НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МИФИ

Т.И. Бухарова, С.А. Гришин, О.В. Нагорнов,
Д.Г. Орловский, Е.Х. Садекова, Е.Б. Сандаков

ОТРАСЛЕВАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «РОСАТОМ»

МАТЕМАТИКА

учебно-методическое пособие для учащихся инженерных классов московской школы

УДК 371.2(075)
ББК 74.200.587
О-86

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом». Математика. В помощь школьникам 7–11 классов: *Учебно-методическое пособие* / Т.И. Бухарова, С.А. Гришин, О.В. Нагорнов, Д.Г. Орловский, Е.Х. Садекова, Е.Б. Сандаков; под ред. О.В. Нагорнова. – М.: НИЯУ МИФИ, 2018. – 126 с.

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» по математике в течение многих лет проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» для школьников 7–11 классов в Москве, городах расположения объектов атомной отрасли, крупных образовательных центрах РФ. Ежегодно в олимпиаде участвуют около 20000 школьников, обычно около 500 из них становятся победителями и призерами олимпиады. В пособии, написанном составителями заданий олимпиады «Росатом», приведены задания по математике всех туров олимпиады 2017–2018 учебного года. К большинству задач даны подробные комментарии, ответы или решения.

Предназначено участникам олимпиады «Росатом» будущих лет для подготовки к олимпиаде, школьникам 7-11-ых классов, учителям школ, руководителям математических кружков.

ISBN 978-5-7262-2264-6

© Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие **4**

1. Отборочные туры **7**

1.1. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 7 класс 7
1.2. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 8 класс 14
1.3. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 9 класс 21
1.4. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 10 класс 27
1.5. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 11 класс 37
1.6. Очный отборочный тур в регионах, 11 класс 49

2. Заключительные туры 65

2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 7 класс 65
2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс 71
2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс 77
2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс 83
2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс 92
2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс 104
2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс 113

Предисловие

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). Олимпиада проводится более 30 лет[1]. Основная цель олимпиады «Росатом» – выявление одаренных школьников, которые интересуются инженерно-техническими специальностями, способны к техническому творчеству и инновационному мышлению и ориентированы на выбор инженерно-технических направлений обучения.

В состав оргкомитета, методической комиссии и жюри олимпиады входят члены Российской академии наук, государственные и общественные деятели РФ, ректоры ряда ведущих инженерных университетов, главные редакторы образовательных журналов для школьников. Председатель оргкомитета – ректор НИЯУ МИФИ М.Н.Стриханов.

Олимпиада «Росатом» проводится по математике и физике для школьников 7–11 классов. Школьники невыпускных классов составляют около половины участников олимпиады. Олимпиада проводится в два этапа – отборочный и заключительный (для всех классов).

Отборочный этап состоит из нескольких независимых туров и проходит в октябре-январе. Один из отборочных туров проходит дистанционно (с использованием сети Интернет). До заключительного этапа олимпиады допускаются лучшие участники отборочного этапа (до 45 %, но обычно несколько меньше). Пройти на заключительный этап можно из любого отборочного тура, количество участий в отборочных турах никак не ограничивается.

Заключительный этап олимпиады проходит в феврале-марте в очной форме. Из-за огромной географии олимпиады «Росатом» заключительные туры в разных городах не могут проходить одновременно. Поэтому для их проведения методическая комиссия по единым методическим принципам готовит несколько комплектов равноценных заданий (одинаковой структуры и сложности), по которым заключительный тур в разных городах проводится в разные сроки.

---

[1] До 2006 г. олимпиада называлась Олимпиадой Минатома России, до 1999 – Физико-математической олимпиадой МИФИ.

Однако каждый участник может участвовать в заключительном туре олимпиады только один раз по физике и один раз по математике.

Для широкого продвижения олимпиады «Росатом» в регионы РФ и отборочный, и заключительный этапы олимпиады «Росатом» проходят в очной форме во многих регионах РФ с обязательным выездом представителей оргкомитета. В течение учебного года в олимпиаде «Росатом» принимают участие около 20 тысяч школьников из 60–65 субъектов Российской Федерации и всех федеральных округов (в сумме по математике и физике и по всем классам). Несколько тысяч участвуют в заключительном этапе, победителями и призерами становятся около 500 участников.

Олимпиада «Росатом» по математике и физике много лет входит в Перечень олимпиад школьников, утверждаемый Министром образования и науки РФ, и потому ее победители и призеры (одиннадцатиклассники) могут получить особые права при зачислении в вузы, причем в любые – не только в НИЯУ МИФИ, – в которых в качестве вступительных испытаний есть математика или физика. Многие технические вузы РФ зачисляют победителей и призеров олимпиады «Росатом» без вступительных испытаний, так как уже много лет в Перечень олимпиад школьников, утвержденном Минобрнауки России, олимпиада «Росатом» по физике входит под первым уровнем (олимпиад первого уровня по физике всего пять на всю нашу страну), по математике – под вторым (от уровня олимпиады и степени диплома зависят права победителей и призеров). Ежегодно в НИЯУ МИФИ поступает около 40–50 % победителей и призеров олимпиады «Росатом», еще столько же в НИЯУ МИФИ поступает победителей и призеров других олимпиад школьников, обеспечивая около 35 % бюджетного набора в университет.

Оргкомитет олимпиады «Росатом» помогает будущим участникам подготовиться к олимпиаде. На сайте НИЯУ МИФИ размещены задания прошлых лет, в том числе и в формате видеолекций (http://mephi.ru/entrant/olimpiads/rosatom/Pobediteli/podgotovka.php).

Предлагаем нашим читателям сборник задач, которые предлагались на олимпиадах по математике в Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) в 2017-2018 учебном году.

В сборник включены варианты по математике отборочных туров (олимпиада памяти И.В. Савельева для 7-11 классов, регио-

нальный отборочный тур) и заключительных туров Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» для 7-11 классов.

Для каждой олимпиады по каждому классу приведены четыре варианта, причем один из них – с полными решениями, а остальные – с ответами, что позволит самостоятельно проработать соответствующий материал. При работе со сборником попробуйте сначала самостоятельно решить тот вариант, что приведен с полным решением. Если у Вас возникают трудности, то просмотрите приведенное решение, а после этого решайте аналогичные варианты, сверяя свои ответы с данными в сборнике. Именно самостоятельная работа позволяет освоить и понять наиболее сложные моменты в решении задач и научиться решать нестандартные задачи. Представленные задачи охватывают все разделы школьной математики, поэтому разбор всех вариантов гарантирует получение глубоких знаний и навыков, что пригодится как при решении задач очередных туров различных олимпиад, а также, несомненно, поможет в решении задач ЕГЭ по математике.

Информацию об очередных турах Олимпиады "Росатома" можно найти на сайте www.mephi.ru. Здесь же вы можете найти информацию о том, когда и где НИЯУ МИФИ проводит дистанционные занятия для школьников и учителей, выездные курсы, информацию об особых правах при поступлении в вузы победителей и призеров олимпиад школьников.

Желаем Вам всем успехов в учебе! Помните, что полученные Вами знания и навыки будут основным капиталом в Вашей дальнейшей жизни. Удачи!

Авторы

1. Отборочные туры

1.1. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 7 класс

Вариант № 1

1. Паша, Маша, Толя и Оля съели 88 конфет, причем каждый съел не менее одной конфеты. Маша и Толя съели 57 конфет, но больше всех конфет съел Паша. Сколько конфет съела Оля?

2. Найти дробь вида $\frac{n}{23}$ наименее удаленную от дроби $\frac{37}{57}$ (n – целое).

3. Разность двух натуральных чисел в 5 раз меньше их суммы и в 24 раза меньше их произведения. Найти эти числа.

4. Петя пытается выложить на столе квадрат из одинаковых картонных прямоугольников размером 14×10. Сможет ли он сделать это? Предложите свой вариант построения такого квадрата. Какое наименьшее число прямоугольников для этого ему понадобится?

5. В прямоугольной таблице в определенном порядке размещены буквы слова «олимпиада».

О	Л	И	М	П	И	А	Д	А
Л	И	М	П	И	А	Д	А	О
И	М	П	И	А	Д	А	О	Л
М	П	И	А	Д	А	О	Л	И

Нужно прочесть слово «олимпиада», начиная с буквы «О», расположенной в левом верхнем угле таблицы и заканчивая буквой «А». Разрешается переход от буквы к букве, расположенным в соседних клетках таблицы. Найдите число различных способов прочтения слова «олимпиада» по заданной таблице.

Ответы и решения

1. Либо Маша, либо Толя съели не менее 29 конфет, тогда Паша съел не менее 30 конфет. Тогда количество конфет, съеденных Па-

шей, Машей и Толей, не меньше 57+30=87. Поскольку всего конфет 88, а Оля от конфет не отказалась, то на ее долю приходится одна конфета.

Ответ: 1 конфету.

2. После приведения к общему знаменателю нужно найти наименьшее отклонение дроби $\frac{57n}{1311}$ от $\frac{851}{1311}$. Разделим 851 на 57 с остатком $851=14\cdot 57+53$. Если $n=14$, то отклонение числа $57n$ от 851 равно 53, а при $n=15$ это отклонение равно 4. При всех других n его значение больше 53. Таким образом, искомое $n=15$, а дробь $\frac{15}{23}$.

Ответ: $\frac{15}{23}$.

3. Пусть $x-$ большее из двух чисел, а $y-$ меньшее. Запишем систему уравнений, удовлетворяющую условиям задачи:

$$\begin{cases} x+y=5(x-y), \\ xy=24(x-y), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x=3y, \\ \frac{3}{2}y^2=12y. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения (0;0) и (12;8). Так как 0 не является натуральным числом, то решение (0;0) не подходит.

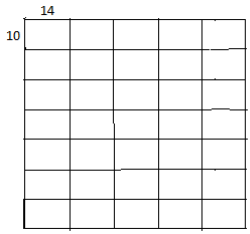
Ответ: 12, 8.

4. Пусть $n-$число прямоугольников, из которых выложен квадрат. Тогда площадь квадрата равна $S=14\cdot 10\cdot n$. Если на сторону квадрата выходят m сторон прямоугольников длины 14 и k сторон длины 10, то длина стороны квадрата $14m+10k$, а его площадь $S=(14m+10k)^2$. Приравнивая выражения для площадей, получим

$$14\cdot 10\cdot n=\left(14m+10k\right)^2 \text{ или } 7\cdot 5\cdot n=\left(7m+5k\right)^2. \qquad (*)$$

Можно считать, что числа m и k взаимно простые. В противном случае, сторону квадрата можно уменьшить в $p>1$ раз, где $p-$ общий делитель чисел m и k. Левая часть равенства (*) делится

на 7, поэтому число $7m+5k$ делится на 7, а $(7m+5k)^2$ делится на 49. Тогда на 49 делится левая часть (*), что возможно при n кратном 7. Аналогично доказывается, что n кратно 5. Тогда $n=35\cdot s,\ s\in Z$ и наименьшее возможное число прямоугольников $n=35$. На рисунке ниже изображен квадрат, собранный их 35 прямоугольников.



Ответ: 35 прямоугольников.

5. В каждой клетке приведенной ниже таблицы

О	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**		
1	4	10	20	35	56			

записано число различных путей, приводящих при чтении слова «олимпиада» к букве, записанной в этой клетке таблицы. Например, в клетку в третьем столбце и второй строке, т.е. к букве M,

приводят три различных способа прочтения «олим»: два пути из клетки, расположенной во втором столбце и второй строке, и один путь из клетки второго столбца и первой строки. В общем случае, для получения числа, записанного в клетке расположенной на пересечении строки с номером i и столбца с номером j нужно сложить число, записанное в $(j-1)$-ой клетке строки с номером i и число, расположенное в j-ой клетке $(i-1)$-строки. В каждой из затемненных клеток, где располагалась последняя буква «А» слова «олимпиада», указано число различных способов прочтения этого слова, при условии, что прочтение заканчивается в этой клет-

ке. Для получения ответа осталось сложить все числа, расположенные в выделенных клетках: $n = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$.

Ответ: $n = 93$.

Вариант № 2

1. Коля, Поля, Даня и Маня все вместе выучили 59 немецких слов, причем каждый выучил не менее двух слов. Коля и Поля вместе выучили 37 слов, но больше всех слов выучил Даня. Сколько слов выучила Маня?

Ответ: два слова.

2. Найти дробь вида $\frac{n}{37}$ наименее удаленную от дроби $\frac{23}{41}$ (n – целое).

Ответ: $\frac{21}{37}$.

3. Разность двух натуральных чисел в 5 раз меньше их суммы и в 24 раза меньше их произведения. Найти эти числа.

Ответ: 12, 8.

4. Маша пытается выложить на столе квадрат из одинаковых картонных прямоугольников размером 15×33. Сможет ли он сделать это? Предложите свой вариант построения такого квадрата. Какое наименьшее число прямоугольников для этого ему понадобится?

Ответ: 55 прямоугольников.

5. В прямоугольной таблице в определенном порядке размещены буквы слова «РОСАТОМ».

Р	О	С	А	Т	О	М
О	С	А	Т	О	М	Р
С	А	Т	О	М	Р	О
А	Т	О	М	Р	О	С
Т	О	М	Р	О	С	А

Нужно прочесть слово «РОСАТОМ», начиная с буквы «Р», расположенной в левом верхнем угле таблицы и заканчивая буквой «М». Разрешается переход от буквы к букве, расположенным в соседних

клетках таблицы. Найдите число различных способов прочтения слова «РОСАТОМ» по заданной таблице.

Ответ: $n = 57$.

Вариант № 3

1. Павел, Света, Костя и Катя бросали мяч в баскетбольную корзину и вместе попали 78 раз, причем каждый попал не менее трех бросков. Павел и Света вместе попали в корзину 49 раз, но больше всех забросил мяч в корзину Костя. Сколько удачных бросков сделала Катя?

Ответ: три броска.

2. Найти дробь вида $\frac{n}{61}$ наименее удаленную от дроби $\frac{29}{41}$ (n – целое).

Ответ: $\frac{43}{61}$.

3. Произведение двух натуральных чисел составляет 720% от их суммы и 3600% от их разности. Найти эти числа.

Ответ: 18, 12.

4. Коля пытается выложить на столе квадрат из одинаковых картонных прямоугольников размером 6×14. Сможет ли он сделать это? Предложите свой вариант построения такого квадрата. Какое наименьшее число прямоугольников для этого ему понадобится?

Ответ: 21 прямоугольник.

5. В прямоугольной таблице в определенном порядке размещены буквы слова «ПОБЕДА».

П	О	Б	Е	Д	А
О	Б	Е	Д	А	П
Б	Е	Д	А	П	0
Е	Д	А	П	О	Б
Д	А	П	О	Б	Е

Нужно прочесть слово «ПОБЕДА», начиная с буквы «П», расположенной в левом верхнем угле таблицы и заканчивая буквой «А». Разрешается переход от буквы к букве, расположенным в соседних

клетках таблицы. Найдите число различных способов прочтения слова «ПОБЕДА» по заданной таблице.

Ответ: $n = 31$.

Вариант № 4

1. Андрей, Люба, Альберт и Наташа играли в фантики и вместе собрали 73 фантика, причем каждый собрал не менее 4 фантиков. Андрей и Люба собрали 45 фантиков, но больше всех фантиков собрал Альберт. Сколько фантиков Наташа?
Ответ: четыре фантика.

2. Найти дробь вида $\frac{n}{71}$ наименее удаленную от дроби $\frac{57}{61}$ (n – целое).

Ответ: $\frac{66}{71}$.

3. Разность двух натуральных чисел составляет 20% от их суммы и в 72 раза меньше их произведения. Найти эти числа.

Ответ: 36, 24.

4. Даша пытается выложить на столе квадрат из одинаковых картонных прямоугольников размером 11×13. Сможет ли он сделать это? Предложите свой вариант построения такого квадрата. Какое наименьшее число прямоугольников для этого ему понадобится?

Ответ: 143 прямоугольника.

5. В прямоугольной таблице в определенном порядке размещены буквы слова «ПЕРЕМЕНА».

