Задания очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
Математика, 9 класс
2017 г.

1 вариант

Максимальный балл за каждую задачу – 2 балла.

1. $[x]$– целая часть числа x(наибольшее целое число не превосходящее x), $\{x\}=x-[x]$– дробная части числа x.

При каких a система $\begin{cases} 2x-[x]=4a+1 \\ 4[x]-3\{x\}=5a+15 \end{cases}$ имеет решение? Найти такие x.

Решение. Обозначим $\begin{cases} u=[x] \\ v=\{x\} \end{cases} \to u+v=x, 0\le v<1.$

Тогда система примет вид: $\begin{cases} u+2v=4a+1 \\ 4u-3v=5a+15 \end{cases} \to \begin{cases} u=2a+3 \\ v=a-1 \end{cases}$.

Так как $0\le v<1$, то $0\le a-1<1 \to a\in[1;2)$.Следовательно, $u=2a+3\in[5;7)$.

В силу целочисленности u получаем : $u=[x]=5$ и $u=[x]=6$.

$$u=5: a=1 \to v=0 \to x=5; \qquad u=6: a=\frac{3}{2} \to v=\frac{1}{2} \to x=\frac{13}{2}.$$

Ответ: 1) при $a=1, x=5$; 2) при $a=\frac{3}{2}, x=\frac{13}{2}$.

2. Один из попугаев всегда говорит правду, другой всегда врет, а третий – хитрец – иногда говорит правду, иногда врет. На вопрос: «Кто Кеша?» – они ответили: **Гоша**: – Лжец. **Кеша**: – Я хитрец! **Рома**: – Абсолютно честный попугай. Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

Решение. Так как Кеша сказал, что он хитрец, то он не может честным. Так как Рома сказал, что Кеша абсолютно честный попугай, то Рома тоже не может быть честным. Следовательно, правду сказал Гоша. Это означает, что Кеша лжец. Тогда Рома – хитрец.

Ответ: Кеша – лжец, Рома – хитрец.

3. Для каких номеров n числа $a_n = 7n - 3$ делятся на 5, но не делятся на 3?

Решение. $a_n = 7n - 3 \vdots 5 \rightarrow 7n - 3 = 5k,\ k \in Z.$ Получаем линейное диофантово уравнение $7n - 5k = 3,\ k \in Z.$ Имеем

$$k = \frac{7n-3}{5} = n + \frac{2n-3}{5} \rightarrow \frac{2n-3}{5} = l \in Z \rightarrow n = \frac{5l+3}{2} = 2l + 1 + \frac{l+1}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{l+1}{2} = t \in Z \rightarrow l = 2t - 1 \rightarrow n = 2(2t-1) + t = 5t - 1.$$

Получили $n = 5t - 1, t \in N.$ Тогда, $a_n = 35t - 10, t \in N.$ Перепишем a_n в виде $a_n = 36t - 9 - t - 1, t \in N.$ Следовательно, $a_n \vdots 3 \leftrightarrow t + 1 \vdots 3 \leftrightarrow t = 3m - 1, m \in N.$ Условию задачи удовлетворяют номера $n = 5t - 1, t \neq 3m - 1, t, m \in N.$

Ответ: $n = 5t - 1, t \neq 3m - 1, t, m \in N.$

4. Представить число 43 в виде суммы трех простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что число 1 не считается простым.

Решение. $43 = a + b + c,\ a, b, c$ - простые числа.

Простые числа от 2 до 43

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

$a = 2 \rightarrow 43 - 2 = 41 \rightarrow b = 2 \rightarrow c = 39$ - не простое число.

