтобы тело сразу же оторвалось от поверхности?

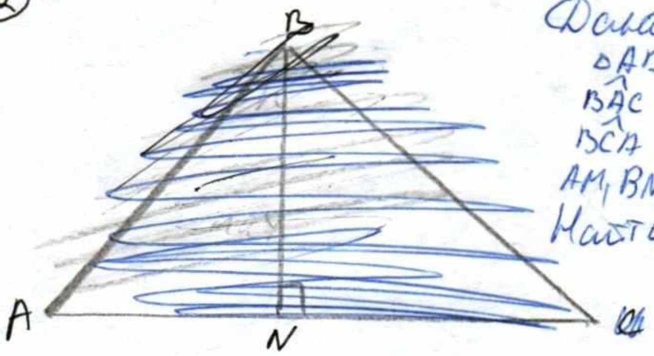
Председатель методической комиссии, 2020 г.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийской конкурс научных работ школьников «Юниор»

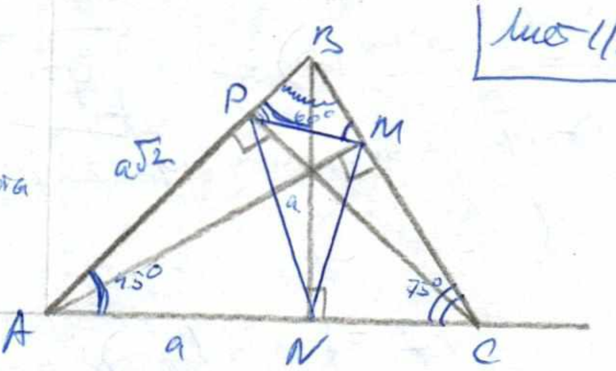
Инженерные науки — НАПРАВЛЕНИЕ КОНКУРСА | Дата 1.2.2020 | 10 класс | 414 (не заполнять)

№2

лист 1/3



Дано:
$\triangle ABC$
$\hat{BAC} = 45^\circ$
$\hat{BCA} = 75^\circ$
AM, BN, CP – высота
Найти $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$



Решение

1) $\hat{ABC} = 180^\circ - (\hat{BAC} + \hat{BCA}) = 60^\circ$ – по сумме углов $\triangle ABC$.

2) Пусть $BN = a$.

3) $\triangle ABN$ – п/у р/б ($\hat{BAN} = 45^\circ$): $BN = AN = a \Rightarrow AB = \sqrt{BN + AN} = a\sqrt{2}$ – по т. Пифагора

3) $\triangle NBC$ – п/у.

3.1) Найдём $\sin 75^\circ$

$\sin 75^\circ = \sqrt{\sin^2 75^\circ} = \sqrt{\sin^2 \frac{150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$75^\circ \in [0; 90^\circ]$

3.2) $\sin \hat{BCN} = \frac{BN}{BC} = \sin 75^\circ \Rightarrow BC = \frac{BN}{\sin 75^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

3.3) По т. Пифагора: $NC^2 = BC^2 - BN^2 \Rightarrow NC = \sqrt{BC^2 - BN^2} = a\sqrt{7+2\sqrt{3}}$

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BN = \frac{1}{2} a(1 + \sqrt{7+2\sqrt{3}}) \cdot a = \frac{a^2}{2}(1+\sqrt{7+2\sqrt{3}}) = \frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})$

5) AM, CP – высота
PM – отрезок, соед. основ. AM, CP
$\Big\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PBM \Rightarrow \frac{PM}{AC} = \cos \hat{ABC} \Rightarrow$

$\Rightarrow PM = AC \cos 60^\circ = \frac{a(3+\sqrt{3})}{2}$

6) $\cos 75^\circ = \sqrt{\cos^2 75^\circ} = \sqrt{\frac{1+\cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

7) Аналогично п.5) $PN = BC \cos 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

8) Аналогично п.5) $MN = AB \cos 75^\circ = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

0.5

№3

$p^x = y^2 - 9$, Найти p, уравнение имеет решение $(x;y)$, где $x, y \in \mathbb{N}$.

$p^x = (y-3)(y+3) > 0 \Rightarrow \boxed{y > 3}$

p^x – произведение простого числа x раз
$p^x = (y-3)(y+3)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\cancel{\left[\begin{array}{l} y-3=1, \text{ т.к. } (y-3)(y+3)>0 \\ (y-3)(y+3) = p^n p^m = p^{n+m} = p^x \end{array}\right.}$

$\Rightarrow (y-3)(y+3) = p^n \cdot p^m = p^{n+m} = p^x$, где ~~n,m∈ℕ₀~~ $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$

$x = n + m$, где $n \in \mathbb{N}_0$; $m \in \mathbb{N}$

1) Если $n=0$: $\begin{cases} x = m \\ y-3 = p^0 = 1 \\ y+3 = p^m = p^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y+3 = p^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ p^x = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \\ p = 7 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}} \Rightarrow \boxed{p = 7}$

2) $\left.\begin{array}{l} y^2 \equiv y \pmod 2 \\ -9 \equiv 1 \pmod 2 \\ p^x \equiv p^x \pmod 2 \end{array}\right\} \Rightarrow p^x \equiv y + 1 \pmod 2$

2.1) Если y – четное, то $p^x \equiv 1 \pmod 2$
2.2) Если y – нечетное, то $p^x \equiv 1+1 \equiv 0 \pmod 2$ – противоречие.