П	Е	Р	Е	М	Е	Н	А
Е	Р	Е	М	Е	Н	А	П
Р	Е	М	Е	Н	А	П	Е
Е	М	Е	Н	А	П	Е	Р
М	Е	Н	А	П	Е	Р	Е

Нужно прочесть слово «ПЕРЕМЕНА», начиная с буквы «П», расположенной в левом верхнем угле таблицы и заканчивая буквой «А». Разрешается переход от буквы к букве, расположенным в со-

седних клетках таблицы. Найдите число различных способов прочтения слова «ПЕРЕМЕНА» по заданной таблице.

Ответ: $n = 99$.

1.2. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 8 класс

Вариант № 1

1. Пусть $[x]$ и $\{x\}$ целая и дробная части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$. Найти x, если $2x + 3[x] - 5\{x\} = 4$.

2. План города N имеет форму квадрата, поделенного восьмью параллельными улицами с направлением «юг-север» (стрит) и восьмью параллельными улицами с направлением «запад-восток» (авеню) на 81 равных квартала, имеющих форму квадратов. Водитель намерен проехать с перекрестка, расположенного на пересечении авеню и стрит с номерами 1 до перекрестка при пересечении авеню и стрит с номерами 8, используя кратчайший путь. Сколькими различными маршрутами может воспользоваться водитель?

3. Представить число 80 в виде суммы двух простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что единица простым числом не является.

4. На листе бумаги написаны 12 последовательных целых чисел. После зачеркивания одного из них, сумма оставшихся чисел равняется 325. Какое число было вычеркнуто?

5. Имеются круг, радиуса 4 вырезанный из картона, линейка и циркуль. На листе бумаги постройте прямоугольник равновеликий по площади кругу.

Ответы и решения

1. Подставим $x = [x] + \{x\}$ в исходное уравнение:

$$2([x] + \{x\}) + 3[x] - 5\{x\} = 4 \text{ или } 5[x] - 3\{x\} = 4.$$

Выразим $\{x\}$ через $[x]$: $\{x\}=\dfrac{5[x]-4}{3}$. С учетом того, что $\{x\}\in[0;1)$, получаем двойное неравенство $0\le\dfrac{5[x]-4}{3}<1$. Решая это неравенство, находим $[x]\in\left[\dfrac{4}{5};\dfrac{7}{5}\right)$. В силу целочисленности $[x]$, получаем $[x]=1$, тогда $\{x\}=\dfrac{1}{3}$, а $x=\dfrac{4}{3}$.

Ответ: $x=\dfrac{4}{3}$.

2. Перекресток начала движения обозначим буквой A, а перекресток конца пути – через B. Путь из A в B кратчайший, если водитель не объезжает квартал или группу кварталов, совершая два правых (или левых) поворотов подряд. Все такие маршруты имеют одинаковую длину. В приведенной ниже таблице в каждой из 64 клеток, соответствующих всем перекресткам города, написано число различных возможных способов попадания на этот перекресток при прокладывании маршрута. Если a_{ij} число маршрутов, приводящих к перекрестку авеню с номером i и стрита с номером j, то $a_{ij}=a_{i,j-1}+a_{i-1,j}$.

A	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	8	36	120	330	792	1716	3432

Таким образом, на перекресток B (затемнение) можно попасть 3432 способами.

Ответ: $n=3432$.

3. Перебор всех простых чисел от 2 до 73 организуем в виде таблицы.

1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78

В таблице отмечены темным цветом составные числа от 4 до 78 (единица не является ни простым, ни составным числом) и 21 простых чисел. В следующих двух таблицах указаны пары чисел $(a;b)$, для которых $a+b=80$ и $a-$ простое число.

a	2	3	5	7	11	13	17	19	23
b	78	77	75	73	69	67	63	61	57

a	29	31	37	41	47	53	59	71	
b	51	49	43	39	33	27	21	9	

Во второй строке таблицы (b) выделены темным цветом составные числа. Таким образом, число 80 можно представить в виде суммы двух простых чисел четырьмя способами:

$$80=7+73, 80=13+67,\ 80=19+61,\ 80=37+43.$$

Ответ: $80=7+73, 80=13+67,\ 80=19+61,\ 80=37+43$; четыре способа.

4. Пусть $n, n+1, ..., n+k-1,\quad n+k, n+k+1, ..., n+11$ последовательные 12 целых чисел и зачеркивается число $n+k$, $k=0,1,2,...,11.$ Сумма чисел после зачеркивания равна

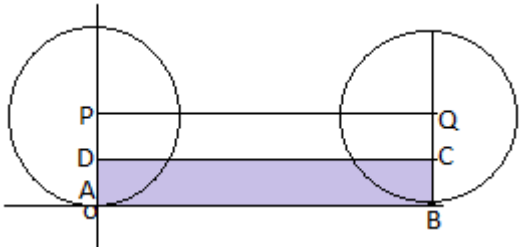
$$\frac{2n+11}{2}\cdot 12-(n+k)=325 \quad \text{или} \quad 11n+66-k=325.$$

Отсюда выразим $k=11n-259.$ С учетом условия $k\in[0;11]$, получим $0\le 11n-259\le 11$ или $\frac{259}{11}\le n\le\frac{270}{11}.$ В этом интервале

находится только одно целое число $n = 24$. Для него $k = 5$. Тогда зачеркнутое число $n + k = 29$.

Ответ: 29.

5. Построение. Нарисуем на плоскости с помощью циркуля и линейки две взаимно перпендикулярные прямые



и окружность радиуса R, касающейся горизонтальной прямой, с центром в точке P на вертикальной прямой. Наложим заданный круг на построенный так, чтобы их границы совпали, а отмеченная на окружности картонного круга точка A совпала с точкой O пересечения прямых. Совместив один край линейки с горизонтальной прямой, прокатим картонный круг по линейке на один оборот без скольжения. В этот момент точка A совпадет с точкой B горизонтальной оси, а центр круга займет положение точки Q (см рис). Далее картонный круг убирается. Построив с помощью циркуля и линейки перпендикуляр к горизонтальной прямой в точке B, отложим на нем отрезок BQ, по длине равный R. Соединив точки P и Q, построим прямоугольник $ABQP$. Разделив отрезки BQ и AP пополам, получим точки C и D. Прямоугольник $ABCD$ искомый.

Анализ. Длина стороны AB равна длине окружности, т.е. $2\pi R$, длина стороны BC равна $R/2$ по построению. Тогда площадь прямоугольника $ABCD$ равна πR^2, т.е. прямоугольник равновелик кругу.

Вариант № 2

1. Пусть $[x]$ и $\{x\}$ целая и дробная части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$. Найти x, если $3x - [x] + 4\{x\} = 4$.

Ответ: $x = -\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; \frac{9}{7}; 2.$

2. План города N имеет форму квадрата, поделенного шестью параллельными улицами с направлением «юг-север» (стрит) и шестью параллельными улицами с направлением «запад-восток» (авеню) на 49 равных квартала, имеющих форму квадратов. Водитель намерен проехать с перекрестка, расположенного на пересечении авеню и стрит с номерами 1 до перекрестка при пересечении авеню и стрит с номерами 6, используя кратчайший путь. Сколькими различными маршрутами может воспользоваться водитель?

Ответ: $n = 252.$

3. Представить число 72 в виде суммы двух простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что единица простым числом не является.

Ответ: 72=5+67, 72=11+61, 72 13+59, 72=19+53, 72=29+43, 72= 31+41; шесть способов.

4. На листе бумаги написаны 25 последовательных целых чисел. После зачеркивания одной из них, сумма оставшихся чисел равняется 700. Какое число было вычеркнуто?

Ответ: 25.

5. Имеются круг, радиуса 6 вырезанный из картона, линейка и циркуль. На листе бумаги постройте прямоугольник равновеликий по площади кругу.

Ответ: Построение.

Вариант № 3

1. Пусть $[x]$ и $\{x\}$ целая и дробная части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$. Найти x, если $5x - 3[x] + 3\{x\} = 10$.

Ответ: $x = \frac{11}{4}; \frac{7}{2}; \frac{17}{4}; 5.$

2. План города N имеет форму квадрата, поделенного семью параллельными улицами с направлением «юг-север» (стрит) и семью параллельными улицами с направлением «запад-восток» (авеню) на 64 равных квартала, имеющих форму квадратов. Водитель намерен проехать с перекрестка, расположенного на пересечении авеню и стрит с номерами 1 до перекрестка при пересечении авеню и стрит с номерами 7, используя кратчайший путь. Сколькими различными маршрутами может воспользоваться водитель?

Ответ: $n = 924.$

3. Представить число 70 в виде суммы двух простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что единица простым числом не является.

Ответ: 70=3+67, 70=11+59, 70= 17+53, 70=23+47, 70=29+41; пять способов.

4. На листе бумаги написаны 30 последовательных целых чисел. После зачеркивания одной из них, сумма оставшихся чисел равняется 1026. Какое число было вычеркнуто?

Ответ: 39.

5. Имеются круг, радиуса 8 вырезанный из картона, линейка и циркуль. На листе бумаги постройте прямоугольник равновеликий по площади кругу.

Ответ: Построение.

Вариант № 4

1. Пусть $[x]$ и $\{x\}$ целая и дробная части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$. Найти x, если $4x - 3[x] + 2\{x\} = 6$.

Ответ: $x = \frac{11}{6}; \frac{8}{3}; \frac{7}{2}; \frac{13}{3}; \frac{31}{6}; 6.$

2. План города N имеет форму квадрата, поделенного пятью параллельными улицами с направлением «юг-север» (стрит) и пятью параллельными улицами с направлением «запад-восток» (авеню) на 36 равных квартала, имеющих форму квадратов. Водитель намерен проехать с перекрестка, расположенного на пересечении авеню и стрит с номерами 1 до перекрестка при пересечении авеню и стрит с номерами 5, используя кратчайший путь. Сколькими различными маршрутами может воспользоваться водитель?

Ответ: $n = 70.$

3. Представить число 68 в виде суммы двух простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что единица простым числом не является.

Ответ: 68=7+61, 68=31+37; два способа.

4. На листе бумаги написаны 35 последовательных целых чисел. После зачеркивания одной из них, сумма оставшихся чисел равняется 1460. Какое число было вычеркнуто?

Ответ: $45.$

5. Имеются круг, радиуса 2 вырезанный из картона, линейка и циркуль. На листе бумаги постройте прямоугольник равновеликий по площади кругу.

Ответ: Построение.

1.3. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 9 класс

Вариант № 1

1. $[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое число не превосходящее x), $\{x\} = x - [x]$ – дробная части числа x. При каких a система $\begin{cases} 2x - [x] = 4a + 1, \\ 4[x] - 3\{x\} = 5a + 15, \end{cases}$ имеет решение? Найти такие x.

2. Один из попугаев всегда говорит правду, другой всегда врет, а третий – хитрец – иногда говорит правду, иногда врет. На вопрос: «Кто Кеша?» – они ответили: Гоша: – Лжец. Кеша: – Я хитрец! Рома: – Абсолютно честный попугай. Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

3. Для каких номеров n числа $a_n = 7n - 3$ делятся на 5, но не делятся на 3?

4. Представить число 43 в виде суммы трех простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что число 1 не считается простым.

5. Сумма оснований трапеции равна 4. Найти наибольшую возможную длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельного ее основаниям.

Ответы и решения

1. Обозначим $u = [x]$, $v = \{x\}$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} u + 2v = 4a + 1, \\ 4u - 3v = 5a + 15, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u = 2a + 3, \\ v = a - 1. \end{cases}$$

Так как $0 \le v < 1$, то $0 \le a - 1 < 1$. Отсюда находим $a \in [1; 2)$. Следовательно, $u = 2a + 3 \in [5; 7)$. В силу целочисленности u

получим $u=[x]=5$ и $u=[x]=6$. Если u=5, то a=1, v=0, x=5; если u=6, то $a=\frac{3}{2}$, $v=\frac{1}{2}$, $x=\frac{13}{2}$.

Ответ: 1) при $a=1, x=5$; 2) при $a=\frac{3}{2}, x=\frac{13}{2}$.

2. Так как Кеша сказал, что он хитрец, то он не может быть честным. Так как Рома сказал, что Кеша абсолютно честный попугай, то Рома тоже не может быть честным. Следовательно, правду сказал Гоша. Это означает, что Кеша лжец. Тогда Рома – хитрец.

Ответ: Кеша – лжец, Рома – хитрец.

3. Так как $a_n=7n-3\vdots 5$, то $7n-3=5k, k\in Z$. Получили линейное диофантово уравнение $7n-5k=3, k\in Z$. Имеем $k=\frac{7n-3}{5}=n+\frac{2n-3}{5}$. Обозначим $\frac{2n-3}{5}=l\in Z$. Выразим n через l: $n=\frac{5l+3}{2}=2l+1+\frac{l+1}{2}$. Теперь обозначим $\frac{l+1}{2}=t\in Z$ и выразим l и n через t: $l=2t-1$; $n=2(2t-1)+t=5t-1$. Мы получили $n=5t-1, t\in N$. Тогда $a_n=35t-10, t\in N$. Перепишем a_n в виде $a_n=36t-9-t-1, t\in N$. Следовательно, $a_n\vdots 3$ тогда и только тогда, когда $t+1\vdots 3$, то есть $t=3m-1, m\in N$. Условию задачи удовлетворяют номера $n=5t-1, t\neq 3m-1, t, m\in N$.

Ответ: $n=5t-1, t\neq 3m-1, t, m\in N$.

4. Запишем условие задачи: 43= a + b + c, где a, b и c – простые числа.

Выпишем простые числа от 2 до 43.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

Случай 1. a=2. Тогда b + c = 41. Если b = 2, то c = 39 – не простое число.

Случай 2. a>2. Выпишем a, 43-a, и простые числа b, c, для которых $43-a=b+c$.

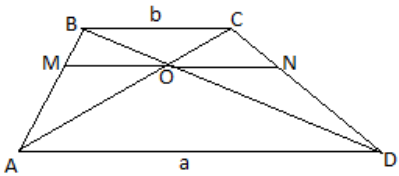
a	3	3	3	5	5	7	7	7	7	11	11	13	13	13
43- *a*	40	40	40	38	38	36	36	36	36	32	32	30	30	30
b	3	11	17	7	19	5	7	13	17	3	13	7	11	17
c	37	29	23	31	19	31	29	23	19	29	19	23	19	13

a	17	17	17	19	19	19	23	23	29	29	31	37
43-*a*	26	26	26	24	24	24	20	20	14	14	12	6
b	3	7	13	5	7	11	3	7	3	7	5	3
c	23	19	13	19	17	13	17	13	11	7	7	3

Различные тройки простых чисел, сумма которых равна 43:
3+3+37, 3+11+29, 3+17+23, 5+7+31, 5+19+19, 7+7+29, 7+13+23, 7+17+19, 11+13+19, 13+17+13.

Ответ: десять способов.

5. Обозначим



$AD = a,\ BC = b, \dfrac{b}{a} = k$.

Так как $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, то

$$\frac{OC}{AO} = \frac{OB}{DO} = \frac{b}{a} = k.$$

Отсюда получаем: $OC = k \cdot AO,\ \ AC = AO + OC = (1+k)AO.$

Так как $\triangle AOM \sim \triangle ACB$, то $\dfrac{MO}{b} = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{1}{1+k}$. Отсюда получаем: $MO = \dfrac{b}{1+k}$. Так как $\triangle OCN \sim \triangle ACD$, то $\dfrac{ON}{a} = \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{k}{1+k}$.

Отсюда находим: $ON = \dfrac{ka}{1+k}$. Тогда

$$MN = MO + ON = \frac{b}{1+k} + \frac{ka}{1+k} = \frac{b+ka}{1+k} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Используя известное неравенство $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, получим $MN \le \frac{a+b}{2}$. Равенство достигается при $a = b$.

Ответ: $MN_{\max} = 2$.

