**Задания очного отборочного тура**
**Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»**
**Математика, 11 класс, комплект 1**
**2017 г.**

**1 Вариант**
**Максимальный балл за каждую задачу – 2 балла.**

**1.** Через $\{x\}$ и $[x]$ обозначены дробная и целая части числа $x$. Целая часть числа $x$ – это наибольшее целое число, не превосходящее $x$, а $\{x\}=x-[x]$. Найти $x$, для которых $4x^2-5[x]+8\{x\}=19$.

**Решение.**
$$\begin{aligned}&x=[x]+\{x\}\to 4\left([x]+\{x\}\right)^2-5[x]+8\{x\}=19\to\\&4\{x\}^2+8\left([x]+1\right)\{x\}+4[x]^2-5[x]-19=0\end{aligned}\qquad(*)$$

Если $x$ искомый, то квадратный трехчлен $f(t)=4t^2+8\left([x]+1\right)t+4[x]^2-5[x]-19$ имеет корни $t=\{x\}$ на отрезке $[0;1)$.

**Случай 1.** Один корень на $[0;1)$.

$$\begin{cases}f(0)=4[x]^2-5[x]-19\\ f(1)=4[x]^2+3[x]-7\neq 0\\ f(0)\cdot f(1)\le 0\end{cases}\to\begin{cases}\left([x]-t_1\right)\left([x]-t_2\right)\left([x]-1\right)\left(4[x]+7\right)\le 0\\ [x]\neq 1,t_1=\dfrac{-5-\sqrt{329}}{8}\approx -1,6,t_2=\dfrac{-5+\sqrt{329}}{8}\approx 2,9\end{cases}.$$

Решая неравенство методом интервалов, получим $[x]\in\left(-\frac{7}{4};t_1\right]\cup\left(1;t_2\right]$. С учетом целочисленности $[x]$, получим единственное возможное значение целой части числа $x$: $[x]=2$. Подставляем $[x]=2$ в (*) для определения $\{x\}$:

$$4t^2+24t-13=0\to\{x\}=\frac{1}{2},\{x\}\neq-\frac{13}{2}\to x=\frac{5}{2}.$$

**Случай 2.** Два корня на $[0;1)$. Необходимо, чтобы абсцисса вершины параболы $f(t)$ принадлежала $(0,1)$, т.е. $t_*=-[x]-1\in(0,1)\to[x]\in(-2;-1)$. Целых чисел на указанном интервале нет и случай 2 не реализуется.

**Ответ:** $x=\frac{5}{2}$.

**2.** Найти целые $n$, при которых выражение $\frac{1}{12}\left(8\sin\frac{\pi n}{10}-\sin\frac{3\pi n}{10}+4\cos\frac{\pi n}{5}+1\right)$ принимает целые значения.

**Решение.** Введем обозначение $t=\sin\frac{\pi n}{10}\in[-1;1]$ и перепишем исходное выражение:

$$\frac{1}{12}\left(8\sin\frac{\pi n}{10}-\sin\frac{3\pi n}{10}+4\cos\frac{\pi n}{5}+1\right)=\frac{1}{12}\left(8t-(3t-4t^3)+4(1-2t^2)+1\right)=$$
$$=\frac{1}{12}\left(4t^3-8t^2+5t+5\right)=f(t)$$

Проведем исследование функции $f(t)$ на отрезке $[-1;1]$. Найдем критические точки функции $f(t)$: $f'(t)=\frac{1}{12}(12t^2-16t+5)=0\to\left[\begin{array}{l} t_1=1/2 \\ t_2=5/6 \end{array}\right.$.

В точке $t=1/2$ функция $f(t)$ имеет локальный максимум, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. В точке $t=\frac{5}{6}$ функция $f(t)$ имеет локальный минимум, $f\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{65}{216}$. Найдем значение функции $f(t)$ на концах отрезка: $f(-1)=-1$, $f(1)=\frac{1}{2}$. В результате получаем область значений функции $E_f=\left[-1;\frac{1}{2}\right]$. Ей принадлежат два целых числа $y=-1$ и $y=0$.

