Задания очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
Математика, 7 класс
2017 г.

1 Вариант
Максимальный балл за каждую задачу – 2 балла.

1. Паша, Маша, Толя и Оля съели 88 конфет, причем каждый съел не менее одной конфеты. Маша и Толя съели 57 конфет, но больше всех конфет съел Паша. Сколько конфет съела Оля?

Решение. Либо Маша, либо Толя съели не менее 29 конфет, тогда Паша съел не менее 30 конфет. Тогда количество конфет, съеденных Пашей, Машей и Толей, не меньше 57+30=87. Поскольку всего конфет 88, а Оля от конфет не отказалась, то на ее долю приходится одна конфета.

Ответ: 1 конфету.

2. Найти дробь вида $\dfrac{n}{23}$ наименее удаленную от дроби $\dfrac{37}{57}$ ($n-$ целое).

Решение. После приведения к общему знаменателю нужно найти наименьшее отклонение дроби $\dfrac{57n}{1311}$ от $\dfrac{851}{1311}$. Разделим 851 на 57 с остатком $851=14\cdot 57+53$. Если $n=14$, то отклонение числа $57n$ от 851 равно 53, а при $n=15$ это отклонение равно 4. При всех других n его значение больше 53. Таким образом, искомое $n=15$, а дробь $\dfrac{15}{23}$.

Ответ: $\dfrac{15}{23}$.

3. Разность двух натуральных чисел в 5 раз меньше их суммы и в 24 раза меньше их произведения. Найти эти числа.

Решение. Пусть $x-$ большее из двух чисел, а $y-$ меньшее. Условие задачи

$$\begin{cases} x+y=5(x-y) \\ xy=24(x-y) \end{cases} \to \begin{cases} 2x=3y \\ \dfrac{3}{2}y^2=12y \end{cases}.$$

$y=0$ не является числом натуральным, второе решение $y=8 \to x=12$.

Ответ: 12, 8.

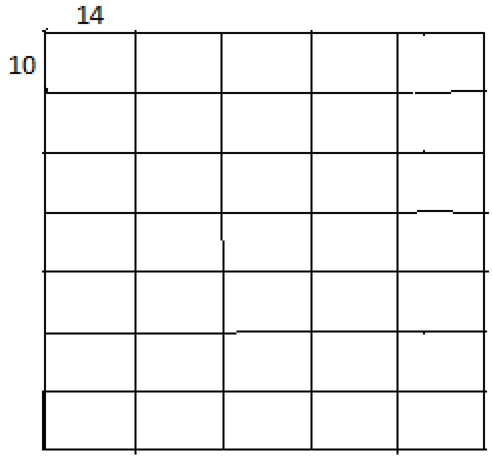
4. Петя пытается выложить на столе квадрат из одинаковых картонных прямоугольников размером 14×10. Сможет ли он сделать это? Предложите свой вариант построения такого квадрата. Какое наименьшее число прямоугольников для этого ему понадобится?

Решение. Пусть $n-$ число прямоугольников, из которых выложен квадрат. Тогда площадь квадрата равна $S=14\cdot 10\cdot n$. Если на сторону квадрата выходят m сторон прямоугольников длины 14 и k сторон длины 10, то длина стороны квадрата $14m+10k$, а его площадь $S=(14m+10k)^2$. Приравнивая выражения для площадей, получим

$$14\cdot 10\cdot n=\left(14m+10k\right)^2 \to 7\cdot 5\cdot n=\left(7m+5k\right)^2 \quad (*)$$

Можно считать, что числа m и k взаимно простые. В противном случае, сторону квадрата можно уменьшить в $p>1$ раз, где $p-$ общий делитель чисел m и k.

Левая часть равенства (*) делится на 7, поэтому число $7m+5k$ делится на 7, а $\left(7m+5k\right)^2$ делится на 49. Тогда на 49 делится левая часть (*), что возможно при n кратном 7. Аналогично доказывается, что n кратно 5. Тогда $n=35\cdot s, s\in Z$ и наименьшее возможное число прямоугольников $n = 35$. На рис изображен квадрат, собранный их 35 прямоугольников.



Ответ: 35 прямоугольников.

5. В прямоугольной таблице в определенном порядке размещены буквы слова «олимпиада».

О	Л	И	М	П	И	А	Д	А
Л	И	М	П	И	А	Д	А	О
И	М	П	И	А	Д	А	О	Л
М	П	И	А	Д	А	О	Л	И

Нужно прочесть слово «олимпиада», начиная с буквы «О», расположенной в левом верхнем угле таблицы и заканчивая буквой «А». Разрешается переход от буквы к букве, расположенным в соседних клетках таблицы. Найдите число различных способов прочтения слова «олимпиада» по заданной таблице.

Решение. В каждой клетке приведенной ниже таблицы

О	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	3	6	10	15	21	28		
1	4	10	20	35	56			

записано число различных путей, приводящих при чтении слова «олимпиада» к букве, записанной в этой клетке таблицы. Например, в клетку в третьем столбце и второй строке, т.е. к букве M, приводят три различных способа прочтения «олим»: два пути из клетки, расположенной во втором столбце и второй строке, и один путь из клетки второго столбца и первой строки. В общем случае, для получения числа, записанного в клетке расположенной на пересечении строки с номером i и столбца с номером j нужно сложить число, записанное в $(j-1)-$ой клетке строки с номером i и число, расположенное в $j-$ой клетке $(i-1)-$строки. В каждой из затемненных клеток, где располагалась последняя буква «А» слова «олимпиада», указано число различных способов прочтения этого слова, при условии, что прочтение заканчивается в этой клетке. Для получения ответа осталось сложить все числа, расположенные в выделенных клетках: $n = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$.

Ответ: $n = 93$.

Ответы для других вариантов.

2 вариант

Задача 1. Ответ: два слова.

Задача 2. Ответ: $\dfrac{21}{37}$.

Задача 3. Ответ: 12, 8.
Задача 4. Ответ: 55 прямоугольников.
Задача 5. Ответ: $n = 57$.

Р	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				

$N = 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 57.$

3 вариант
Задача 1. Ответ: три броска.
Задача 2. Ответ: $\frac{43}{61}$.
Задача 3. Ответ: 18, 12.
Задача 4. Ответ: 21 прямоугольник.
Задача 5. Ответ: $n = 31$.

П	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				

$n = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31.$

4 Вариант
Задача 1. Ответ: четыре фантика.
Задача 2. Ответ: $\frac{66}{71}$.
Задача 3. Ответ: 36, 24.
Задача 4. Ответ: 143 прямоугольника.
Задача 5. Ответ: $n = 99$.

П	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35			
1	5	15	35				

$n = 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 99.$