Вариант № 2

1. $[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое число не превосходящее x), $\{x\} = x - [x]$ – дробная части числа x. При каких a система $\begin{cases} 2x - 5\{x\} = 40 - 13a, \\ [x] + 2\{x\} = 4a - 15, \end{cases}$ имеет решение? Найти такие x.

Ответ: при $a = \frac{7}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$.

2. До царя дошла весть, что кто–то из трех богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри: Илья Муромец – Змея убил Добрыня Никитич. Добрыня Никитич: – Змея убил Алеша Попович. Алеша Попович: – Я убил змея. Известно, что только один богатырь сказал правду. Кто убил Змея?

Ответ: Добрыня Никитич.

3. Для каких номеров n числа $a_n = 3n + 2$ делятся на 4, но не делятся на 7?

Ответ: $n = 4t + 2, t \ge 0, t \ne 7m + 4, t \in Z, m \in Z$.

4. Представить число 39 в виде суммы трех простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что число 1 не считается простым.

Ответ: десять способов (3+5+31, 3+7+29, 3+13+23, 3+17+19, 5+5+29, 5+11+23, 5+17+17, 7+13+19, 11+11+17, 13+13+13).

5. Сумма оснований трапеции равна 6. Найти наибольшую возможную длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельного ее основаниям.

Ответ: $L_{\max} = 3$.

Вариант № 3

1. $[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое число не превосходящее x), $\{x\} = x - [x]$ – дробная части числа x. При каких a система $\begin{cases} 3x - 4[x] = 8a - 10, \\ 2[x] - 3\{x\} = 3a - 16, \end{cases}$ имеет решение? Найти такие x.

Ответ: 1) при $a = 2,\ x_1 = -\dfrac{10}{3}$; 2) при $a = \dfrac{21}{11},\ x_2 = -\dfrac{54}{11}$.

2. Четверо ребят – Алеша, Боря, Ваня и Гриша – соревновались в беге. На следующий день они заявили: Алеша: – Я не был ни первым, ни последним. Боря: – Я не был последним. Ваня: – Я был первым. Гриша: – Я был последним. Известно, что трое сказали правду, а один соврал. Кто был первым? Кто сказал неправду?

Ответ: Боря был первым, Ваня сказал неправду.

3. Для каких номеров n числа $a_n = 8n - 11$ делятся на 5, но не делятся на 13?

Ответ: $n = 5t + 2, t \geq 0, t \neq 13m - 5, t \in Z, m \in Z.$

4. Представить число 35 в виде суммы трех простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что число 1 не считается простым.

Ответ: восемь способов (2+2+31, 3+3+29, 3+13+19, 5+7+23, 5+11+19, 5+13+17, 7+11+17, 11+13+13).

5. Сумма оснований трапеции равна 8. Найти наибольшую возможную длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельного ее основаниям.

Ответ: $L_{\max} = 4.$

Вариант № 4

1. $[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое число не превосходящее x), $\{x\} = x - [x]$ – дробная части числа x. При каких a система $\begin{cases} 2x - 3[x] = 5 - 2a, \\ 2[x] - \{x\} = 7a - 1, \end{cases}$ имеет решение? Найти такие x.

Ответ: 1) при $a = -3,\ x_1 = -11$; 2) при $a = -\frac{11}{4},\ x_2 = -\frac{39}{4}$;

3) при $a = -\frac{5}{2},\ x_3 = -\frac{17}{2}$; 4) при $a = -\frac{9}{4},\ x_4 = -\frac{29}{4}$..

2. Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красной, синей и зеленой рубашках. Их туфли были тех же цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зеленые, а рубашка – нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?

Ответ: На Боме зеленая рубашка и синие туфли. На Биме красная рубашка и красные туфли.

3. Для каких номеров n числа $a_n = 5n + 1$ делятся на 7, но не делятся на 4?

Ответ: $n = 7t + 4, t \geq 0, t \neq 4m + 2, t \in Z, m \in Z$.

4. Представить число 33 в виде суммы трех простых чисел. Сколькими способами это можно сделать? Напоминаем, что число 1 не считается простым.

Ответ: восемь способов (3+7+23, 3+11+19, 3+13+17, 5+5+23, 5+11+17, 7+7+19, 7+13+13, 11+11+11).

5. Сумма оснований трапеции равна 16. Найти наибольшую возможную длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельного ее основаниям.

Ответ: $L_{\max} = 8$.

1.4. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 10 класс

Вариант № 1

1. Арифметическая прогрессия a_n такова, что ее разность не равна нулю, а a_{10}, a_{13} и a_{19} могут быть последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти отношение $a_{12} : a_{18}$.

2. Сколько решений имеет уравнение $\left[2x - x^2\right] + 2\{\cos 2\pi x\} = 0$? Укажите наименьшее и наибольшее их них. Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число не превосходящее a, $\{a\} = a - [a]$ – дробная часть числа a.

3. При каких a система $\begin{cases} x\cos a + y\sin a = 5\cos a + 2\sin a, \\ -3 \le x + 2y \le 7, \ -9 \le 3x - 4y \le 1, \end{cases}$ имеет единственное решение?

4. При каком наименьшим целом n все решения уравнения $x^3 - (5n-9)x^2 + \left(6n^2 - 31n - 106\right)x - 6(n-8)(n+2) = 0$ больше -1?

5. Средняя линия трапеции равна 4. Прямая, параллельная основаниям трапеции и делящая ее площадь пополам, пересекает боковые стороны в точках M и N. Найти наименьшую возможную длину отрезка MN.

Ответы и решения

1. Пусть $a_n = a_1 + d(n-1)$, где a_1 – первый член прогрессии, d – ее разность. Тогда $a_{10} = a_1 + 9d$, $a_{13} = a_1 + 12d$, $a_{19} = a_1 + 18d$. По свойству геометрической прогрессии имеем: $a_{10} \cdot a_{19} = a_{13}{}^2$ или $(a_1 + 9d)(a_1 + 18d) = (a_1 + 12d)^2$. Последнее уравнение приводится к виду: $18d^2 + 3a_1 d = 0$. Отсюда находим $a_1 = -6d$. Тогда

$$a_{12}:a_{18}=\frac{a_1+11d}{a_1+17d}=\frac{-6d+11d}{-6d+17d}=\frac{5}{11}.$$

Ответ: $a_{12}:a_{18}=5:11.$

2. Перепишем уравнение в виде $\left[2x-x^2\right]=-2\left\{\cos 2\pi x\right\}$. Поскольку $\left\{\cos 2\pi x\right\}\in\left[0;1\right)$, то $\left[2x-x^2\right]\in\left(-2;0\right]$. Следовательно, $\left[2x-x^2\right]=-1$ или $\left[2x-x^2\right]=0.$

Случай 1. $\begin{cases}\left[2x-x^2\right]=-1,\\ \left\{\cos 2\pi x\right\}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Сначала рассмотрим первое уравнение этой системы, а именно, $\left[2x-x^2\right]=-1.$ В силу определения целой части числа a имеем $-1\le 2x-x^2<0.$ Мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases}x^2-2x-1\le 0,\\ x(x-2)>0.\end{cases}$$

Первое неравенство этой системы имеет решения $x\in\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$, а второе – $x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. Решением системы является пересечение полученных множеств:

$$x\in\left[1-\sqrt{2};0\right)\cup\left(2;1+\sqrt{2}\right].$$

Теперь рассмотрим второе уравнение исходной системы, а именно, $\left\{\cos 2\pi x\right\}=\dfrac{1}{2}$. В силу определения дробной части числа a имеем $\cos 2\pi x=\dfrac{1}{2}+n, n\in Z$. Так как $\left|\cos 2\pi x\right|\le 1$, то при $n\le -2$ и $n\ge 1$ уравнение решений не имеет. При $n=-1$ уравнение принимает вид $\cos 2\pi x=-\dfrac{1}{2}$, а при $n=0$ $\cos 2\pi x=\dfrac{1}{2}$. Решения

этих двух уравнений можно записать в виде двух серий $x=\frac{1}{6}+\frac{k}{2}, k\in Z,$ и $x=-\frac{1}{6}+\frac{k}{2}, k\in Z.$

Решения первой серии $x=\frac{1}{6}+\frac{k}{2}$ попадают в интервал $\left[1-\sqrt{2};0\right)$ при $k=-1$ $\left(x_1=-\frac{1}{3}\right)$ и в интервал $\left(2;1+\sqrt{2}\right]$ при $k=4$ $\left(x_2=\frac{13}{6}\right)$. Решения второй серии $x=-\frac{1}{6}+\frac{k}{2}$ попадают в интервал $\left[1-\sqrt{2};0\right)$ при $k=0$ $\left(x_3=-\frac{1}{6}\right)$ и в интервал $\left(2;1+\sqrt{2}\right]$ при $k=5$ $\left(x_4=\frac{7}{3}\right)$.

Случай 2. $\begin{cases}\left[2x-x^2\right]=0,\\ \{\cos 2\pi x\}=0.\end{cases}$

В силу определения целой части числа a, перепишем уравнение $\left[2x-x^2\right]=0$ в виде $0\le 2x-x^2<1$ или

$$\begin{cases}x^2-2x+1>0,\\ x(x-2)\le 0.\end{cases}$$

Первое неравенство этой системы имеет решения $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, а второе – $x\in[0;2]$. Находим пересечение полученных множеств решений: $x\in[0;1)\cup(1;2]$.

В силу определения дробной части числа a, перепишем уравнение $\{\cos 2\pi x\}=0$ в виде $\cos 2\pi x=n, n\in Z.$ Так как $|\cos 2\pi x|\le 1,$ то при $n\le -2$ и $n\ge 2$ уравнение решений не имеет. При $n=-1,$ $n=0$ и $n=1$ получаем уравнения $\cos 2\pi x=-1,$ $\cos 2\pi x=0$ и $\cos 2\pi x=1,$ соответственно. Решения этих трех

уравнений можно записать в виде двух серий, а именно, $x=\frac{k}{2}, k\in Z,$ и $x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}.$

Решения первой серии $x=\frac{k}{2}, k\in Z,$ принадлежат $[0;1)\cup(1;2]$ при $k=0,1,3,4$ ($x_5=0,\ x_6=\frac{1}{2},\ x_7=\frac{3}{2},\ x_8=2$). Решения второй серии $x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}$ принадлежат $[0;1)\cup(1;2]$ при $k=0,1,2,3$ ($x_9=\frac{1}{4},\ x_{10}=\frac{3}{4},\ x_{11}=\frac{5}{4},\ x_{12}=\frac{7}{4}$).

В результате мы получили 12 решений: $x_1=-\frac{1}{3},\quad x_2=\frac{13}{6},$ $x_3=-\frac{1}{6},\quad x_4=\frac{7}{3},\quad x_5=0,\quad x_6=\frac{1}{2},\quad x_7=\frac{3}{2},\quad x_8=2,\quad x_9=\frac{1}{4},$ $x_{10}=\frac{3}{4},\ x_{11}=\frac{5}{4},\quad x_{12}=\frac{7}{4}.$ Наименьшим решением является $x_1=-\frac{1}{3}$, а наибольшим – $x_4=\frac{7}{3}.$

Ответ: Всего 12 решений, $x_{\min}=-\frac{1}{3}, x_{\max}=\frac{7}{3}.$

3. Заметим, что неравенства $-3\le x+2y\le 7,\ -9\le 3x-4y\le 1,$ задают область на плоскости $Oxy,$ ограниченную параллелограммом с сторонами $y=\frac{-x-3}{2},\quad y=\frac{-x+7}{2},\quad y=\frac{3x+9}{4}$ и $y=\frac{3x-1}{4}.$ Вершинами параллелограмма являются точки пересечения записанных выше прямых. Обозначим через $A(x;y)$ – точку пересечения прямых $y=\frac{-x-3}{2}$ и $y=\frac{3x-1}{4},$ через $B(x;y)$ –

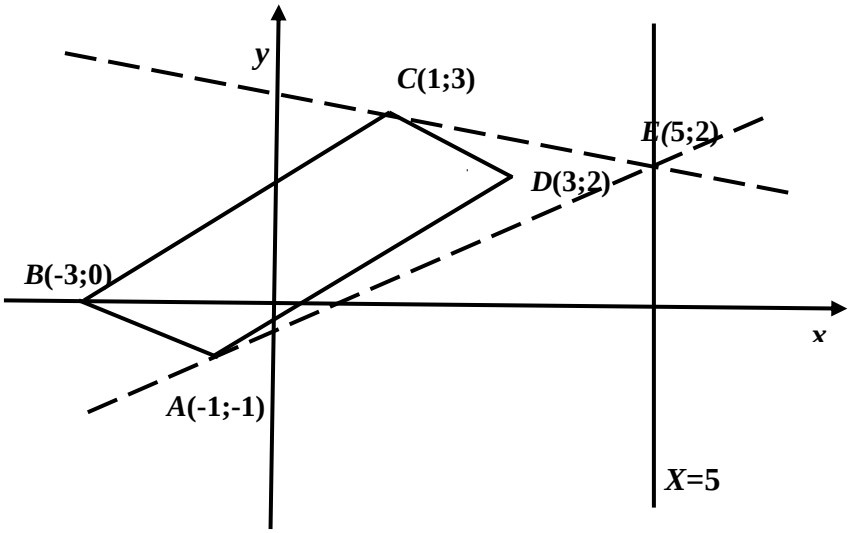
точку пересечения прямых $y=\dfrac{-x-3}{2}$ и $y=\dfrac{3x+9}{4}$, через $C(x;y)$ – точку пересечения прямых $y=\dfrac{-x+7}{2}$ и $y=\dfrac{3x+9}{4}$, через $D(x;y)$ – точку пересечения прямых $y=\dfrac{-x+7}{2}$ и $y=\dfrac{3x-1}{4}$.

Для нахождения координат вершины $A(x;y)$ имеем систему:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-x-3}{2}, \\ y=\dfrac{3x-1}{4}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+2y+3=0, \\ 3x-4y-1=0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2 и сложим с вторым уравнением: $7x+7=0$. Отсюда находим $x=-1$. Подставив $x=-1$ в первое уравнение, получим $y=-1$. В результате имеем $A(-1;-1)$.

Координаты вершин B, C и D находятся аналогично. После решения соответствующих систем получим $B(-3;0)$, $C(1;3)$, $D(3;2)$.



Уравнение $x\cos a + y\sin a = 5\cos a + 2\sin a$ задает прямую.

Случай 1. $\sin a = 0$ или $a = \pi k$. Имеем x=5 – решений нет.

Случай 2. $\sin a \neq 0$. Имеем $y = \operatorname{ctg} a(5-x)+2$. Это пучок прямых, проходящих через точку $E(5;2)$ и угловым коэффициентом $\operatorname{ctg} a$. Единственное решение получаем, когда прямая проходит через точку $C(1;3)$ или точку $A(-1;-1)$:

$$\left[\begin{array}{l} 3 = \operatorname{ctg} a(5-1)+2, \\ -1 = \operatorname{ctg} a(5+1)+2, \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} a = \dfrac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg} a = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Отсюда находим:

$$\left[\begin{array}{l} a = arctg\,4 + \pi k, k \in Z, \\ a = -arctg\,2 + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $a_1 = arctg\,4 + \pi k,\ a_2 = -arctg\,2 + \pi k,\ k \in Z.$

4. Перепишем уравнение в виде

$$x^3 - (5n-9)x^2 + (6n^2 - 31n - 106)x - 6n^2 + 36n + 96 = 0.$$

Заметим, что $x_1 = 1 > -1$ является его решением при всех n (сумма коэффициентов многочлена в левой части уравнения равна нулю для всех n). Разделим уравнение на $x-1$:

$$x^2 - 5(n-2)x + 6(n^2 - 6n - 16) = 0.$$

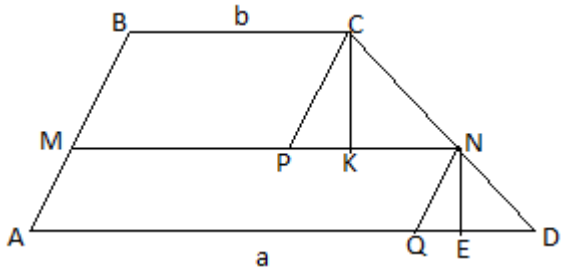
Это уравнение имеет решения: $x_2 = 3(n+2),\ x_3 = 2(n-8)$. Найдем, когда эти решения больше -1:

$$\begin{cases} 3(n+2) > -1, \\ 2(n-8) > -1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n > -\dfrac{7}{3}, n \in Z, \\ n > \dfrac{15}{2}, n \in Z. \end{cases}$$

Отсюда получаем $n \geq \dfrac{15}{2}$. Так как n целое, то $n \geq 8, n \in Z$.

