**Задания очного отборочного тура**
**Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»**
**Математика, 11 класс, комплект 2**
**2017 г.**

**1 Вариант**
**Максимальный балл за каждую задачу – 2 балла.**

**1.** Найти все $x$, удовлетворяющие неравенству $n^2x^2-(2n^2+n)x+n^2+n-6\le 0$ при любых натуральных $n$.

**Решение.** Корнями квадратного трехчлена $n^2x^2-(2n^2+n)x+n^2+n-6$ являются

$$x_1=1-\frac{2}{n},\ x_2=1+\frac{3}{n}.$$

Разложим левую часть неравенства на множители

$$n^2\left(x-\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)\left(x-\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)\le 0.$$

Решая неравенство методом интервалов, получим $x\in\left[1-\frac{2}{n};1+\frac{3}{n}\right]$. Только $x=1$ принадлежит этому отрезку при любых $n$.

**Ответ:** $x=1$

**2.** Решить уравнение $\left(\cos\frac{2x}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}\right)^2+\left(\sin\frac{2x}{3}-\sin\frac{4\pi}{9}\right)^2=0$.

**Решение.** Уравнение эквивалентно системе уравнений $\begin{cases}\cos\frac{2x}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}=0\\ \sin\frac{2x}{3}-\sin\frac{4\pi}{9}=0\end{cases}$.

Решим уравнение $\cos\frac{2x}{5}=\cos\frac{2\pi}{15}$ : $\left[\begin{array}{l}\frac{2x}{5}=\frac{2\pi}{15}+2\pi k,\to x_1=\frac{\pi}{3}+5\pi k,\ k\in Z\\ \frac{2x}{5}=-\frac{2\pi}{15}+2\pi k\to x_2=-\frac{\pi}{3}+5\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.$.

Решим уравнение $\sin\frac{2x}{3}=\sin\frac{4\pi}{9}$: $\left[\begin{array}{l}\frac{2x}{3}=\frac{4\pi}{9}+2\pi m,\to x_3=\frac{2\pi}{3}+3\pi m,\ m\in Z\\ \frac{2x}{3}=\frac{5\pi}{9}+2\pi s\to x_4=\frac{5\pi}{6}+3\pi s,\ s\in Z\end{array}\right.$.

Решениями исходного уравнения могут быть пересечения серий
$x_1\cap x_3,\ x_1\cap x_4,\ x_2\cap x_3,\ x_2\cap x_4$

**Случай 1.** Пересечение $x_1\cap x_3=\varnothing$. Действительно,

$$x_1=\frac{\pi}{3}+5\pi k=x_3=\frac{2\pi}{3}+3\pi m\to\frac{1}{3}=5k-3m.$$

Равенство невозможно, поскольку справа целое число.

**Случай 2.** Пересечение $x_1\cap x_4=\varnothing$.Действительно,

$$x_1=\frac{\pi}{3}+5\pi k=x_4=\frac{5\pi}{6}+3\pi s\to\frac{1}{2}=5k-3s.$$

Последнее равенство невозможно, поскольку $k$ и $s$ - целые числа.

**Случай 3.** Пересечение $x_2\cap x_3\ne\varnothing$. Действительно,

$$x_2=-\frac{\pi}{3}+5\pi n=x_3=\frac{2\pi}{3}+3\pi m\to 5n-3m=1\to\begin{cases} n=2+3t,\\ m=3+5t,\ t\in Z\end{cases}$$

Тогда $x=-\frac{\pi}{3}+5\pi(2+3t)=\frac{29\pi}{3}+15\pi t,\ t\in Z$

**Случай 4.** Пересечение $x_2\cap x_4=\varnothing$.Действительно,

$$x_2=-\frac{\pi}{3}+5\pi n=x_4=\frac{5\pi}{6}+3\pi s\to 5n-3s=\frac{7}{6}$$, что невозможно.

**Ответ.** $x=\frac{29\pi}{3}+15\pi t,\ t\in Z.$

**3.** Найти $x$ и $y$, для которых $\begin{cases} x-2y+[x]+3\{x\}-\{y\}+3[y]=2,5\\ 2x+y-[x]+2\{x\}+3\{y\}-4[y]=12\end{cases}$, где $[x],[y]$ и $\{x\},\{y\}$ – целая и дробная части чисел $x$ и $y$. Целая часть числа $a$ это наибольшее целое число, не превосходящее $a$, а $\{a\}=a-[a]$.