$\boxed{y \,\vdots\, 2} \Rightarrow y = 2k$, ~~k~~ $k \in \mathbb{N}$; $k \geq 2$.

3) Если $y = 6$ $(k=3)$: $36 - 9 = 27 = 3^3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ p = 3 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \boxed{p = 3}$

4) Если $y = 8$ $(k=4)$: $64 - 9 = 55$ – ~~не~~ составное $(55 = 5 \cdot 11)$

б) ~~Пусть~~ при $k = n$,

5) Предположим, что $y^2 - 9 = 4k^2 - 9$ – будет составное при $k \geq 4$.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийской конкурс научных работ школьников «Юниор»

Инженерные науки — НАПРАВЛЕНИЕ КОНКУРСА | Дата 1.2.2020 | 10 класс | 414 (не заполнять)

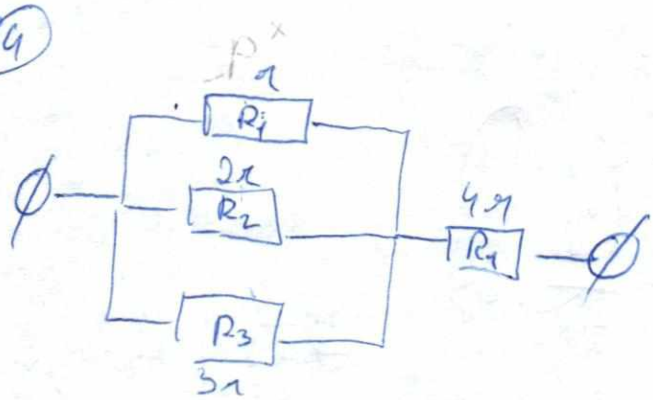
лист 2/з.

6) Пусть при $k=n$, $4n^2-9$ – составное

7) Докажем верность равенства при $k=n+1$

$4(n+1)^2-9 = 4n^2+8n+4-9 = (4n^2-9)+8(2n+1)$

№4



Дано:
$P(r)=P$
Найти
$P(4r)$ – ?

1

$p=2$
погрешн

1) $P=IU=\frac{U^2}{R}$

т.к. R_1, R_2, R_3 подсоединены параллельно, то $U_1=U_2=U_3=U$.

$P(r)=\frac{U^2}{r}=P$; $U^2=Pr$; $P(2r)=\frac{U^2}{2r}$; $P(3r)=\frac{U^2}{3r}$

2) $\frac{1}{R_{123}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$

$\frac{1}{R_{123}}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2r}+\frac{1}{3r}=\frac{6+3+2}{6r}=\frac{11}{6r}$

$R_{123}=\frac{6}{11}r$

4

3) $P(R_{123})=\frac{11U^2}{6r}=UI \Rightarrow I=\frac{11U}{6r}=\frac{11\sqrt{Pr}}{6r}$

4) R_{123} и R_4 – подсоединены последовательно $\Rightarrow I_{123}=I_2=I$.

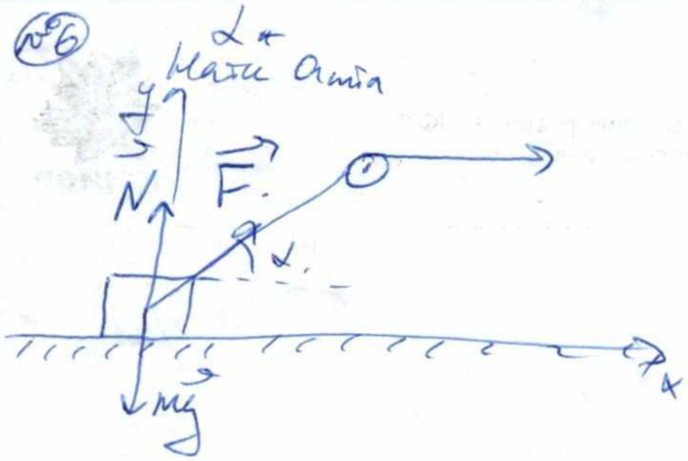
~~$U_{123}=IR_{123}=\frac{11U^2}{6r}\cdot\frac{6}{11}r\cdot I=\frac{6}{11}\cdot\frac{11U}{6r}$~~

$U_4=IR_4=4rI=4r\cdot\frac{11U}{6r}=\frac{22U}{3}=\frac{22\sqrt{Pr}}{3}$

$P(4r)=\frac{U_4^2}{I}=\frac{484Pr}{9}\cdot\frac{6r}{11\sqrt{Pr}}=\frac{44}{3}(Pr)^{3/2}$

Ответ: $P(4r)=\frac{44}{3}(Pr)^{3/2}$.