Ответ: $n_{\min} = 8$.

5. Введем обозначения: $AD = a,\ BC = b,\ CK = H,\ NE = h -$ высоты треугольников NCP и $DNQ,\ \ MN = x.$



По условию задачи $S_{AMND} = S_{MBCN}$. Следовательно,

$$\frac{x+b}{2}H = \frac{a+x}{2}h \text{ или } \frac{H}{h} = \frac{a+x}{x+b}.$$

Из подобия $\triangle NCP$ и $\triangle DNQ$ имеем $\frac{H}{h} = \frac{x-b}{a-x}$. В результате получаем уравнение

$$\frac{a+x}{x+b} = \frac{x-b}{a-x}.$$

Отсюда находим

$$a^2 - x^2 = x^2 - b^2 \text{ или } x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Так как $a + b = 8,$ то

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + (8-a)^2}{2}} = \sqrt{a^2 - 16a + 32} = \sqrt{(a-4)^2 + 16}.$$

Величина x принимает минимальное значение при $a = 4.$ Это значение равно 4. Заметим, что при $a = 4$ из условия $a + b = 8$ получаем, что $b = 4,$ то есть стороны параллельных оснований имеют одинаковую длину. Это означает, что в этом случае трапеция вырождается в параллелограмм.

Ответ: $MN_{\min} = 4.$

Вариант № 2

1. Арифметическая прогрессия a_n такова, что ее разность не равна нулю, а a_{15}, a_{18} и a_{25} могут быть последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти отношение $a_{17} : a_{21}$.

Ответ: $a_{17} : a_{21} = 17 : 33.$

2. Сколько решений имеет уравнение $\left[x^2 - 4x\right] - 2\{\sin 3\pi x\} = 0$? Укажите наименьшее и наибольшее их них. Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число не превосходящее a, $\{a\} = a - [a]$ – дробная часть числа a, $\sqrt{5} \approx 2,23, \sqrt{6} \approx 2,45$.

Ответ: Всего 8 решений, $x_{\min} = -\dfrac{7}{18}, x_{\max} = \dfrac{79}{18}$.

3. При каких a система $\begin{cases} x\cos a + y\sin a = 7\cos a + 2\sin a, \\ -2 \le 2x - 3y \le 5, \ 5 \le x + 2y \le 13, \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $a \in \left[\pi k; \pi(k+1) - arctg\dfrac{8}{3}\right], k \in Z.$

4. При каком наибольшим целом n все решения уравнения $x^3 + (2n - 21)x^2 - \left(3n^2 + 4n - 83\right)x + 3(5 - n)(n + 7) = 0$ больше -3?

Ответ: $n_{\max} = 5.$

5. Сумма длин оснований трапеции равна 16. Прямая, параллельная основаниям трапеции и делящая ее площадь пополам, пересекает боковые стороны в точках M и N. Найти наименьшую возможную длину отрезка MN.

Ответ: $MN_{\min} = 8.$

Вариант № 3

1. Арифметическая прогрессия a_n такова, что ее разность не равна нулю, а a_7, a_{15} и a_{27} могут быть последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти отношение $a_{21} : a_{37}$.

Ответ: $a_{21} : a_{37} = 15 : 23$

2. Сколько решений имеет уравнение $\left[x^2\right] - 2\{\sin 4\pi x\} = 0$? Укажите наименьшее и наибольшее их них. Здесь $[a]-$ целая часть числа $a-$ наибольшее целое число не превосходящее a, $\{a\} = a - [a]-$ дробная часть числа a, $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Ответ: Всего 21 решение, $x_{\min} = -\dfrac{31}{24}, x_{\max} = \dfrac{31}{24}$..

3. При каких a система $\begin{cases} x\cos a + y\sin a = 2\cos a - 2\sin a, \\ -1 \le x - 2y \le 3, \ -5 \le x + 2y \le -1, \end{cases}$ не имеет решений?

Ответ: $a \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{5\pi}{4} + \pi k\right), k \in Z.$

4. При каком наименьшим целом n хотя бы одно решение уравнения $x^3 - (5n-9)x^2 + \left(6n^2 - 31n - 106\right)x - 6(n-8)(n+2) = 0$ больше 2?

Ответ: $n_{\min} = -1.$

5. Сумма длин оснований трапеции равна 8. Прямая, параллельная основаниям трапеции и делящая ее площадь пополам, пересекает боковые стороны в точках M и N. Найти наименьшую возможную длину отрезка MN.

Ответ: $MN_{\min} = 4.$

Вариант № 4

1. Арифметическая прогрессия a_n такова, что ее разность не равна нулю, а a_9, a_{17} и a_{26} могут быть последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти отношение $a_{13} : a_{18}$.

Ответ: $a_{13} : a_{18} = 68 : 73.$

2. Сколько решений имеет уравнение $\left[1 - x^2\right] + 2\left\{\cos 3\pi x\right\} = 0$? Укажите наименьшее и наибольшее их них. Здесь $\left[a\right]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число не превосходящее a, $\left\{a\right\} = a - \left[a\right]$ – дробная часть числа a, $\sqrt{2} \approx 1{,}41.$

Ответ: Всего 16 решений, $x_{\min} = -\dfrac{11}{9}, x_{\max} = \dfrac{11}{9}.$

3. При каких a система $\begin{cases} x\cos a + y\sin a = \cos a - \sin a, \\ -3 \le x - 2y \le 1, \ -7 \le x + 2y \le 5, \end{cases}$ имеет решение $x \ge 0$ и $y \ge 0$?

Ответ: $a \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z.$

4. При каком наибольшим целом n два решения уравнения $x^3 - \left(n+9\right)x^2 + \left(2n^2 - 3n - 34\right)x + 2(n-4)(n+3) = 0$ больше 2?

Ответ: $n_{\max} = 7.$

5. Сумма длин оснований трапеции не меньше 12. Прямая, параллельная основаниям трапеции и делящая ее площадь пополам, пересекает боковые стороны в точках M и N. Найти наименьшую возможную длину отрезка MN.

Ответ: $MN_{\min} = 6.$

1.5. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 11 класс

Вариант № 1

1. Через $\{x\}$ и $[x]$ обозначены дробная и целая части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$. Найти x, для которых

$$4x^2 - 5[x] + 8\{x\} = 19.$$

2. Найти целые n, при которых выражение

$$\frac{1}{12}\left(8\sin\frac{\pi n}{10} - \sin\frac{3\pi n}{10} + 4\cos\frac{\pi n}{5} + 1\right)$$

принимает целые значения.

3. На плоскости расположены 8 прямых, из которых 3 параллельны, а любые две из оставшихся пяти – пересекаются. Рассматриваются все треугольники со сторонами, лежащими на данных прямых. Какое наибольшее и наименьшее число таких треугольников может быть обнаружено?

4. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0;6]$. Найти вероятность того, что неравенство

$$x^2 + (2\xi + 1)x + 3 - \xi \le 0$$

справедливо для всех $x \in [-2;-1]$.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (x - 7\cos a)^2 + (y - 7\sin a)^2 = 1, \\ |x| + |y| = 8, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В треугольной пирамиде $SABC$ угол ASB при вершине S равен 30^0, а боковое ребро SC наклонено к плоскости грани ASB под углом 45^0. Сумма длин боковых ребер пирамиды равна 9. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

Ответы и решения

1. Подставим $x=[x]+\{x\}$ в исходное уравнение

$$4([x]+\{x\})^2-5[x]+8\{x\}=19.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$4\{x\}^2+8([x]+1)\{x\}+4[x]^2-5[x]-19=0 \qquad (*)$$

Если x искомый, то квадратный трехчлен

$$f(t)=4t^2+8([x]+1)t+4[x]^2-5[x]-19$$

имеет корни $t=\{x\}$ на промежутке $[0;1)$.

Случай 1. Имеется один корень на $[0;1)$:

$$\begin{cases} f(0)=4[x]^2-5[x]-19, \\ f(1)=4[x]^2+3[x]-7\neq 0, \\ f(0)\cdot f(1)\leq 0, \end{cases}$$

или $\begin{cases} ([x]-t_1)([x]-t_2)([x]-1)(4[x]+7)\leq 0, \\ [x]\neq 1, t_1=\dfrac{-5-\sqrt{329}}{8}\approx -1,6, t_2=\dfrac{-5+\sqrt{329}}{8}\approx 2,9. \end{cases}$

Решая неравенство методом интервалов, получим $[x]\in\left(-\dfrac{7}{4};t_1\right]\cup(1;t_2]$. С учетом целочисленности $[x]$, найдем единственное возможное значение целой части числа x: $[x]=2$. Подставим $[x]=2$ в (*) для определения $t=\{x\}$:

$$4t^2+24t-13=0.$$

Это уравнение имеет корни $t=\frac{1}{2}$ и $t=-\frac{13}{2}$. С учетом того, что $\{x\}\in[0;1)$, имеем $\{x\}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

Случай 2. Имеется два корня на $[0;1)$. Необходимо, чтобы абсцисса вершины параболы $f(t)$ принадлежала интервалу $(0,1)$, т.е. $t_в=-[x]-1\in(0,1)$ или $[x]\in(-2;-1)$. Целых чисел на указанном интервале нет, следовательно, случай 2 не реализуется.

Ответ: $x=\frac{5}{2}$.

2. Обозначим $t=\sin\frac{\pi n}{10}\in[-1;1]$ и перепишем исходное выражение в виде:

$$\frac{1}{12}\left(8\sin\frac{\pi n}{10}-\sin\frac{3\pi n}{10}+4\cos\frac{\pi n}{5}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\left(8t-(3t-4t^3)+4(1-2t^2)+1\right)=\frac{1}{12}\left(4t^3-8t^2+5t+5\right).$$

Введем функцию $f(t)=\frac{1}{12}\left(4t^3-8t^2+5t+5\right)$. Проведем исследование функции $f(t)$ на отрезке $[-1;1]$. Вычислим $f'(t)$:

$$f'(t)=\frac{1}{12}(12t^2-16t+5)=\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{5}{6}\right).$$

Так как при $t<\frac{1}{2}$ и $t>\frac{5}{6}$ производная $f'(t)>0$, а при $t\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right)$ производная $f'(t)<0$, то в точке $t=1/2$ функция $f(t)$ имеет локальный максимум $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, а в точке $t=\frac{5}{6}$

функция $f(t)$ имеет локальный минимум $f\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{65}{216}$. Найдем значение функции $f(t)$ на концах отрезка $[-1;1]$: $f(-1)=-1$, $f(1)=\frac{1}{2}$. В результате получаем область значений функции $f(t)$: $E_f=\left[-1;\frac{1}{2}\right]$. Ей принадлежат два целых числа $y=-1$ и $y=0$.

Случай 1. $y=-1$. Имеем уравнение $f(t)=-1$ или $\frac{1}{12}\left(4t^3-8t^2+5t+5\right)=-1$. После упрощения получаем уравнение:

$$4t^3-8t^2+5t+17=0.$$

Заметив, что $t=-1$ корень этого уравнения (выше мы получили, что $f(-1)=-1$), перепишем его в виде $(t+1)\left(4t^2-12t+17\right)=0$. Так как выражение $4t^2-12t+17$ не обращается в 0 ни при каких значениях t, то уравнение $f(t)=-1$ имеет единственное решение, а именно, $t=-1$. Тогда $\sin\frac{\pi n}{10}=-1$. Отсюда находим:

$$\frac{\pi n}{10}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,\quad \text{или } n=20k-5,\ k\in Z.$$

Случай 2. $y=0$. Имеем уравнение $f(t)=0$ или $\frac{1}{12}\left(4t^3-8t^2+5t+5\right)=0$. Решим уравнение:

$$4t^3-8t^2+5t+5=0.$$

Подобрав рациональный корень этого уравнения $t=-\frac{1}{2}$ (целые и рациональные корни мы подбираем из множества чисел $\pm1;\pm5;\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{4};\pm\frac{5}{2};\pm\frac{5}{4}$), перепишем его в виде $(2t+1)(2t^2-5t+5)=0$. Так как выражение $2t^2-5t+5$ не обра-

щается в 0 ни при каких значениях t, то уравнение $f(t)=0$ имеет единственное решение, а именно, $t=-\frac{1}{2}$. Тогда $\sin\frac{\pi n}{10}=-\frac{1}{2}$. Отсюда находим:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi n}{10}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z,\\ \frac{\pi n}{10}=\frac{7\pi}{6}+2\pi k, k\in Z,\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{ll}3n-60k=-5,\ k\in Z, & (*)\\ 3n-60k=7, k\in Z. & (**)\end{array}\right.$$

Уравнения (*) и (**) решений в целых числах не имеют, поскольку их правые части не делятся на 3.

Ответ: $n=20k-5, k\in Z.$

3. Введем обозначения: пусть P – это множество параллельных прямых, а $p_k, k=1,2,...,m-$ любая прямая из множества P; Q – это множество не параллельных прямых, а $q_j, j=1,2,...,n-$ любая прямая из Q.

Наибольшее возможное число треугольников связано с таким расположением прямых из множества Q, при котором ни какие три из них не проходят через одну точку (наибольшее количество вершин). Тогда число треугольников, не имеющих вершин на прямых из множества P равно C_m^3. Число треугольников, одна сторона которых лежит на прямой из множества P равно $n\cdot C_m^2$. Двух сторон треугольника, лежащих на двух прямых из множества P, не бывает по причине их параллельности. Таким образом,

$$N_{\max}=C_n^3+mC_n^2=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+m\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{6}\left(n+3m-2\right).$$

Наименьшее возможное число треугольников связано с таким расположением прямых из множества Q, при котором все прямые q_j проходят через одну точку A. Если A не принадлежит ни одной из прямых $p_k, k=1,2,...,m$, то число треугольников равно

$N_1 = mC_n^2$. Если $A \in p_k$, то число искомых треугольников равно $N_2 = (m-1)C_n^2$. Таким образом,

$$N_{\min} = (m-1)C_n^2 = \frac{(m-1)n(n-1)}{2}.$$

В нашем случае $m = 3, n = 5,$ и, следовательно, $N_{\max} = 40$, а $N_{\min} = 20.$

Ответ: $N_{\max} = 40$, $N_{\min} = 20.$

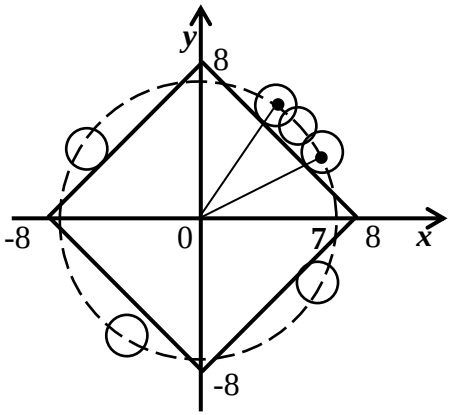
4. Неравенство $f(x) = x^2 + (2\xi + 1)x + 3 - \xi \le 0$ справедливо на отрезке $[-2; -1]$, если выполнены условия

$$\begin{cases} f(-1) \le 0, \\ f(-2) \le 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 1 - (2\xi + 1) + 3 - \xi \le 0, \\ 1 - 2(2\xi + 1) + 3 - \xi \le 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} \xi \ge 1, \\ \xi \ge 2/5. \end{cases}$$

Отсюда находим $\xi \ge 1$. Таким образом, событие A реализуется, если $\xi \in [1; 6]$, и поэтому $P(A) = \frac{5}{6}.$

Ответ: $P(A) = \frac{5}{6}.$

5. Множество точек на плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют первому уравнению системы, лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке $O(7\cos a; 7\sin a)$. При изменении a центр движется по окружности радиуса 7 с центром в начале координат. Множество точек на плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют второму уравнению си-



стемы, являются границей квадрата (см. рисунок). Система будет иметь единственно решение в случае, когда окружность коснется одной из сторон квадрата. Рассмотрим для определенности сторону квадрата $y = 8 - x, x \in [0;1]$. Чтобы найти a, при котором окружность касается прямой $y = 8 - x$, подставим $y = 8 - x$ в первое уравнение и потребуем, чтобы полученное квадратное уравнение имело единственное решение. Имеем:

$$(x - 7\cos a)^2 + (8 - x - 7\sin a)^2 = 1.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$x^2 - (8 + 7\cos a - 7\sin a)x + 56 - 56\sin a = 0.$$

Вычислим дискриминант этого уравнения и приравняем его нулю:

$$D(a) = 112(\cos a + \sin a) - 98\sin a\cos a - 111 = 0.$$

Чтобы решить последнее уравнение введем новую переменную $t = \sin a + \cos a$. С учетом того, что $\sin a\cos a = \frac{t^2 - 1}{2}$, получим:

$$49t^2 - 112t + 62 = 0.$$

Найдем корни последнего уравнения: $t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{2}}{7}$. В результате получаем уравнения $\sin a + \cos a = \frac{8 \pm \sqrt{2}}{7}$. Решим эти уравнения методом введения вспомогательного аргумента:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin a + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos a = \frac{8 \pm \sqrt{2}}{7\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2} \pm 1}{7}.$$

Отсюда получаем четыре серии решений:

$$a = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2} + 1}{7}\right) - \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad a = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2} + 1}{7}\right) + 2\pi k;$$

$$a = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2} - 1}{7}\right) - \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad a = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2} - 1}{7}\right) + 2\pi k,$$

$k \in Z$.