**Решение.** С учетом того, что $x=[x]+\{x\}$ и $y=[y]+\{y\}$ запишем систему в виде:

$$\begin{cases} 2[x]+4\{x\}+[y]-3\{y\}=2,5\\ [x]+4\{x\}-3[y]+4\{y\}=12\end{cases}.$$

Введем обозначения: $\{x\}=u\in[0;1),\ \{y\}=v\in[0;1)$.

Система принимает вид: $\begin{cases} 2[x]+[y]=2,5-4u+3v\\ [x]-3[y]=12-4u-4v\end{cases}$.

Выразим $[x]$ и $[y]$ через $u$ и $v$: $\begin{cases} [x]=\dfrac{19,5-16u+5v}{7}\\ [y]=\dfrac{-21,5+4u+11v}{7}\end{cases}$.

Оценим выражение $\frac{19,5-16u+5v}{7}$: $0,5=\frac{3,5}{7}<\frac{19,5-16u+5v}{7}<\frac{24,5}{7}=3,5.$

Таким образом, для $[x]$ допустимы только три значения $[x]=1;2;3$.

**Случай 1.** $[x]=1$. Имеем $\frac{19,5-16u+5v}{7}=1$. Отсюда получаем

$$16u-5v=12,5\to u=\frac{12,5+5v}{16}\in[0;1)\to v\in[-2,5;0,7)\to v\in[0;0,7).$$

Тогда $[y]=\frac{49v-73,5}{28}\in(-2,625;-1,4)$ для $v\in[0;0,7)$ и с условием целочисленности $[y]$ получаем $[y]=-2$. Этому значению соответствуют $v_1=\frac{5}{14},\ u_1=\frac{25}{28}$ и $x_1=1+\frac{25}{28}=\frac{53}{28},\ y_1=-2+\frac{5}{14}=-\frac{23}{14}$.

**Случай 2.** $[x]=2$. Имеем $\frac{19,5-16u+5v}{7}=2$. Отсюда получаем

$$16u-5v=5,5\to u=\frac{5v+5,5}{16}\in[0;1)\to v\in[-1,1;2,1)\to v\in[0;1).$$

Тогда $[y]=\dfrac{49v-80,5}{28}\in[-2,875;-1,125)$ для $v\in[0;1)$ и с условием целочисленности $[y]$ получаем $[y]=-2$. Этому значению соответствуют $v_2=0,5,\ u_2=0,5$ и $x_2=2+0,5=2,5,\ y_2-2+0,5=-1,5.$

**Случай 3.** $[x]=3$. Имеем $\dfrac{19,5-16u+5v}{7}=3$. Отсюда получаем

$$16u-5v=-1,5\to u=\frac{5v-1,5}{16}\in[0;1)\to v\in[0,3;3,5)\to v\in[0,3;1).$$

Тогда $[y]=\dfrac{49v-87,5}{28}\in[-2,6;-1,375)$ для $v\in[0;1)$ и с условием целочисленности $[y]$ получаем $[y]=-2$. Этому значению соответствуют $v_3=\dfrac{9}{14},u_3=\dfrac{3}{28}$ и $x_3=3+\dfrac{3}{28}=\dfrac{87}{28},\ y_3=-2+\dfrac{9}{14}=-\dfrac{19}{14}.$

**Ответ:** $\left(\dfrac{53}{28};-\dfrac{23}{14}\right);\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right);\left(\dfrac{87}{28};-\dfrac{19}{14}\right).$

**4.** Найти вероятность того, что случайно взятое на отрезке $[0;5]$ число $x$ является решением уравнения $\sin\left(x+|x-\pi|\right)+2\sin^2\left(x-|x|\right)=0$.

**Решение.**

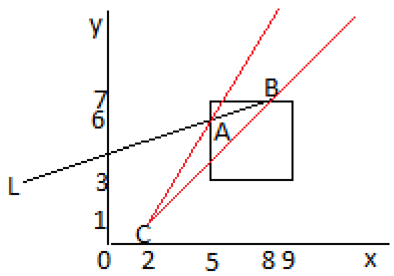
**Случай 1**. $x\in[0;\pi]$. Уравнение принимает вид: $\sin(x+\pi-x)+2\sin^2(x-x)=0$, т.е. любое $x\in[0;\pi]$ является решением уравнения, следовательно, $P(A)=\dfrac{\pi}{5}.$

**Случай 2,** $x\in(\pi;5]$. Уравнение принимает вид: $\sin(x+x+\pi)+2\sin^2(x-x)=0$ или $\sin 2x=0.$ Тогда $x=\dfrac{3\pi}{2}$ и ,следовательно, $P(A)=0$.