**Случай 1.** $y=-1$. Это значение достигается при одном значении $t=-1$. Тогда $\sin\frac{\pi n}{10}=-1\to\frac{\pi n}{10}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\to n=20k-5,\ k\in Z.$

**Случай 2.** $y=0$. Решим уравнение $4t^3-8t^2+5t+5=0\to(2t+1)(2t^2-5t+5)=0.$ Таким образом,кубический многочлен имеет единственный корень $t=-\frac{1}{2}$. Тогда

$$\sin\frac{\pi n}{10}=-\frac{1}{2}\to\left[\begin{array}{l} \frac{\pi n}{10}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k\to 3n-60k=-5\ \ (*) \\ \frac{\pi n}{10}=\frac{7\pi}{6}+2\pi k\to 3n-60k=7\ \ (**) \end{array}\right.$$

Уравнения (*) и (**) решений в целых числах не имеют, поскольку их левые части не делятся на 3.

**Ответ:** $n=20k-5,\ k\in Z.$

**3.** На плоскости расположены 8 прямых, из которых 3 параллельны, а любые две из оставшихся пяти – пересекаются. Рассматриваются все треугольники со сторонами, лежащими на данных прямых. Какое наибольшее и наименьшее число таких треугольников может быть
обнаружено?

**Решение.** Введем обозначения: $P-$множество параллельных прямых, $p_k, k=1,2,...,m-$ любая прямая из $P$; $Q-$множество не параллельных прямых, $q_j,\ j=1,2,...,n-$ любая прямая из $Q$. Наибольшее возможное число треугольников связано с таким расположением прямых из $Q$, при котором ни какие три из них не проходят через одну точку (наибольшее количество вершин). Тогда число треугольников, не имеющих вершин на прямых из $P$ равно $C_m^3$. Число треугольников, одна сторона которых лежит на прямой из $P$ равно $n\cdot C_m^2$. Двух сторон треугольника, лежащих на двух прямых из $P$, не бывает по причине их параллельности. Таким образом,

$$N_{\max}=C_n^3+mC_n^2=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+m\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{6}(n+3m-2).$$

Наименьшее возможное число треугольников связано с таким расположением прямых из $Q$, при котором все прямые $q_j$ проходят через одну точку $A$. Если $A$ не принадлежит ни одной из прямых $p_k, k=1,2,...,m$, то число треугольников равно $N_1=mC_n^2$. Если $A\in p_k$, то число искомых треугольников равно $N_2=(m-1)C_n^2$. Таким образом,

$$N_{\min}=(m-1)C_n^2=\frac{(m-1)n(n-1)}{2}.$$

В нашем случае $m=3, n=5,$ и, следовательно $N_{\max}=40$, а $N_{\min}=20.$

**Ответ:** $N_{\max}=40$, $N_{\min}=20.$

**4.** Случайная величина $\xi$ равномерно распределена на отрезке $[0;6]$. Найти вероятность того, что неравенство $x^2+(2\xi+1)x+3-\xi\le 0$ справедливо для всех $x\in[-2;-1]$.

**Решение.** Неравенство $f(x)=x^2+(2\xi+1)x+3-\xi\le 0$ справедливо на отрезке $[-2;-1]$, если

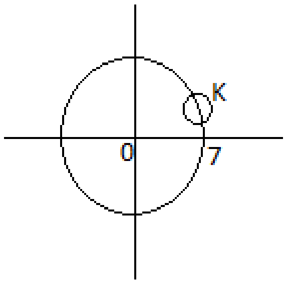
$$\begin{cases} f(-1)\le 0 \\ f(-2)\le 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1-(2\xi+1)+3-\xi\le 0 \\ 1-2(2\xi+1)+3-\xi\le 0 \end{cases} \to \begin{cases} \xi\ge 1 \\ \xi\ge 2/5 \end{cases} \to \xi\ge 1.$$