Условию касания выбранной нами стороны квадрата удовлетворяют решения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, а именно,

$$a=\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}+1}{7}\right)-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ a=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}+1}{7}\right)+2\pi k, k\in Z.$$

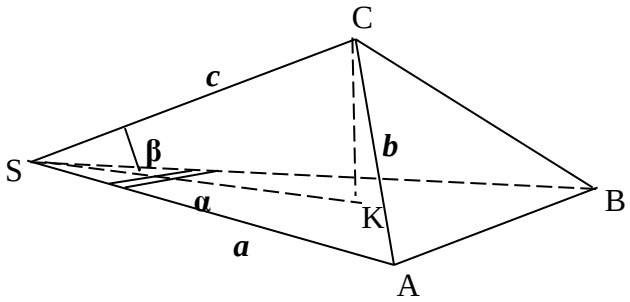
Вследствие симметрии другие решения исходной системы получаются из полученных сдвигом на $\frac{\pi n}{2}$. Все решения можно объединить в две серии:

$$a=\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}+1}{7}\right)-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\quad a=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}+1}{7}\right)+\frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $a=\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}+1}{7}\right)-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; n\in Z,$

$$a=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}+1}{7}\right)+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

6. Введем обозначения: $SA=a,\quad SB=b,\ SC=c,\ CK=h,$ $\measuredangle ASB=\alpha,\ \measuredangle CSK=\beta,$ где $CK-$перпендикуляр на грань ASB.



Тогда $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{SAB}\cdot h=\frac{1}{6}ab\sin\alpha\cdot c\sin\beta=\frac{1}{6}abc\sin\alpha\sin\beta.$

Так как $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ фиксированы, то объем пирамиды будет максимальным при максимальном значении произведения abc.

Рассмотрим известное неравенство, связывающее среднее геометрическое и среднее арифметическое трех чисел

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3},$$

в котором равенство $\sqrt[3]{abc} = \frac{a+b+c}{3}$ достигается при $a=b=c$. Применительно к нашему случаю получаем, что

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Так как равенство достигается при $a=b=c$, а $a+b+c=9$, то максимальном значении произведения abc равно 27 при $a=b=c=3$. Тогда наибольшее значение объема пирамиды равно

$$\frac{27}{6}\sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{9\sqrt{2}}{8}.$$

Ответ: $V_{\max} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$.

Вариант № 2

1. Через $\{x\}$ и $[x]$ обозначены дробная и целая части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$. Найти x, для которых

$$x^2 - 6[x] - 10\{x\} + 8 = 0.$$

Ответ: $x = 2; 4; 5-\sqrt{13}; 5-\sqrt{17}$.

2. Найти целые n, при которых выражение

$$\frac{1}{12}\left(\cos\frac{\pi n}{2} + 4\cos\frac{\pi n}{3} + 8\cos\frac{\pi n}{6} - 1\right)$$

принимает целые значения.

Ответ: 1) $n = 12k, k \in Z$; 2) $n = 12k \pm 2, k \in Z$.

3. На плоскости расположены 10 прямых, из которых 4 параллельны, а любые две из оставшихся шести – пересекаются. Рассматриваются все треугольники со сторонами, лежащими на данных прямых. Какое наибольшее и наименьшее число таких треугольников может быть
обнаружено?

Ответ: 1) $N_{\max} = 80$; 2) $N_{\min} = 45$.

4. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1;7]$. Найти вероятность того, что неравенство

$$x^2 + (\xi - 2)x - 8 - 2\xi > 0$$

справедливо для хотя бы одного $x \in [-2;3]$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{3}{8}$.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (x - 9\cos a)^2 + (y - 9\sin a)^2 = 1, \\ |x| + |y| = 10, \end{cases}$$

имеет четыре решения?

Ответ: $a \in \left(\arcsin\dfrac{5\sqrt{2}-1}{9} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}; \dfrac{\pi}{4} - \arcsin\dfrac{5\sqrt{2}-1}{9} + \dfrac{\pi k}{2} \right)$,

$$k \in Z, a \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

6. В треугольной пирамиде $SABC$ угол ASB при вершине S равен 60^0, а боковое ребро SC наклонено к плоскости грани ASB под углом 30^0. Сумма длин боковых ребер пирамиды равна 6. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

Ответ: $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Вариант № 3

1. Через $\{x\}$ и $[x]$ обозначены дробная и целая части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$. Найти x, для которых

$$2x^2 - 5[x] - 9\{x\} + 5 = 0.$$

Ответ: $x = \frac{3}{2}; \frac{9-\sqrt{41}}{4}$.

2. Найти целые n, при которых выражение

$$\frac{1}{30}\left(2\sin\frac{\pi n}{6} - 18\sin\frac{\pi n}{18} - 9\cos\frac{\pi n}{9} + 9\right)$$

принимает целые значения.

Ответ: $n = 18k, \quad k \in Z.$

3. На плоскости расположены 9 прямых, из которых 2 параллельны, а любые две из оставшихся семи – пересекаются. Рассматриваются все треугольники со сторонами, лежащими на данных прямых. Какое наибольшее и наименьшее число таких треугольников может быть обнаружено?

Ответ: 1) $N_{\max} = 77$; 2) $N_{\min} = 21$.

4. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-3;4]$. Найти вероятность того, что неравенство

$$x^2 - (3\xi - 2)x - 11 - \xi \le 0$$

справедливо для всех $x \in [-3;1]$.

Ответ: $P(A) = \frac{3}{7}$.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (x - 8\cos a)^2 + (y - 8\sin a)^2 = 1, \\ |x| + |y| = 9, \end{cases}$$

имеет три решения?

Ответ: $a=\pm\left(\arcsin\frac{9\sqrt{2}-2}{16}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi k}{2},\ a=\frac{\pi k}{2}, k\in Z.$

6. В треугольной пирамиде $SABC$ угол ASB при вершине S равен 30^0, а боковое ребро SC наклонено к плоскости грани ASB под углом 30^0. Сумма длин боковых ребер пирамиды равна 12. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

Ответ: $V_{\max}=\frac{8}{3}.$

Вариант № 4

1. Через $\{x\}$ и $[x]$ обозначены дробная и целая части числа x. Целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\}=x-[x]$. Найти x, для которых

$$4x^2+5[x]+3\{x\}-1=0.$$

Ответ: $x=\frac{1}{4};\frac{-3-\sqrt{89}}{8}.$

2. Найти целые n, при которых выражение

$$\frac{1}{10}\left(\cos\frac{3\pi n}{8}+4\cos\frac{\pi n}{8}-2\cos\frac{\pi n}{4}-3\right)$$

принимает целые значения.

Ответ: $n=16k+8,\ n=16k,\ k\in Z.$

3. На плоскости расположены 12 прямых, из которых 5 параллельны, а любые две из оставшихся семи – пересекаются. Рассматриваются все треугольники со сторонами, лежащими на данных прямых. Какое наибольшее и наименьшее число таких треугольников может быть
обнаружено?

Ответ: $P(A)=\frac{3}{5}.$

4. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-40;0]$. Найти вероятность того, что неравенство

$$x^2-(\xi+23)x+2+\xi>0$$

справедливо для хотя бы одного $x\in[-4;2]$.

Ответ: $a\in\left(\arcsin\frac{6\sqrt{2}+1}{11}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{6\sqrt{2}+1}{11}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k\in Z$.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases}(x-11\cos a)^2+(y-11\sin a)^2=1,\\ |x|+|y|=12,\end{cases}$$

не имеет решений?

6. В треугольной пирамиде $SABC$ угол ASB при вершине S равен 60^0, а боковое ребро SC наклонено к плоскости грани ASB под углом 45^0. Сумма длин боковых ребер пирамиды равна 3. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

Ответ: $V_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{24}$.

1.6. Очный отборочный тур в регионах, 11 класс

Вариант № 1

1. Найти все x, удовлетворяющие неравенству

$$n^2x^2-(2n^2+n)x+n^2+n-6\le 0$$

при любых натуральных n.

2. Решить уравнение

$$\left(\cos\frac{2x}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}\right)^2+\left(\sin\frac{2x}{3}-\sin\frac{4\pi}{9}\right)^2=0.$$

3. Найти x и y, для которых

$$\begin{cases} x-2y+[x]+3\{x\}-\{y\}+3[y]=2,5, \\ 2x+y-[x]+2\{x\}+3\{y\}-4[y]=12. \end{cases}$$

где $[x],[y]$ и $\{x\},\{y\}$ – целая и дробная части чисел x и y. Целая часть числа a – это наибольшее целое число, не превосходящее a, а $\{a\}=a-[a]$.

4. Найти вероятность того, что случайно взятое на отрезке $[0;5]$ число x является решением уравнения

$$\sin\left(x+|x-\pi|\right)+2\sin^2\left(x-|x|\right)=0\ .$$

5. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x\sin a-y\cos a=2\sin a-\cos a \\ x-3y+13=0 \end{cases}$$

имеет решение $(x;y)$ в квадрате $5\le x\le 9,\ 3\le y\le 7$?

6. На ребрах трехгранного угла с вершиной в точке S расположены точки M, N и K такие, что $SM^2+SN^2+SK^2\le 12$. Найти площадь треугольника SMN, если известно, что угол MSN равен 30^0, а объем пирамиды $SMNK$ максимально возможный.

Ответы и решения

1. Корнями квадратного трехчлена $n^2x^2-(2n^2+n)x+n^2+n-6$ являются $x_1=1-\dfrac{2}{n}$, $x_2=1+\dfrac{3}{n}$. Разложим левую часть неравенства на множители:

$$n^2\left(x-\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)\left(x-\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)\le 0.$$

Решая неравенство методом интервалов, получим $x \in \left[1-\frac{2}{n};1+\frac{3}{n}\right]$. Только $x=1$ принадлежит этому отрезку при любых *n*.

Ответ: $x=1$.

2. Уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos\frac{2x}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}=0, \\ \sin\frac{2x}{3}-\sin\frac{4\pi}{9}=0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение этой системы. Перепишем его в виде $\cos\frac{2x}{5}=\cos\frac{2\pi}{15}$. Это уравнение имеет решения:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2x}{5}=\frac{2\pi}{15}+2\pi k, k\in Z, \\ \frac{2x}{5}=-\frac{2\pi}{15}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Отсюда находим:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{3}+5\pi k, k\in Z, \\ x_2=-\frac{\pi}{3}+5\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Теперь рассмотрим второе уравнение системы. Перепишем его в виде $\sin\frac{2x}{3}=\sin\frac{4\pi}{9}$. Оно имеет решения:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2x}{3}=\frac{4\pi}{9}+2\pi m, m\in Z, \\ \frac{2x}{3}=\frac{5\pi}{9}+2\pi s, s\in Z. \end{array}\right.$$

Отсюда находим:

$$\left[\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{2\pi}{3} + 3\pi m,\ m \in Z, \\ x_4 = \dfrac{5\pi}{6} + 3\pi s,\ s \in Z. \end{array}\right.$$

Решениями исходного уравнения могут быть пересечения серий

$$x_1 \cap x_3,\ \ x_1 \cap x_4,\ \ x_2 \cap x_3 \text{ и } x_2 \cap x_4.$$

Случай 1. Ищем пересечение $x_1 \cap x_3$. Покажем, что $x_1 \cap x_3 = \varnothing$. Условие $x_1 = x_3$ приводит к уравнению

$$\frac{\pi}{3} + 5\pi k = \frac{2\pi}{3} + 3\pi m,\ k, m \in Z.$$

Отсюда получаем $\dfrac{1}{3} = 5k - 3m,\ k, m \in Z.$ Последнее равенство невозможно, поскольку k и m − целые числа.

Случай 2. Ищем пересечение $x_1 \cap x_4$. Покажем, что пересечение $x_1 \cap x_4 = \varnothing$. Условие $x_1 = x_4$ приводит к уравнению

$$\frac{\pi}{3} + 5\pi k = \frac{5\pi}{6} + 3\pi s,\ k, s \in Z.$$

Отсюда получаем $\dfrac{1}{2} = 5k - 3s,\ k, s \in Z.$ Последнее равенство невозможно, поскольку k и s − целые числа.

Случай 3. Ищем пересечение $x_2 \cap x_3$. Условие $x_2 = x_3$ приводит к уравнению

$$-\frac{\pi}{3} + 5\pi n = \frac{2\pi}{3} + 3\pi m,\ n, m \in Z.$$

Отсюда получаем $5n - 3m = 1,\ n, m \in Z.$ Это уравнение в целых числах. Его решение имеет вид:

$$\begin{cases} n = 2 + 3t, \\ m = 3 + 5t,\ t \in Z. \end{cases}$$

Тогда $x = -\dfrac{\pi}{3} + 5\pi(2 + 3t) = \dfrac{29\pi}{3} + 15\pi t,\ t \in Z.$

Случай 4. Ищем пересечение $x_2 \cap x_4$. Покажем, что пересечение $x_2 \cap x_4 = \varnothing$. Условие $x_2 = x_4$ приводит к уравнению

$$-\frac{\pi}{3} + 5\pi n = \frac{5\pi}{6} + 3\pi s,\ n, s \in Z.$$

Отсюда получаем $5n - 3s = \frac{7}{6},\ n, s \in Z,$ что невозможно поскольку n и s − целые числа.