№6



$\vec{mg} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$.

Пр X: $ma_x = F\cos\alpha$

Пр y: $ma_y = -mg + N + F\sin\alpha$.

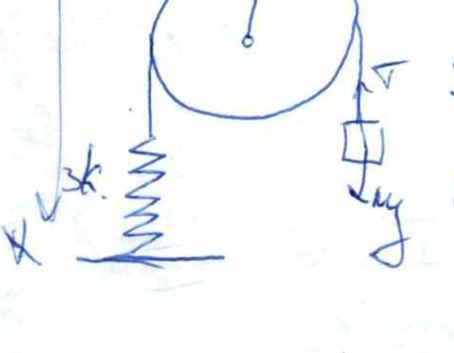
$m(a_y + g) = \cancel{N} + F\sin\alpha$.

$$\left.\begin{aligned} ma_x &= F\cos\alpha \\ m(a_y+g) &= F\sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow tg\alpha = \frac{a_y + g}{a_x} = \frac{2g}{a_x} \Rightarrow a_x = \frac{2g}{tg\alpha} = 2g\,ctg\alpha.$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 2g\,ctg\alpha \\ a_y &= g \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{g^2 + 4g^2 ctg^2\alpha} = g\sqrt{1 + 4ctg^2\alpha}.$$

Ответ: $a_{min} = g\sqrt{1+4ctg^2\alpha}$.

№5



1) $mg = T = F_{y2} = 3k\Delta l_2$

$\Delta l_2 = \frac{mg}{3k}$.

2) $F_{y1} = 2k\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{F_{y1}}{2k}$.

3) $\vec{F}_{y1} + \vec{F}_{y2} + m\vec{g} = 0$

Пр x: $F_{y1} - F_{y2} - mg = 0$

$2k\Delta l_1 - 3k\Delta l_2 = mg$

$2\Delta l_1 - 3\Delta l_2 = \frac{mg}{k}$

$\frac{2}{3}\Delta l_1 - \Delta l_2 = \Delta l_2$

$\Delta l_2 = \frac{1}{3}\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{k}$

$\Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{mg}{k}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4mg}{3k}$.

Ответ: $\frac{4mg}{3k}$.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Всероссийской конкурс научных работ школьников «Юниор»

Инженерные науки
НАПРАВЛЕНИЕ КОНКУРСА

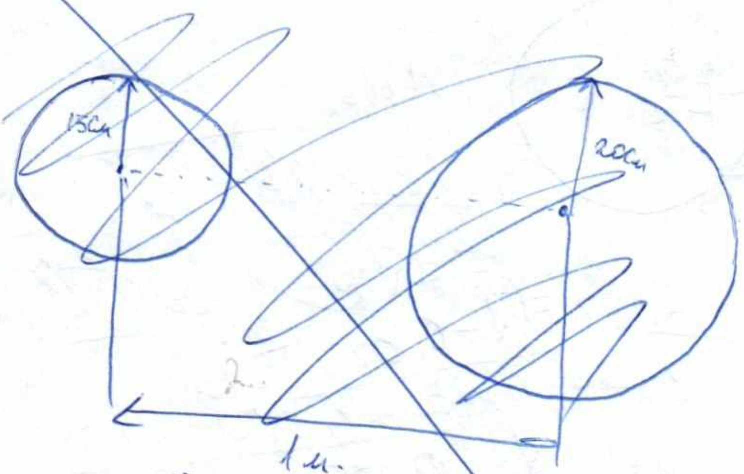
Дата 1.2.2020

10
класс

424
(не заполнять)

№1

Лист 3/3



min

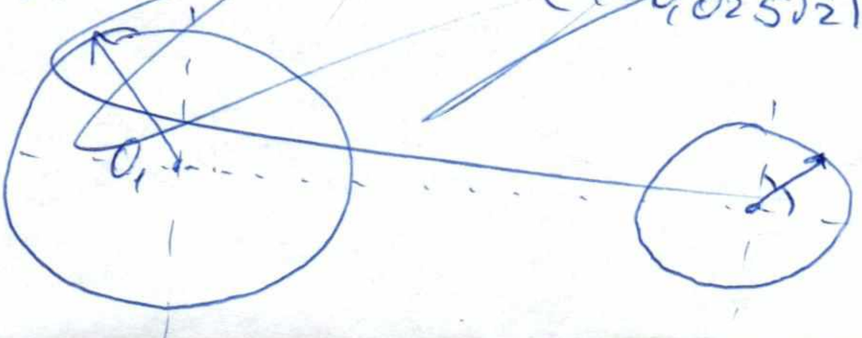
1) $O_1H_1 = H_1A = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$ см $= 0{,}1\sqrt{2}$ м

$O_2H_2 = H_2B = \frac{15\sqrt{2}}{2} = 7{,}5\sqrt{2}$ см $= 0{,}075\sqrt{2}$ м.