Таким образом, событие $A$ реализуется, если $\xi\in[1;6]$ и поэтому $P(A)=\frac{5}{6}.$

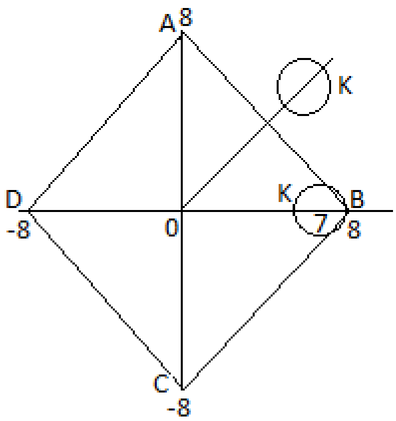
**Ответ:** $P(A)=\frac{5}{6}.$

**5.** При каких значениях $a$ система $\begin{cases} (x-7\cos a)^2+(y-7\sin a)^2=1 \\ |x|+|y|=8 \end{cases}$ имеет единственное решение?

**Решение.** Множество точек на плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют первому уравнению системы, лежат на окружности $K_a$ радиуса 1 с центром в точке $O(7\cos a;7\sin a)$. При изменении $a$ центр движется по окружности радиуса 7 с центром в начале координат.

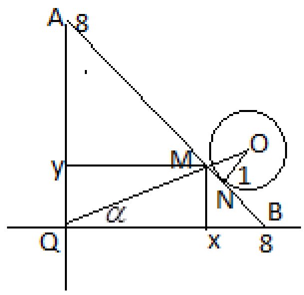



Множество точек на плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют второму уравнению системы, являются границей квадрата $ABCD$




При $a=0$ точка $B$ лежит на окружности $K_0$, а система имеет три решения. При $a\in(0;a_1)$, где значение $a=a_1$ соответствует касанию окружности $K_a$ стороны $BC$ квадрата, вершина $B$ находится вне единичного круга, а система имеет 4 решения. При $a=a_1$ система имеет 3 решения. На интервале $a \in (a_1; a_2)$, где значение $a = a_2$ соответствует касанию окружности $K_a$ стороны $AB$ квадрата, система имеет два решения, соответствующие двум точкам пересечения окружности со стороной $AB$. При $a = a_2$ система имеет единственное решение. На интервале $a \in \left(a_2; \frac{\pi}{2} - a_2\right)$ окружность $K_a$ находится вне квадрата, а система не имеет решений. При $a_3 = \frac{\pi}{2} - a_2$ система единственное решение. Тогда по симметрии фазового портрета относительно биссектрисы первого квадранта на интервале $\left(a_3; \frac{\pi}{2} - a_1\right)$ система будет иметь два решения, а при $a_4 = \frac{\pi}{2} - a_1$ - три решения. Наконец, при $a \in \left(a_4; \frac{\pi}{2}\right)$ система имеет 4 решения, а для $a = \frac{\pi}{2}$ - три решения. Можно заметить, что $T = \frac{\pi}{2}$ является периодом для решения задачи. Таким образом, решением задачи варианта 1 является серии $a = a_2 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ и $a = \frac{\pi}{2} - a_2 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, которые объединяются в серию $a = \pm a_2 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Вычисление значения $a_2$:




$N -$ точка касания окружности с прямой $AB$, $M(x; y) -$ точка пересечения прямой $QO$ с прямой $AB$.