Ответ. $x = \frac{29\pi}{3} + 15\pi t,\ t \in Z.$

3. Перепишем исходную систему в виде:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2[x] + 6\{x\} - 2\{y\} + 6[y] = 5, \\ 2x + y - [x] + 2\{x\} + 3\{y\} - 4[y] = 12. \end{cases} \quad (1)$$

Исключим из этой системы $x = [x] + \{x\}$ и $y = [y] + \{y\}$. После приведения подобных имеем:

$$\begin{cases} 4[x] + 8\{x\} + 2[y] - 6\{y\} = 5, \\ [x] + 4\{x\} - 3[y] + 4\{y\} = 12. \end{cases}$$

Выразим $[x]$ и $[y]$ через $\{x\}$ и $\{y\}$:

$$\begin{cases} [x] = \frac{39}{14} - \frac{16}{7}\{x\} + \frac{5}{7}\{y\}, \\ [y] = -\frac{43}{14} + \frac{4}{7}\{x\} + \frac{11}{7}\{y\}. \end{cases} \quad (2)$$

С помощью формул (2) и неравенств $0 \le \{x\} < 0,\ \ 0 \le \{y\} < 1$ получим оценки целой части чисел x и y. Сначала оценим $[x]$ и $[y]$ снизу:

$$\frac{39}{14} - \frac{16}{7}\{x\} + \frac{5}{7}\{y\} > \frac{39}{14} - \frac{16 \cdot 1}{7} + \frac{5 \cdot 0}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2};$$

$$-\frac{43}{14}+\frac{4}{7}\{x\}+\frac{11}{7}\{y\}>-\frac{43}{14}+\frac{4\cdot 0}{7}+\frac{11\cdot 0}{7}=-\frac{43}{14}.$$

Следовательно, $[x]>\frac{1}{2}$, а $[y]>-\frac{43}{14}$.

Теперь оценим $[x]$ и $[y]$ сверху:

$$\frac{39}{14}-\frac{16}{7}\{x\}+\frac{5}{7}\{y\}<\frac{39}{14}-\frac{16\cdot 0}{7}+\frac{5}{7}=\frac{49}{14}=3\frac{1}{2};$$

$$-\frac{43}{14}+\frac{4}{7}\{x\}+\frac{11}{7}\{y\}<-\frac{43}{14}+\frac{4\cdot 1}{7}+\frac{11\cdot 1}{7}=-\frac{13}{14}.$$

Следовательно, $[x]<3\frac{1}{2}$, а $[y]<-\frac{13}{14}$.

Объединяя полученные оценки, имеем $[x]\in\left(\frac{1}{2};3\frac{1}{2}\right)$, а $[y]\in\left(-3\frac{1}{14};-\frac{13}{14}\right)$. В силу целочисленности $[x]$ и $[y]$, получаем, что допустимые значения $[x]$ − это числа 1, 2 и 3, а допустимые значения $[y]$ − это числа –3, –2 и –1.

Вернемся к исходной системе (1) и исключим из уравнений $\{x\}=x-[x]$ и $\{y\}=y-[y]$. После приведения подобных имеем:

$$\begin{cases} 8x-4[x]-6y+8[y]=5, \\ 4x-3[x]+4y-7[y]=12. \end{cases}$$

Выразим переменные x и y через $[x]$ и $[y]$:

$$\begin{cases} x=\frac{23}{14}+\frac{17}{28}[x]+\frac{5}{28}[y], \\ y=\frac{19}{14}+\frac{1}{7}[x]+\frac{11}{7}[y]. \end{cases} \qquad (3)$$

Будем подставлять в (3) найденные выше допустимые значения $[x]$ и $[y]$.

Случай 1. $[x]=1,\ [y]=-3.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\dfrac{23}{14}+\dfrac{17}{28}-\dfrac{15}{28}=\dfrac{12}{7}, \\ y=\dfrac{19}{14}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{33}{7}=-\dfrac{45}{14}. \end{cases}$$

Так как $\left[-\dfrac{45}{14}\right]=\left[-3\dfrac{3}{14}\right]=-4\neq-3,$ то этот случай невозможен.

Случай 2. $[x]=1,\ [y]=-2.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\dfrac{23}{14}+\dfrac{17}{28}-\dfrac{10}{28}=\dfrac{53}{28}, \\ y=\dfrac{19}{14}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{22}{7}=-\dfrac{23}{14}. \end{cases}$$

Так как $\left[\dfrac{53}{28}\right]=\left[1\dfrac{25}{28}\right]=1,$ а $\left[-\dfrac{23}{14}\right]=\left[-1\dfrac{9}{14}\right]=-2,$ то $\left(\dfrac{53}{28};-\dfrac{23}{14}\right)$ – решение системы.

Случай 3. $[x]=1,\ [y]=-1.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\dfrac{23}{14}+\dfrac{17}{28}-\dfrac{5}{28}=\dfrac{29}{14}, \\ y=\dfrac{19}{14}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{11}{7}=-\dfrac{1}{14}. \end{cases}$$

Так как $\left[\dfrac{29}{14}\right]=\left[2\dfrac{1}{14}\right]=2\neq1,$ то этот случай невозможен.

Случай 4. $[x]=2,\ [y]=-3.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\dfrac{23}{14}+\dfrac{34}{28}-\dfrac{15}{28}=\dfrac{65}{7}, \\ y=\dfrac{19}{14}+\dfrac{2}{7}-\dfrac{33}{7}=-\dfrac{43}{14}. \end{cases}$$

Так как $\left[-\frac{43}{14}\right]=\left[-3\frac{1}{14}\right]=-4\neq-3,$ то этот случай невозможен.

Случай 5. $[x]=2,\ [y]=-2.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\frac{23}{14}+\frac{34}{28}-\frac{10}{28}=\frac{5}{2}, \\ y=\frac{19}{14}+\frac{2}{7}-\frac{22}{7}=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Так как $\left[\frac{5}{2}\right]=\left[2\frac{1}{2}\right]=2,$ а $\left[-\frac{3}{2}\right]=\left[-1\frac{1}{2}\right]=-2,$ то $\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$ – решение системы.

Случай 6. $[x]=2,\ [y]=-1.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\frac{23}{14}+\frac{34}{28}-\frac{5}{28}=\frac{75}{28}, \\ y=\frac{19}{14}+\frac{2}{7}-\frac{11}{7}=\frac{1}{14}. \end{cases}$$

Так как $\left[\frac{1}{14}\right]=0\neq-1,$ то этот случай невозможен.

Случай 7. $[x]=3,\ [y]=-3.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\frac{23}{14}+\frac{51}{28}-\frac{15}{28}=\frac{41}{14}, \\ y=\frac{19}{14}+\frac{3}{7}-\frac{33}{7}=-\frac{41}{14}. \end{cases}$$

Так как $\left[\frac{41}{14}\right]=\left[2\frac{13}{14}\right]=2\neq3,$ то этот случай невозможен.

Случай 8. $[x]=3,\ [y]=-2.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\dfrac{23}{14}+\dfrac{51}{28}-\dfrac{10}{28}=\dfrac{87}{28}, \\ y=\dfrac{19}{14}+\dfrac{3}{7}-\dfrac{22}{7}=-\dfrac{19}{14}. \end{cases}$$

Так как $\left[\dfrac{87}{28}\right]=\left[3\dfrac{3}{28}\right]=3,$ а $\left[-\dfrac{19}{14}\right]=\left[-1\dfrac{5}{14}\right]=-2,$ то $\left(\dfrac{87}{28};-\dfrac{19}{14}\right)$ – решение системы.

Случай 9. $[x]=3,\ [y]=-1.$ Тогда

$$\begin{cases} x=\dfrac{23}{14}+\dfrac{51}{28}-\dfrac{5}{28}=\dfrac{23}{14}, \\ y=\dfrac{19}{14}+\dfrac{3}{7}-\dfrac{11}{7}=\dfrac{3}{14}. \end{cases}$$

Так как $\left[\dfrac{3}{14}\right]=0\neq-1,$ то этот случай невозможен.

Ответ: $\left(\dfrac{53}{28};-\dfrac{23}{14}\right);\ \left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right);\ \left(\dfrac{87}{28};-\dfrac{19}{14}\right).$

4. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $x\in[0;\pi].$ Уравнение принимает вид:

$$\sin(x+\pi-x)+2\sin^2(x-x)=0, \text{ или } 0=0.$$

Это означает, что любое $x\in[0;\pi]$ является решением уравнения.

Случай 2. Пусть $x\in(\pi;5]$. Уравнение принимает вид:

$$\sin(x+x+\pi)+2\sin^2(x-x)=0 \text{ или } \sin 2x=0.$$

Отсюда находим $x=\dfrac{3\pi}{2}.$

Таким образом, мы получили, что случайно взятое на отрезке $[0;5]$ число x является решением исходного уравнения, если оно

принадлежит отрезку $[0;\pi]$ или равно $\frac{3\pi}{2}$. Вероятность такого события $P(A)=\frac{\pi}{5}$.

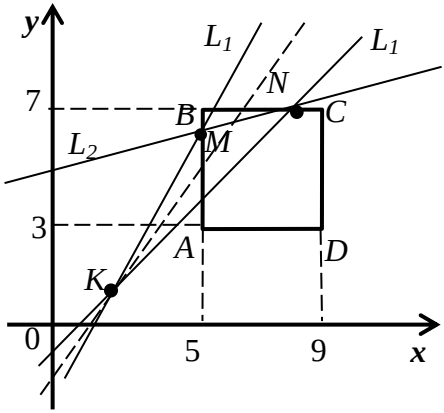
Ответ: $P(A)=\frac{\pi}{5}$.

5. Обозначим через $A(5;3)$, $B(5;7)$, $C(9;7)$ и $D(9;3)$ вершины квадрата $5\le x\le 9,\ 3\le y\le 7$.

Рассмотрим сначала второе уравнение системы:

$$x-3y+13=0.$$

Оно задает прямую. Обозначим ее через L_2. Найдем точки пересечения прямой L_2 с сторонами квадрата $ABCD$. Пусть $x=5$, тогда $y=6\in[3;7]$. Следовательно, прямая L_2 пересекает сторону AB квадрата $ABCD$ в точке $M(5;6)$. Пусть теперь $y=7$, тогда $x=8\in[5;9]$. Следовательно, прямая L пересекает сторону BC квадрата $ABCD$ в точке $N(8;7)$ (см. рисунок).



Рассмотрим теперь первое уравнение системы:

$$x\sin a - y\cos a = 2\sin a - \cos a.$$

Случай 1. Пусть $\cos a = 0,$ тогда уравнение принимает вид:

$$x = 2.$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (2;0) и перпендикулярной оси $Ox.$ Так как эта прямая не пересекает квадрат $ABCD$, то система решений не имеет.

Случай 2. Пусть $\cos a \neq 0,$ тогда уравнение принимает вид:

$$y = \operatorname{tg} a\left(x-2\right)+1.$$

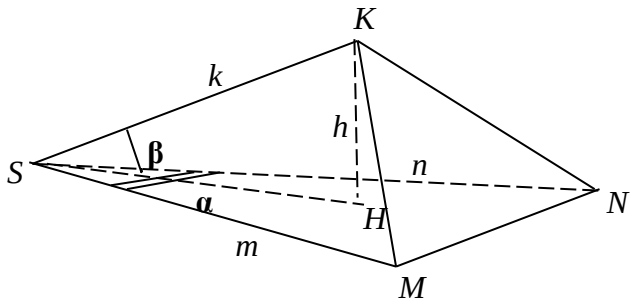
При фиксированном значении параметра a это уравнение задает прямую, которая проходит через точку $K\left(2;1\right)$ и имеет угловой коэффициент $\operatorname{tg} a.$

Обозначим эту прямую через L_1. Система уравнений будет иметь решение $(x;y)$ в квадрате $ABCD,$ если точка пересечения прямых L_1 и L_2 лежит внутри квадрата, то есть когда прямая L_1 пересекает отрезок MN (см. рисунок).

Найдем значения $\operatorname{tg} a,$ при которых прямая L_1 проходит через точки $N\left(8;7\right)$ и $M\left(5;6\right).$ Подставим координаты точки $N\left(8;7\right)$ в уравнения прямой $L_1: 7 = \operatorname{tg} a\left(8-2\right)+1.$ Отсюда находим $\left(\operatorname{tg} a\right)_N = 1.$ Теперь подставим координаты точки $M\left(5;6\right)$ в уравнения прямой $L_1: 6 = \operatorname{tg} a\left(5-2\right)+1.$ Отсюда находим $\left(\operatorname{tg} a\right)_M = \dfrac{5}{3}.$ Условием пересечения прямой L_1 отрезка MN является выполнение неравенства $\left(\operatorname{tg} a\right)_N \le \operatorname{tg} a \le \left(\operatorname{tg} a\right)_M$, решая которое получим $\dfrac{\pi}{4} + \pi k \le a \le arctg\dfrac{5}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $a \in \left[\dfrac{\pi}{4} + \pi k, arctg\dfrac{5}{3} + \pi k\right], k \in Z$.

6. Введем обозначения: $SM = m,\ SN = n,\ SK = k,\ KH = h,$ $\measuredangle MSN = \alpha,\ \measuredangle HSK = \beta,$ где KH – перпендикуляр на грань SMN.



Объем пирамиды $SMNK$ равен:

$$V = \frac{1}{3} S_{SMN} \cdot h = \frac{1}{6} mn \sin\alpha \cdot h = \frac{mn \sin\alpha \cdot k \sin\beta}{6} = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{6} mnk.$$

Значения углов α и β зависят от трехгранного угла, но не от положения точек M, N и K на его ребрах, поэтому максимальному объему пирамиды $SMNK$ соответствует максимальное значение произведение $m \cdot n \cdot k$, при условии $m^2 + n^2 + k^2 \le p$. Из неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом трех чисел следует, что

$$\sqrt[3]{m^2 n^2 k^2} \le \frac{m^2 + n^2 + k^2}{3} \le \frac{p}{3}.$$

Так как равенство достигается при $m = n = k,$ то при $m = n = k = \sqrt{\frac{p}{3}}$ объем пирамиды максимально возможный, а площадь треугольника SMN принимает значение $\frac{p \sin\alpha}{6}$.

Ответ: $S_{SMN} = \frac{p \sin\alpha}{6}$.

Вариант № 2

1. Найти все x, не удовлетворяющие неравенству

$$n^2x^2 - n(3n-2)x + 7n - 4n^2 - 3 \geq 0$$

хотя бы для одного натурального n.

Ответ: $x \in (-1;4)$.

2. Решить уравнение $\left|\sin\frac{2x}{5} + \sin\frac{\pi}{5}\right| = -2\left|\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + 1\right|$.

Ответ: $x = \frac{19\pi}{2} + 20\pi k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{29\pi}{2} + 20\pi l,\ l \in Z.$

3. Найти x и y, для которых

$$\begin{cases} x + y - 2[x] + \{x\} - 2\{y\} + 4[y] = -0,5, \\ 2x - y + [x] - 2\{x\} - \{y\} + 3[y] = 2, \end{cases}$$

где $[x],[y]$ и $\{x\},\{y\}$ – целая и дробная части чисел x и y. Целая часть числа a – это наибольшее целое число, не превосходящее a, а $\{a\} = a - [a]$.

Ответ: $x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}.$

4. Найти вероятность того, что случайно взятое на отрезке $[-2\pi, 0]$ число x является решением уравнения

$$\sin\left(x - |x + \pi|\right) - \sin\left(x + |x + \pi/2|\right) = 1.$$

Ответ: $P = \frac{1}{4}.$

5. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x\sin a - y\cos a + \sin a + \cos a = 0, \\ x - 2y + 6 = 0, \end{cases}$$

имеет решение $(x;y)$ в квадрате $2 \leq x \leq 5,\ 2 \leq y \leq 5$?

Ответ: $a \in \left[\operatorname{arctg}\frac{4}{5} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in Z.$

6. На ребрах трехгранного угла с вершиной в точке S расположены точки M, N и K такие, что $SM^2 + SN^2 + SK^2 \le 24\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника SMN, если известно, что угол MSN равен 45^0, а объем пирамиды $SMNK$ максимально возможный.

Ответ: $S_{SMN} = 4.$

Вариант № 3

1. Найти все x, удовлетворяющих неравенству

$$n^2x^2 - n(3n-1)x + 2n^2 - 3n - 2 \le 0$$

при любых натуральных n.

Ответ: $x \in [1;2].$

2. Решить уравнение $\left|\sqrt{3}ctg\,\frac{x}{2} - 1\right| + \left(tg\,\frac{x}{3} + \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{9}\right)^2 = 0$.