$a > 2$: выпишем $a,\ 43 - a$ и простые числа b, c, для которых $43 - a = b + c$.

a	3	3	3	5	5	7	7	7	7	11	11	13	13	13
43- a	40	40	40	38	38	36	36	36	36	32	32	30	30	30
b	3	11	17	7	19	5	7	13	17	3	13	7	11	17
c	37	29	23	31	19	31	29	23	19	29	19	23	19	13

a	17	17	17	19	19	19	23	23	29	29	31	37
43-a	26	26	26	24	24	24	20	20	14	14	12	6
b	3	7	13	5	7	11	3	7	3	7	5	3
c	23	19	13	19	17	13	17	13	11	7	7	3

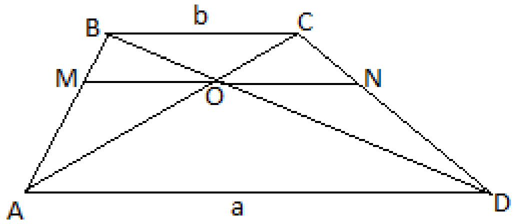
Различные тройки простых чисел, сумма которых равна 43:

3+3+37, 3+11+29, 3+17+23, 5+7+31, 5+19+19, 7+7+29,

7+13+23, 7+17+19, 11+13+19, 13+17+13.

Ответ: десять способов.

5. Сумма оснований трапеции равна 4. Найти наибольшую возможную длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельного ее основаниям.



Решение. Обозначим $AD = a,\ BC = b,\ \frac{b}{a} = k$.

$$\triangle BOC \sim \triangle AOD: \frac{OC}{AO} = \frac{OB}{DO} = \frac{b}{a} = k \to OC = k \cdot AO,\ AC = AO + OC = (1+k)AO.$$

$$\triangle AOM \sim \triangle ACB: \qquad \frac{MO}{b} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{1+k} \to MO = \frac{b}{1+k}.$$

$$\triangle OCN \sim \triangle ACD: \qquad \frac{ON}{a} = \frac{OC}{AC} = \frac{k}{1+k} \to ON = \frac{ka}{1+k}.$$

$$MN = MO + ON = \frac{b}{1+k} + \frac{ka}{1+k} = \frac{b+ka}{1+k} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Из $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \to MN \le \frac{a+b}{2}$. Равенство достигается при $a = b$.

Ответ: $MN_{\max} = 2$.

Ответы для других вариантов.

2 вариант

Задача 1. Ответ: при $a = \frac{7}{2},\ x = -\frac{3}{2}$.

Задача 2. Ответ: Добрыня Никитич.

Задача 3. Ответ: $n = 4t + 2, t \ge 0, t \ne 7m + 4, t \in Z, m \in Z$.

Задача 4 .Ответ: десять способов

$$\begin{pmatrix} 3+5+31, 3+7+29, 3+13+23, 3+17+19, 5+5+29, 5+11+23, \\ 5+17+17, 7+13+19, 11+11+17, 13+13+13 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Ответ: $L_{\max} = 3$.

3 вариант

Задача 1. Ответ: 1) при $a = 2,\ x_1 = -\frac{10}{3}$; 2) при $a = \frac{21}{11},\ x_2 = -\frac{54}{11}$.

Задача 2. Ответ: Боря был первым, Ваня сказал неправду.

Задача 3. Ответ: $n = 5t + 2, t \geq 0, t \neq 13m - 5, t \in Z, m \in Z$

Задача 4. Ответ: восемь способов

$(2+2+31, 3+3+29, 3+13+19,\ 5+7+23, 5+11+19, 5+13+17, 7+11+17, 11+13+13)$.

Задача 5. Ответ: $L_{\max} = 4$.

4 вариант

Задача 1. Ответ: 1) при $a = -3,\ x_1 = -11$; 2) при $a = -\frac{11}{4},\ x_2 = -\frac{39}{4}$;

3) при $a = -\frac{5}{2},\ x_3 = -\frac{17}{2}$; 4) при $a = -\frac{9}{4},\ x_4 = -\frac{29}{4}$.

Задача 2. Ответ: На Боме зеленая рубашка и синие туфли. На Биме красная рубашка и красные туфли.

Задача 3.Ответ: $n = 7t + 4, t \geq 0, t \neq 4m + 2, t \in Z, m \in Z$.

Задача 4. Ответ: восемь способов

$(3+7+23, 3+11+19,\ 3+13+17,\ 5+5+23, 5+11+17, 7+7+19, 7+13+13, 11+11+11)$.

Задача 5. Ответ: $L_{\max} = 8$.