**Ответ:** $P(A)=\dfrac{\pi}{5}$.

**5.** При каких $a$ система уравнений $\begin{cases}x\sin a-y\cos a=2\sin a-\cos a\\ x-3y+13=0\end{cases}$ имеет решение $(x;y)$ в квадрате $5\le x\le 9, 3\le y\le 7$?

**Решение.** Прямая $L$ ,задаваемая уравнением $x-3y+13=0$, пересекает стороны квадрата в точках $A(5;6)$ и $B(8;7)$.



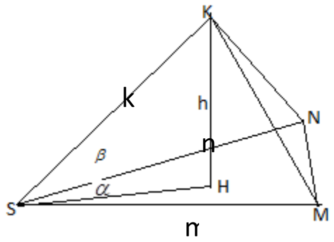

Первое уравнение системы запишем в виде $(x-2)\sin a-(y-1)\cos a=0$.

Прямая с таким уравнением проходит через точку $C(2;1)$ при любых $a$ и пересекает отрезок $[A;B]$ при $a\in\left[\dfrac{\pi}{4}+\pi k, arctg\dfrac{5}{3}+\pi k\right],k\in Z$.

**Ответ:** $a \in \left[ \frac{\pi}{4} + \pi k, arctg\frac{5}{3} + \pi k \right], k \in Z$.

**6.** На ребрах трехгранного угла с вершиной в точке $S$ расположены точки $M, N$ и $K$ такие, что $SM^2 + SN^2 + SK^2 \le 12$. Найти площадь треугольника $SMN$, если известно, что угол $MSN$ равен $30^0$, а объем пирамиды $SMNK$ максимально возможный.

**Решение.** Введем обозначения: $SM = m, SN = n, SK = k$.




Объем пирамиды $SMNK$ равен

$$V = \frac{1}{3} S_{SMN} \cdot h = \frac{1}{6} mn \sin\alpha \cdot h = \frac{1}{6} mn \sin\alpha \cdot k \sin\beta = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{6} mnk.$$

Значения углов $\alpha, \beta$ зависят от трехгранного угла, но не от положения точек $M, N, K$ на его ребрах, поэтому максимальному объему пирамиды $SMNK$ соответствует максимальное значение произведение $m \cdot n \cdot k$, при условии $m^2 + n^2 + k^2 \le p$. Из неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом трех чисел следует, что $\sqrt[3]{m^2 n^2 k^2} \le \frac{m^2 + n^2 + k^2}{3} \le \frac{p}{3}$.

Равенство достигается при $m = n = k$. Тогда при $m = n = k = \sqrt{\frac{p}{3}}$ объем пирамиды максимально возможный, а площадь треугольника $SMN$ принимает значение $\frac{p \sin\alpha}{6}$. В нашем случае $p$=12, $\alpha = 30^0$, следовательно, $S_{SMN} = 1$.

**Ответ:** $S_{SMN} = 1$.

**Ответы для других вариантов.**

**2 вариант**

Задача 1. Ответ: $x \in (-1; 4)$.

Задача 2. Ответ: $x_1 = \frac{19\pi}{2} + 20\pi t, \; x_2 = -\frac{11\pi}{2} + 20\pi t, t \in Z.$

Задача 3. Ответ: $\left( \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{1}{4}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left[ arctg\frac{4}{5} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k \right], k \in Z.$

Задача 6. Ответ: $S_{SMN} = 4$.

**3 вариант**

Задача 1. Ответ: $x \in [1;2]$.

Задача 2. Ответ: $x = \frac{8\pi}{3} + 6\pi t,\ t \in Z.$

Задача 3. Ответ: $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{1}{2}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi k, arctg 4 + \pi k\right], k \in Z.$

Задача 6. Ответ: $S_{SMN} = 2$.

**4 вариант**

Задача 1. Ответ: $x \in (-2;3)$.

Задача 2. Ответ: $x = \frac{25\pi}{4} + 21\pi t,\ t \in Z.$

Задача 3. Ответ: $\left(-\frac{45}{14}; -\frac{9}{14}\right); \left(-\frac{35}{14}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{25}{14}; -\frac{5}{14}\right)$.

Задача 4. Ответ: $P(A) = \frac{3}{8}$.

Задача 5. Ответ: $a \in \left[-arctg 9 + \pi k, -arctg \frac{5}{3} + \pi k\right], k \in Z.$

Задача 6. Ответ: $S_{SMN} = 3$.