Ответ: $x = \frac{8\pi}{3} + 6\pi k,\ k \in Z.$

3. Найти x и y, для которых

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2[x] - \{x\} + \{y\} - 2[y] = 9{,}5, \\ -x + 2y - 3[x] + 2\{x\} - \{y\} + [y] = -10, \end{cases}$$

где $[x],[y]$ и $\{x\},\{y\}$ – целая и дробная части чисел x и y. Целая часть числа a – это наибольшее целое число, не превосходящее a, а $\{a\} = a - [a]$.

Ответ: $x = \frac{5}{2},\ y = -\frac{1}{2}.$

4. Найти вероятность того, что случайно взятое на отрезке $[-3\pi, \pi]$ число x является решением уравнения

$$\sin\left(2x - |x - \pi|\right) + \sin 3x + \sin\left(x - |x + \pi|\right) = 0.$$

Ответ: $P = \frac{1}{2}.$

5. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x\sin a - y\cos a + 3\sin a + \cos a = 0, \\ 2x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

имеет решение $(x; y)$ в квадрате $-4 \le x \le -1,\ 2 \le y \le 5$?

Ответ: $a \in \left[\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 4 + \pi n\right],\ n \in Z.$

6. На ребрах трехгранного угла с вершиной в точке S расположены точки M, N и K такие, что $SM^2 + SN^2 + SK^2 \le 8\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника SMN, если известно, что угол MSN равен 60^0, а объем пирамиды $SMNK$ максимально возможный.

Ответ: $S_{SMN} = 2.$

Вариант № 4

1. Найти все x, не удовлетворяющие неравенству

$$n^2x^2 - n(n-3)x + 11n - 4 - 6n^2 \ge 0$$

хотя бы для одного натурального n.

Ответ: $x \in (-2; 3).$

2. Решить уравнение $\left(\cos\dfrac{2x}{7} - \cos\dfrac{3\pi}{14}\right)^2 + \left|tg\,\dfrac{x}{3} - tg\,\dfrac{\pi}{12}\right| = 0.$

Ответ: $x = \dfrac{25\pi}{4} + 21\pi k,\ k \in Z.$

3. Найти x и y, для которых

$$\begin{cases} 2x + 3y - [x] + 2\{x\} - 2\{y\} + 2[y] = -5{,}5, \\ -3x + y + 2[x] + \{x\} + 2\{y\} + [y] = 1{,}5, \end{cases}$$

где $[x], [y]$ и $\{x\}, \{y\}$ – целая и дробная части чисел x и y. Целая часть числа a – это наибольшее целое число, не превосходящее a, а $\{a\} = a - [a]$.

Ответ: $x=-\frac{45}{14},\ y=-\frac{9}{14};\ x=-\frac{35}{14},\ y=-\frac{1}{2};\ x=-\frac{25}{14},\ y=-\frac{5}{14}.$

4. Найти вероятность того, что случайно взятое на отрезке $[-3\pi,\pi]$ число x является решением уравнения

$$\cos\left(3x-|2x-\pi|\right)+\cos 5x+\cos\left(x-|x+\pi|\right)=-1.$$

Ответ: $P=\frac{3}{8}.$

5. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x\sin a-y\cos a=\sin a-4\cos a, \\ 2x-y-9=0, \end{cases}$$

имеет решение $(x;y)$ в квадрате $2\le x\le 6,\ -5\le y\le -1$?

Ответ: $a\in\left[-\operatorname{arctg}9+\pi n;-\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+\pi n\right],\ n\in Z.$

6. На ребрах трехгранного угла с вершиной в точке S расположены точки M, N и K такие, что $SM^2+SN^2+SK^2\le 18$. Найти площадь треугольника SMN, если известно, что угол MSN прямой, а объем пирамиды $SMNK$ максимально возможный.

Ответ: $S_{SMN}=3.$

2. Заключительные туры

2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 7 класс

Вариант № 1

1. Половина пути от дома до школы проходит по равнине, остальная часть – по холмам. Петя вышел из дома в 8 час, а вернулся из школы в 15 час, при этом он 6 часов находился в школе и сразу после уроков отправился домой. Скорость его движения на спусках – 6км/час, на подъемах – 3км/час, на ровных участках – 4км/час. Найти длину пути от дома до школы.

2. Дробь $\frac{p}{q}$ с натуральными p, q такова, что возрастание числителя на 1, а знаменателя – на 5 делает ее большей. Найти такую дробь, если $p+q<8$.

3. Пятизначное четное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

4. Целой частью числа x, обозначение $[x]$, называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Число $\{x\}=x-[x]$ называют дробной частью числа x. Найти x, для которого $2x+[x]=4$.

5. Граница квадрата со стороной 9, вырезанного из белого картона, окрашена в красный цвет. Необходимо разрезать квадрат на 6 равных по площади частей, границы которых содержат отрезки, окрашенные в красный цвет, с одинаковой общей длиной.

Ответы и решения

1. Пусть путь от дома до школы составляет S км, тогда путь по равнине $\frac{S}{2}$ км, а путь "под горку" $-x$ км, " в горку" $-y$ км.

Время в пути туда и обратно $15-8-6=1$ час. Значит путь в школу: $S=x+y+\frac{S}{2}$, а время на дорогу в школу и из школы:

$$1\text{час}=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{S}{2\cdot 4}+\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{S}{2\cdot 4},$$

$$1=\frac{x}{6}+\frac{2y}{6}+\frac{S}{2\cdot 4}+\frac{2x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{S}{2\cdot 4}=$$

$$=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\cdot\left(x+y+\frac{S}{2}\right)=\frac{S}{2},$$

тогда путь $\frac{S}{2}=1$, $S=2$ км.

Ответ: 2 км.

2. Из условия задачи $\frac{p}{q}$ меньше, если числитель станет $p+1$, а знаменатель $q+5$, значит $\frac{p}{q}<\frac{p+1}{q+5}$. Получим систему:

$$\begin{cases} p+q<8, \\ \frac{p+1}{q+5}-\frac{p}{q}>0, \end{cases} \text{где } p,q\in N.$$

Решим эту систему: $\begin{cases} p+q<8, \\ \frac{pq+q-pq-5p}{(q+5)q}>0, \end{cases}$ поскольку $q\in N$, то $q=1,2,\ldots$, т.е. $q(q+5)>0$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} p+q<8, \\ q>5p. \end{cases}$$

Прибавив p к каждой части второго неравенства, $5p+p<q+p<8$, запишем, что $6p<8$, $p<\frac{4}{3}$, значит $p=1$, тогда $5<q<1+q<8, q=6$.

Ответ: $\frac{p}{q}=\frac{1}{6}$.

3. Заметим, что пятизначное искомое число a: $10000 \le a \le 99999$. По условию задачи a является минимальным квадратом целого числа, чётным и делится на 21, т.е. $a=(21\cdot 2)^2\cdot k^2$, $k\in N$. Таким образом,

$$10000 \le (21\cdot 2)^2\cdot k^2 \le 99999,\ \frac{10000}{(21\cdot 2)^2} \le k^2 \le \frac{99999}{(21\cdot 2)^2},$$

$$\frac{10000}{1764} \le k^2 \le \frac{99999}{1764},\ 6 \le k^2 \le \frac{99999}{1764}.$$

Значит $k=3$, поскольку наименьший квадрат числа k:

$$k^2=9, a=(21\cdot 2\cdot 3)^2, a=1764\cdot 9=15876.$$

Ответ: 15876.

4. Пусть $x=[x]+\{x\}$, т.е. любое число $x-$ сумма целой и дробной части, причём $0\le\{x\}<1$, тогда из уравнения $2x+[x]=4$, получаем:

$$3[x]+2\{x\}=4,\ 2\{x\}=4-3[x],\ \{x\}=\frac{4-3[x]}{2},\ 0\le\frac{4-3[x]}{2}<1.$$

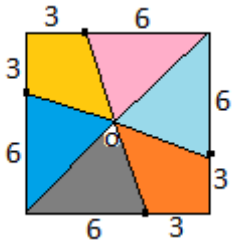
Решим двойное неравенство:

$$0\le 4-3[x]<2,\ -2<3[x]-4\le 0,\ 2<3[x]\le 4,\ \frac{2}{3}<[x]\le\frac{4}{3},\ [x]=1.$$

Тогда $\{x\}=\frac{4-3\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$. Искомое число: $x=1{,}5$.

Ответ: 1,5.

5. Рассмотрим квадрат со стороной 9 см. Чтобы разрезать квадрат на 6 равных по площади частей, границы которых содержат отрезки, окрашенные в красный цвет, с одинаковой общей длиной достаточно разрезать прямоугольный равнобедренный треугольник (половину квадрата) на 3 части: указать центр опи-



санной окружности около треугольника – точку O, точку, из которой провести высоту $h = 4{,}5$ к катетам треугольника, и разделить каждый катет в отношении 1:2, считая от прямого угла. Получим: площадь каждой части равна $\frac{S_{\Delta}}{3} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{2}{3} a,$ где $h = 4{,}5 = \frac{a}{2}$ – расстояние от точки O до катетов треугольника, $\frac{2}{3} a = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} a = 6$ – длина основания искомой части катета при стороне квадрата $a = 9$ см.

Ответ: см. рисунок.

Вариант № 2

1. Две трети пути от дома до школы проходит по равнине, остальная часть – по холмам. Вася вышел из дома в 8 час 20 мин, а вернулся из школы в 16 час, при этом он 6 часов находился в школе и сразу после уроков отправился домой. Скорость его движения на спусках – 6 км/час, на подъемах – 2 км/час, на ровных участках – 4 км/час. Найти длину пути от дома до школы.

Ответ: 3 км.

2. Дробь $\frac{p}{q}$ с натуральными p, q такова, что возрастание числителя на 2, а знаменателя – на 7 делает ее большей. Найти такую дробь, если $p + q < 6$.

Ответ: $\frac{p}{q} = \frac{1}{4}$.

3. Четырехзначное нечетное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 15. Найти максимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

Ответ:5625.

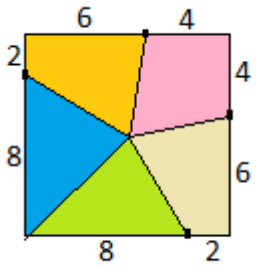
4. Целой частью числа x, обозначение $[x]$, называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Число $\{x\} = x - [x]$

называют дробной частью числа x. Найти x, для которого $3x-2\{x\}=6,5$.

Ответ: $2,5$.

5. Граница квадрата со стороной 10, вырезанного из белого картона, окрашена в красный цвет. Необходимо разрезать квадрат на 5 равных по площади частей, границы которых содержат отрезки, окрашенные в красный цвет, с одинаковой общей длиной

Ответ: см. рисунок.



Вариант № 3

1. Треть пути от дома до школы проходит по равнине, остальная часть – по холмам. Петя вышел из дома в 8 час 15 мин, а вернулся из школы в 15 час 30 мин, при этом он 6,5 часа находился в школе и сразу после уроков отправился домой. Скорость его движения на спусках – 6 км/час, на подъемах – 3 км/час, на ровных участках – 4 км/час. Найти длину пути от дома до школы.

Ответ: 1,5 км.

2. Дробь $\frac{p}{q}$ с натуральными p, q такова, что возрастание числителя на 3, а знаменателя – на 10 делает ее большей. Найти такую дробь, если $p+q<7$.

Ответ: $\frac{p}{q}=\frac{1}{4}$; $\frac{p}{q}=\frac{1}{5}$.

3. Шестизначное четное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 143. Найти минимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

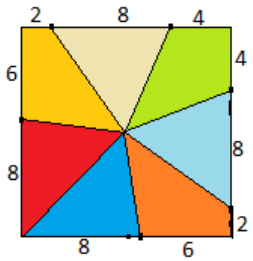
Ответ: 327184.

4. Целой частью числа x, обозначение $[x]$, называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Число $\{x\}=x-[x]$ называ-

ют дробной частью числа x. Найти x, для которого $2[x]+3\{x\}=-6,5$.

Ответ: $-3,5$.

5. Граница квадрата со стороной 14, вырезанного из белого картона, окрашена в красный цвет. Необходимо разрезать квадрат на 7 равных по площади частей, границы которых содержат отрезки, окрашенные в красный цвет, с одинаковой общей длиной.



Ответ: см. рисунок.

Вариант № 4

1. Три четверти пути от дома до школы проходит по равнине, остальная часть – по холмам. Петя вышел из дома в 8 час 6 мин, а вернулся из школы в 15 час 18 мин, при этом он 6,5 часа находился в школе и сразу после уроков отправился домой. Скорость его движения на спусках – 6 км/час, на подъемах – 3 км/час, на ровных участках – 4 км/час. Найти длину пути от дома до школы.

Ответ: 1,4 км.

2. Дробь $\frac{p}{q}$ с натуральными p, q меньше $\frac{1}{5}$, а возрастание ее числителя на 4 и знаменателя – на 12 делает ее большей. Найти такую дробь, если $p+q<9$.

Ответ: $\frac{p}{q}=\frac{1}{6}$; $\frac{p}{q}=\frac{1}{7}$.

3. Пятизначное нечетное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 91. Найти максимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

Ответ:74529.

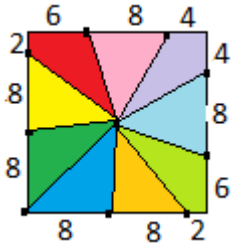
4. Целой частью числа x, обозначение $[x]$, называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Число $\{x\}=x-[x]$

называют дробной частью числа x. Найти x, для которого $2\{x\}-x-3[x]=8{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

5. Граница квадрата со стороной 18, вырезанного из белого картона, окрашена в красный цвет. Необходимо разрезать квадрат на 9 равных по площади частей, границы которых содержат отрезки, окрашенные в красный цвет, с одинаковой общей длиной.

Ответ: см. рисунок.



2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс

Вариант № 1

1. Саша и Маша, катаясь на коньках по кругу в одном направлении, встречались, когда Саша в очередной раз обгонял Машу. После очередной встречи, Саша быстро развернулся и поехал с той же скоростью в противоположном направлении. После этого он стал встречать Машу в три раза чаще. Во сколько раз Саша едет быстрее Маши?

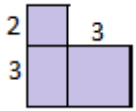
2. В мешке деда Мороза находится 30 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 5 желтых, 10 красных и 15 синих. Петя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Петя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет одного цвета?

3. В строчку записаны все целые числа от 1 до 2017. Возможно ли перед ними поставить знаки $\pm$ так, чтобы их сумма равнялась 2019?

4. Натуральные числа a и b таковы, что a при делении на 3 имеет остаток 2, b при делении на 7 – остаток 1, а их произведе-

ние при делении на 21 имеет в остатке 2. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $a+b$, если a и b трехзначные числа.

5. С помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, равновеликого фигуре.



Ответы и решения.

1. Пусть длина круга S, а скорость Саши $-x$ км/ч, тогда Маши $-y$ км/ч, $x>y$. Значит скорость, с которой Саша догоняет Машу $-(x-y)$ км/ч, а скорость при движении в разных направлениях $-(x+y)$ км/ч. Получим, что при движении в одном направлении число встреч: $\frac{S}{x-y}$, а в разных направлениях $\frac{S}{x+y}$, причём, по условию задачи, тогда встречи в 3 раза чаще, то есть $\frac{S}{x-y}=\frac{3S}{x+y}$. Разделим равенство на S и приведём к общему знаменателю. Имеем: $x+y=3x-3y$, $2x=4y, x=2y$, значит, Саша в два раза быстрее Маши.

Ответ: в два раза.

2. Если Петя оставит в мешке только 6 конфет, а возьмёт 24 конфеты, то могут остаться по 2 конфеты трёх разных цветов. По условию задачи надо взять максимальное число конфет, но оставить 3 конфеты одного цвета, значит, надо оставить ещё одну конфету, а взять только 23 конфеты.

Ответ: 23 конфеты.