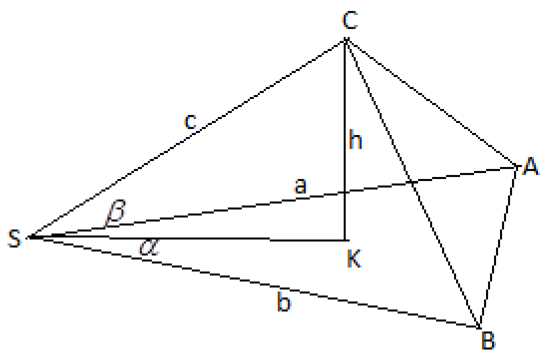
$$x = QM\cos a,\ y = QM\sin a \to x + y = 8 = QM(\sin a + \cos a) \to QM = \frac{4\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$$

$a = a_2 = \arcsin\frac{4\sqrt{2}+1}{7} - \frac{\pi}{4}$. С учетом симметрии квадрата, система имеет единственное решение при $a = \pm\left(\arcsin\frac{4\sqrt{2}+1}{7} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi k}{2} = \pm\arcsin\frac{4\sqrt{2}+1}{7} + \frac{(2k-1)\pi}{4}, k \in Z.$

**Ответ:** $a = \pm\arcsin\frac{4\sqrt{2}+1}{7} + \frac{(2k-1)\pi}{4}, k \in Z.$

**6.** В треугольной пирамиде $SABC$ угол $ASB$ при вершине $S$ равен $30^0$, а боковое ребро $SC$ наклонено к плоскости грани $ASB$ под углом $45^0$. Сумма длин боковых ребер пирамиды равна $9$. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

**Решение.**




Введем обозначения: $SA = a, SB = b, SC = c, CK = h, \angle ASB = \alpha, \angle CSK = \beta,$

$CK -$ перпендикуляр на грань $ASB$. Тогда

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{SAB} \cdot h = \frac{1}{6} ab \sin\alpha \cdot c \sin\beta = \frac{1}{6} abc \sin\alpha \sin\beta.$$

Из неравенства о среднем геометрическом и среднем геометрическом

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} = \frac{p}{3} \to abc \le \frac{p^3}{27}$$

Равенство достигается при $a = b = c$. Тогда наибольшее значение произведения $abc$ равно $\frac{p^3}{27}$, а наибольшее значение объема пирамиды равно $\frac{p^3}{162} \sin\alpha \sin\beta = \frac{9\sqrt{2}}{8}$.

**Ответ:** $V_{\max} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$.

**Ответы для других вариантов.**

**2 вариант**

Задача 1.Ответ: $x = 2; 4; 5 - \sqrt{13}; 5 - \sqrt{17}$.

Задача 2. Ответ: 1) $n = 12k$ 2) $n = 12k \pm 2, k \in Z$.

Задача 3. Ответ: 1) $N_{\max} = 80$ 2) $N_{\min} = 45$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{3}{8}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left( \arcsin \frac{5\sqrt{2}-1}{9} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{5\sqrt{2}-1}{9} + \frac{\pi k}{2} \right), k \in Z$, $a \ne \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Задача 6. Ответ: $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**3 вариант**

Задача 1. Ответ: $x = \frac{3}{2}; \frac{9 - \sqrt{41}}{4}$.

Задача 2. Ответ: $n = 18k, \quad k \in Z$.

Задача 3. Ответ: 1) $N_{\max} = 77$ 2) $N_{\min} = 21$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{3}{7}$.

Задача 5. Ответ: $a = \pm\left( \arcsin \frac{9\sqrt{2}-2}{16} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\pi k}{2}, a = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Задача 6. Ответ: $V_{\max} = \frac{8}{3}$.

**4 вариант**

Задача 1. Ответ: $x = \frac{1}{4}; \frac{-3-\sqrt{89}}{8}$.

Задача 2. Ответ: $n = 16k + 8,\ n = 16k,\ k \in Z$.

Задача 3. Ответ: 1) $N_{\max} = 140$ 2) $N_{\min} = 84$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{3}{5}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left( \arcsin\frac{6\sqrt{2}+1}{11} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{6\sqrt{2}+1}{11} + \frac{\pi k}{2} \right), k \in Z$.

Задача 6. Ответ: $V_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{24}$.