Задания очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
Математика, 8 класс
2017 г.

1 Вариант
Максимальный балл за каждую задачу – 2 балла.

1. Пусть $[x]$ и $\{x\}$ целая и дробная части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\}=x-[x]$. Найти x, если $2x+3[x]-5\{x\}=4$.

Решение.

$$x=[x]+\{x\}\to 2([x]+\{x\})+3[x]-5\{x\}=4\to 5[x]-3\{x\}=4\to \{x\}=\frac{5[x]-4}{3}\in[0;1)$$

$$[x]\in\left[\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)\to[x]=1\to\{x\}=\frac{1}{3}\to x=[x]+\{x\}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Ответ: $x=\frac{4}{3}$.

2. План города N имеет форму квадрата, поделенного восьмью параллельными улицами с направлением «юг-север» (стрит) и восьмью параллельными улицами с направлением «запад-восток» (авеню) на 81 равных квартала, имеющих форму квадратов. Водитель намерен проехать с перекрестка, расположенного на пересечении авеню и стрит с номерами 1 до перекрестка при пересечении авеню и стрит с номерами 8, используя кратчайший путь. Сколькими различными маршрутами может воспользоваться водитель?

Решение. Перекресток начала движения обозначим буквой A, а перекресток конца пути - через B. Путь из A в B кратчайший, если водитель не объезжает квартал или группу кварталов, совершая два правых (или левых) поворотов подряд. Все такие маршруты имеют одинаковую длину. В приведенной ниже таблице в каждой из 64 клеток, соответствующих всем перекресткам города, написано число различных возможных способов попадания на этот перекресток при прокладывании маршрута. Если a_{ij} число маршрутов, приводящих к перекрестку авеню с номером i и стрита с номером j, то $a_{ij}=a_{i,j-1}+a_{i-1,j}$.

A	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	8	36	120	330	792	1716	3432

Таким образом, на перекресток B (затемнение) можно попасть 3432 способами.

Ответ: $n=3432$.

3. Представить число 80 в виде суммы двух простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что единица простым числом не является.

Решение. Перебор всех простых чисел от 2 до 73 организуем в виде таблицы.

1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76

5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78

В таблице отмечены темным цветом составные числа от 4 до 78 (единица не является ни простым, ни составным числом) и 21 простых чисел. В следующих двух таблицах указаны пары чисел $(a;b)$, для которых $a+b=80$ и $a-$ простое число.

a	2	3	5	7	11	13	17	19	23
b	78	77	75	73	69	67	63	61	57

a	29	31	37	41	47	53	59	71	
b	51	49	43	39	33	27	21	9	

Во второй строке таблицы (b) выделены темным цветом составные числа. Таким образом, число 80 можно представить в виде суммы двух простых чисел четырьмя способами: $80=7+73, 80=13+67,\ 80=19+61,\ 80=37+43.$

Ответ: $80=7+73, 80=13+67,\ 80=19+61,\ 80=37+43$; четыре способа.

4. На листе бумаги написаны 12 последовательных целых чисел. После зачеркивания одного из них, сумма оставшихся чисел равняется 325. Какое число было вычеркнуто?

Решение. Пусть $n, n+1, ..., n+k-1, n+k, n+k+1, ..., n+11$ последовательные 12 целых чисел и зачеркивается число $n+k,\ k=0,1,2,...,11$. Сумма чисел после зачеркивания равна

$$\frac{2n+11}{2}\cdot 12-(n+k)=325 \to 11n+66-k=325 \to k=11n-259.$$

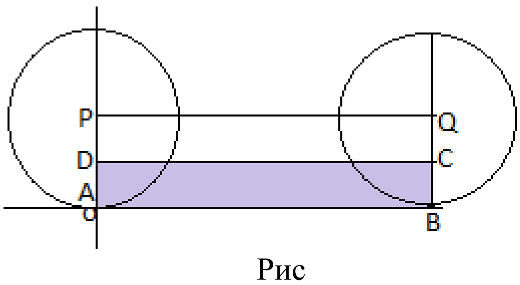
С учетом условия $k\in[0;11]$, получим $0\le 11n-259\le 11 \to \frac{259}{11}\le n\le\frac{270}{11}$. В этом интервале находится только одно число $n=24$ и $k=5$. Тогда зачеркнутое число $n+k=29$.

Ответ: 29.

5. Имеются круг, радиуса 4 вырезанный из картона, линейка и циркуль. На листе бумаги постройте прямоугольник равновеликий по площади кругу.

Решение. Построение.

Нарисуем на плоскости с помощью циркуля и линейки две взаимно перпендикулярные прямые



Рис

и окружность радиуса R, касающейся горизонтальной прямой, с центром в точке P на вертикальной прямой. Наложим заданный круг на построенный так, чтобы их границы совпали, а отмеченная на окружности картонного круга точка A совпала с точкой O пересечения прямых. Совместив один край линейки с горизонтальной прямой, прокатим картонный круг по линейке на один оборот без скольжения. В этот момент точка A совпадет с точкой B горизонтальной оси, а центр круга займет положение точки Q (см рис). Далее картонный круг убирается. Построив с помощью циркуля и линейки

перпендикуляр к горизонтальной прямой в точке B, отложим на нем отрезок BQ, по длине равный R. Соединив точки P и Q, построим прямоугольник $ABQP$.
Разделив отрезки BQ и AP пополам, получим точки C и D. Прямоугольник $ABCD$ искомый.
Анализ. Длина стороны AB равна длине окружности, т.е. $2\pi R$, длина стороны BC равна $R/2$ по построению. Тогда площадь прямоугольника $ABCD$ равна πR^2, т.е. прямоугольник равновелик кругу.

Ответы для других вариантов.

2 вариант
Задача 1. Ответ: $x = -\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; \frac{9}{7}; 2.$
Задача 2. Ответ: $n = 252.$
Задача 3. Ответ: $72 = 5+67,\ 72 = 11+61,\ 72 = 13+59, 72 = 19+53,\ 72 = 29+43,\ 72 = 31+41$; шесть способов.
Задача 4. Ответ: 25.
Задача 5. Построение.

3 вариант
Ответ: $x = \frac{11}{4}; \frac{7}{2}; \frac{17}{4}; 5.$
Задача 2. Ответ: $n = 924.$
Задача 3. Ответ: $70 = 3+67, 70 = 11+59,\ 70 = 17+53,\ 70 = 23+47,\ 70 = 29+41$; пять способов.
Задача 4. Ответ: 39.
Задача 5. Построение.

4 Вариант
Задача 1. Ответ: $x = \frac{11}{6}; \frac{8}{3}; \frac{7}{2}; \frac{13}{3}; \frac{31}{6}; 6.$
Задача 2. Ответ: $n = 70.$
Задача 3. Ответ: $68 = 7+61, 68 = 31+37$; два способа.
Задача 4. Ответ: 45.
Задача 5. Построение.