2) $AB = H_1H_2 = 1м - 0{,}1\sqrt{2}м - 0{,}075\sqrt{2}м =$

$= 1м - 0{,}025\sqrt{2}м = (1 - 0{,}025\sqrt{2})м.$

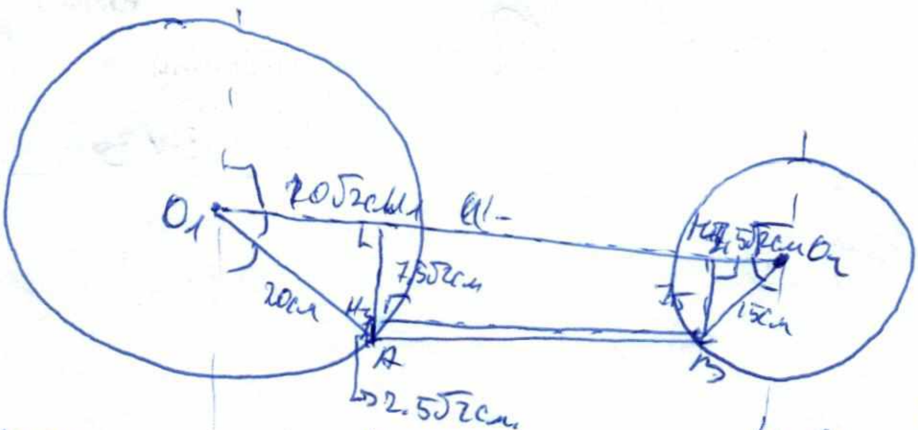
max:



№1

min.

$2\cdot(2,5)^2 = 2\cdot 6,25 = 12,5$



AH_3

$\cancel{AH_3 = \sqrt{AM_1 \cdot BM_2} \cdot 2 = 2\sqrt{150}\ см = 10\sqrt{6}\ см}$

$AH_3 = 2,5\sqrt{2}$ см $= 0,025\sqrt{2}$ м

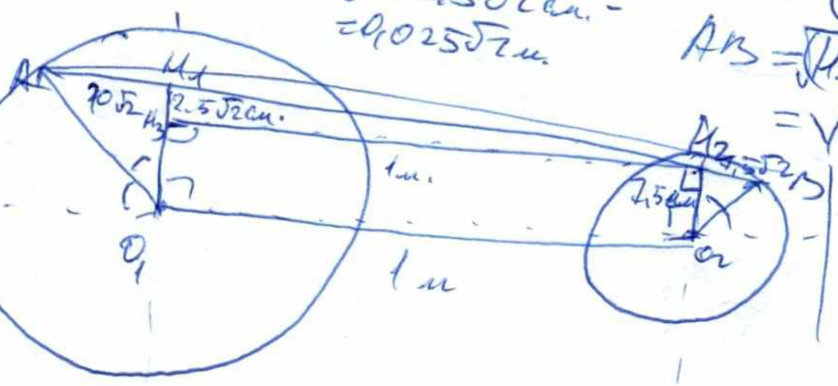
$M_1M_2 = (1 - 0,025\sqrt{2})$ м.

$AB = \sqrt{M_1M_2^2 + AH_3^2} = \sqrt{1 - 0,05\sqrt{2} + (0,025\sqrt{2})^2 + (0,025\sqrt{2})^2} =$

$= \sqrt{1 - 0,05\sqrt{2} + 0,25} =$

$= \sqrt{1,25 - 0,05\sqrt{2}}$ м.

max.



$M_1H_3 = 2,5\sqrt{2}$ см.

$M_1M_2 = \sqrt{12,5\ см^2 + \cancel{10000\ см^2}} = \sqrt{0,125\ м^2 + 1\ м^2} = \sqrt{1,125}$ м.

$AB = 0,1\sqrt{2} + 0,075\sqrt{2} + \sqrt{1,125} = (0,175\sqrt{2} + \sqrt{1,125})$ м.

Ответ: min $(\sqrt{1,25 - 0,05\sqrt{2}})$ м

max $(0,175\sqrt{2} + \sqrt{1,125})$ м.

05