3. Пусть S_+ – сумма всех положительных чисел, S_- – сумма всех отрицательных чисел, тогда

$$S_+ - S_- = 1+2+\ldots+2017 =$$
$$= 2017+(1+2016)+(2+2015)+\ldots+(1008+1009)=$$
$$= 2017\cdot 1009 = 2035153.$$

А сумма всех чисел: $S_+ + S_- = 2019$. Решая систему $\begin{cases} S_+ - S_- = 2035153, \\ S_+ + S_- = 2019, \end{cases}$ получим $S_+ = 1018586,\ S_- = -1016567.$

Расставить знаки для чисел можно, например, так:

$$S_+ = 884 + 1427 + \ldots + 2017,$$

все остальные числа записать со знаком минус. В результате получим указанные суммы.

Ответ: возможно.

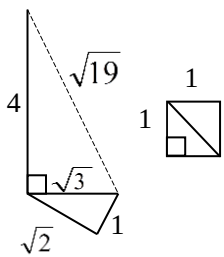
4. Запишем число a: $a - 2 = 3n$, число b: $b - 1 = 7m$, где $n, m \in N \cup \{0\}$. Тогда имеем:

$$a \cdot b = (3n + 2) \cdot (7m + 1) = 21nm + 3n + 14m + 2.$$

Известно, что произведение чисел при делении на 21 даёт остаток 2, значит $3n + 14m$ делится на 21 нацело. То есть $n = 7t, m = 3s,$ тогда $a = 21t + 2, b = 21s + 1.$ Поскольку числа трёхзначные, то $a \geq 100, b \geq 100,$ откуда $21t + 2 \geq 100,\ 21s + 1 \geq 100,$ тогда $t \geq \frac{98}{21}, s \geq \frac{99}{21}.$ По условию задачи сумма $a + b$ должна принять наименьшее возможное значение, выберем наименьшие t и s, удовлетворяющие найденным условиям: $t = 5$ и $s = 5$, найдём сумму $a + b = 21 \cdot 5 + 2 + 21 \cdot 5 + 1 = 213.$

Ответ: 213.

5. Найдём площадь данной фигуры: сумма площадей квадратов со сторонами 2 единицы и 3 единицы, а также площадь прямоугольника со сторонами 2 единицы и 3 единицы. Искомая площадь равна 19 ед^2. Требуется построить квадрат со стороной $\sqrt{19}$ ед.



Для этого по теореме Пифагора достаточно построить прямоугольный треугольник с катетами 4 ед. и $\sqrt{3}$ ед., где $\sqrt{3}$ – диагональ

прямоугольника со сторонами 1 ед. и $\sqrt{2}$ ед., а $\sqrt{2}$ ед.- диагональ квадрата со стороной 1 ед.

Ответ: построение отрезка длиной $\sqrt{19}$.

Вариант № 2

1. Даша и Паша, катаясь на коньках по кругу в одном направлении, встречались, когда Паша в очередной раз обгонял Дашу. После очередной встречи, Паша быстро развернулся и поехал с той же скоростью в противоположном направлении. После этого он стал встречать Дашу в пять раз чаще. Во сколько раз Паша едет на коньках быстрее Даши?

Ответ: в 1,5 раза.

2. В мешке деда Мороза находится 34 одинаковых по форме карандашей разного цвета: 6 черных, 8 красных и 20 голубых. Вова, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько карандашей. Какое максимальное количество карандашей может взять Вова, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее четырех карандашей одного цвета?

Ответ: 24 карандаша.

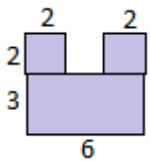
3. В строчку записаны все целые числа от 1 до 2017. Возможно ли перед ними поставить знаки $\pm$ так, чтобы их сумма равнялась 2018?

Ответ: невозможно.

4. Натуральные числа a и b таковы, что a при делении на 5 имеет остаток 4, b при делении на 7 – остаток 3, а их произведение при делении на 35 имеет в остатке 12. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение $a+b$, если a и b двузначные числа.

Ответ: 147.

5. С помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, равновеликого фигуре.



Ответ: построение отрезка длиной $\sqrt{26}$.

Вариант № 3

1. Петя и Глаша, катаясь на коньках по кругу в одном направлении, встречались, когда Петя в очередной раз обгонял Глашу. После очередной встречи, Петя быстро развернулся и поехал с той же скоростью в противоположном направлении. После этого он стал встречать Глашу в четыре раза чаще. Во сколько раз Петя едет на коньках быстрее Глаши?

Ответ: в $1\frac{2}{3}$ раза.

2. В мешке деда Мороза находится 45 одинаковых по форме шариков для елки разных цветов: 8 золотых, 12 серебряных, 18 красных и 7 зеленых. Катя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько шаров. Какое максимальное количество шаров может взять Катя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее пяти шаров одного цвета?

Ответ: 28 шаров.

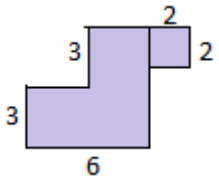
3. В строчку записаны все целые числа от 1 до 2016. Возможно ли перед ними поставить знаки $\pm$ так, чтобы их сумма равнялась 2018?

Ответ: возможно.

4. Натуральные числа a и b таковы, что a при делении на 7 имеет остаток 3, b при делении на 11 – остаток 4, а их произведение при делении на 77 имеет в остатке 12. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $a+b$, если a и b четырехзначные числа.

Ответ: 2009.

5. С помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, равновеликого фигуре.



Ответ: построение отрезка длиной $\sqrt{31}$.

Вариант № 4

1. Катя и Даня, катаясь на коньках по кругу в одном направлении, встречались, когда Даня в очередной раз обгонял Катю. После очередной встречи, Даня быстро развернулся и поехал с той же скоростью в противоположном направлении. После этого он стал встречать Катю в шесть раз чаще. Во сколько раз Даня едет на коньках быстрее Кати?

Ответ: в 1,4 раза.

2. В мешке деда Мороза находится 28 одинаковых по форме кукол, отличающихся по цвету волос: 9 блондинок, 8 брюнеток и 11 шатенок. Маша, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько кукол. Какое максимальное количество кукол может взять Маша, чтобы быть уверенной в том, что в мешке останется не менее семи кукол с одинаковым цветом волос?

Ответ: 9 кукол.

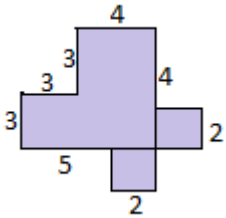
3. В строчку записаны все целые числа от 1 до 2016. Возможно ли перед ними поставить знаки $\pm$ так, чтобы их сумма равнялась 2017?

Ответ: невозможно.

4. Натуральные числа a и b таковы, что a при делении на 11 имеет остаток 7, b при делении на 13 – остаток 5, а их произведение при делении на 143 имеет в остатке 35. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение $a+b$, если a и b трехзначные числа.

Ответ: 1728.

5. С помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, равновеликого фигуре.



Ответ: построение отрезка длиной $\sqrt{41}$.

2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

Вариант № 1

1. Петя сбежал по эскалатору метро, двигающемуся вниз, от верха до низа, развернулся и побежал в обратном направлении. Добежав до верха, измерил затраченное время. В этот момент эскалатор был переключен на движение в обратном направлении. Петя решил повторить эксперимент: пробежать по эскалатору туда и обратно и измерить затраченное время. Какое из времен оказалось большим и во сколько раз, если скорость движения Пети относительно лестницы при подъеме в 1,5 раза больше скорости движения лестницы, а скорость на спуске – в 2 раза больше скорости движения лестницы?

2. В мешке деда Мороза находится 30 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 5 желтых, 10 красных и 15 синих. Петя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Петя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет одного цвета и не менее четырех – другого?

3. Найти x и y, если $\begin{cases} 2x-3\{y\}=0,5, \\ x+y=3,5, \end{cases}$ где $\{y\}$ – дробная часть числа y.

4. Найти наибольшее целое трехзначное число n, для которого число $15n^2+13n+2$ делится на 49.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с параллельными сторонами AD и BC проведена прямая L параллельная AD и пересекающая стороны AB и CD в точках M и N, соответственно. Известно, что четырехугольники $AMND$ и $MBSN$ подобные, а сумма длин сторон AD и BC не больше 4. Найти наибольшую возможную при этих условиях длину отрезка MN.

1. Пусть длина лестницы S, скорость движения эскалатора $-x$ км/ч, тогда скорость Пети вниз $-2x$ км/ч, а скорость Пети вверх $-1{,}5x$ км/ч. Значит скорость на 1 этапе эксперимента вниз $-(2x+x)$ км/ч, а скорость при движении вверх $-(1{,}5x-x)$ км/ч. Тогда скорость на 2 этапе эксперимента вниз $-(2x-x)$ км/ч, а скорость при движении вверх $-(1{,}5x+x)$ км/ч. Получим, что при движении на 1 этапе время Пети: $T_1=\frac{S}{2x+x}+\frac{S}{1{,}5x-x}$ часов, а на втором $T_2=\frac{S}{2x-x}+\frac{S}{1{,}5x+x}$ часов. По условию задачи, требуется найти отношение величин $\frac{T_1}{T_2}$. Разделив каждое равенство на $\frac{S}{x}$, приведём к общему знаменателю дроби, получим:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{3}+2}{1+\frac{2}{5}}=\frac{7}{3}:\frac{7}{5}=\frac{5}{3}.$$

Значит на 1 этапе эксперимента затрачено больше времени.

Ответ: первое время больше, $\frac{T_1}{T_2}=\frac{5}{3}$.

2. Если Петя оставит в мешке только 15 конфет, а возьмёт другие 15 конфет, то может оказаться, что это конфеты только синего цвета. Значит надо оставить ещё три конфеты другого цвета.

По условию задачи надо взять максимальное число конфет, но оставить 3 конфеты одного цвета и 4 конфеты другого, значит, надо оставить ещё 5 конфет. Поскольку, если оставить 4, то они, возможно, будут двух разных цветов (2 красные и две желтые, а добавив 1, получим три конфеты одного цвета, всего 5 дополнительных конфет). Взять можно только 10 конфет.

Ответ: 10 конфет.

3. Пусть $x=[x]+\{x\}$, т.е. любое число $x-$сумма целой и дробной части (для y аналогично), причём $0\le\{x\}<1.$ Тогда из уравнения $x+y=3{,}5,$ выразим $x=3{,}5-y,$ подставим его во второе уравнение системы и распишем y на целую и дробную часть: $7-2y-3\{y\}=0{,}5,\ 6{,}5=2[y]+5\{y\},\ 0\le 5\{y\}<5.$ Значит целая часть есть обязательно, $0\le 6{,}5-2[y]<5,$ $-5<2[y]-6{,}5\le 0,$ $1{,}5<2[y]\le 6{,}5,$ $0{,}75<[y]\le 3{,}25,$ то есть $[y]=1,$ $[y]=2$ или $[y]=3.$ Рассмотрим возможные варианты.

Если $[y]=1,$ то $5\{y\}=4{,}5,$ а $\{y\}=0{,}9,$ тогда $y=1{,}9,\ x=1{,}6.$

Если $[y]=2,$ то $5\{y\}=2{,}5,$ а $\{y\}=0{,}5,$ тогда $y=2{,}5,\ x=1.$

Если $[y]=3,$ то $5\{y\}=0{,}5,$ а $\{y\}=0{,}1,$ тогда $y=3{,}1,\ x=0{,}4.$

Ответ: 1) $x=1{,}6;\ y=1{,}9;$ 2) $x=1;\ y=2{,}5;$ 3) $x=0{,}4;\ y=3{,}1.$

4. Перепишем квадратный трёхчлен в виде:

$$15n^2+13n+2=(5n+1)\cdot(3n+2).$$

Рассмотрим при каких условиях каждый из множителей делится нацело на 49 при $n\in Z.$

Случай 1. Пусть $5n+1$ делится нацело на 49, тогда $5n+1=49k,$ где $k-$целое число, $n=\dfrac{49k-1}{5},$ тогда $n=\dfrac{50k-k-1}{5},$ чтобы получалось n целое, выражение $\dfrac{-k-1}{5}$ должно делится нацело. Обозначим $-t=\dfrac{-k-1}{5},\ k=5t-1,$ тогда

$$n=\frac{49(5t-1)-1}{5}=49t-10.$$

С учётом того, что $n\le 999,\ 49t-10\le 999,\ 49t\le 1009,\ t\le\dfrac{1009}{49},$ получим $t=20,\ n=970.$

Случай 2. Пусть $3n+2$ делится нацело на 49, тогда

$$3n+2=49k \text{ или } n=\frac{49k-2}{3},$$

где $k-$целое число. Перепишем выражение для n в виде

$$n=\frac{48k+k-2}{3}.$$

Для того чтобы получалось n целое, выражение $\frac{k-2}{3}$ должно делится нацело. Обозначим $t=\frac{k-2}{3}$, $k=3t+2,$ тогда

$$n=\frac{49(3t+2)-2}{3}=49t+32.$$

С учётом того, что $n\le 999,\ 49t+32\le 999,\ 49t\le 967,\ t\le\frac{967}{49}$, получим $t=19,\ n=963.$

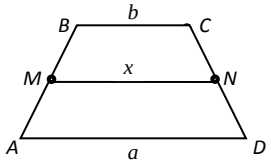
Случай 3. Пусть $5n+1$ делится нацело на 7, тогда $5n+1=7k,$ где $k-$целое число, а $3n+2$ делится нацело на 7, тогда $3n+2=7p,$ где $p-$целое число. Запишем $n=\frac{7k-1}{5}=\frac{5k-2k-1}{5}$ и $n=\frac{7p-2}{3}=\frac{6p+p-2}{3}$. Следовательно, чтобы получалось n целое, выражение $\frac{-2k-1}{5}$ и выражение $\frac{p-2}{3}$ должны делится нацело. Обозначим $t=\frac{-2k-1}{5}$, $r=\frac{p-2}{3}$, откуда $-2k=5t+1,\ p=3r+2.$ Значит,

$$n=\frac{10t}{5}=2t \text{ и } n=\frac{7(3r+2)-2}{3}=7r+4.$$

С учётом того, что $n\le 999,\ 2t\le 999,$ получаем $t\le 499, n\le 998;$ Проверим, что $n=998$ удовлетворяет условию $n=7r+4,$ действительно, $998=7r+4, r=142.$ Таким образом, наибольшее целое трехзначное число 998.

Ответ: 998.

5. Пусть $AD = a, BC = b, MN = x.$



Из подобия трапеций следует пропорциональность сходственных сторон: $\frac{b}{x} = \frac{x}{a}$, тогда $x^2 = a \cdot b, x = \sqrt{ab},$ поскольку $x = \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, то максимальная длина отрезка MN достигается, если $a = b,$ то есть, когда трапеция вырождается в параллелограмм. Значит, $a = b = MN = \frac{4}{2}, MN = 2.$

Ответ: 2.

Вариант № 2

1. Петя сбежал по эскалатору метро, двигающемуся вниз, от верха до низа, развернулся и побежал в обратном направлении. Добежав до верха, измерил затраченное время. В этот момент эскалатор был переключен на движение в обратном направлении. Петя решил повторить эксперимент: пробежать по эскалатору туда и обратно и измерить затраченное время. Какое из времен оказалось большим и во сколько раз, если скорость движения Пети относительно лестницы при подъеме в 1,3 раза больше скорости движения лестницы, а скорость на спуске – в 2,5 раза больше скорости движения лестницы?

Ответ: первое время больше, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{23}{7}.$

2. В мешке деда Мороза находится 34 одинаковых по форме карандашей разного цвета: 6 черных, 8 красных и 20 голубых. Вова, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько карандашей. Какое максимальное количество карандашей может взять Вова, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее четырех карандашей одного цвета и не менее пяти – другого?

Ответ: 7 карандашей.

3. Найти x и y, если $\begin{cases} \{x\} + 2y = -4,5, \\ 2x - y = 5,5, \end{cases}$ где $\{x\}$ – дробная часть числа x.

Ответ: $x = 1{,}5; y = -2{,}5.$

4. Найти наибольшее целое $n \le 500$, для которого число $35n^2 + n - 6$ делится на 15.

Ответ: 496.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с параллельными сторонами AD и BC проведена прямая L параллельная AD и пересекающая стороны AB и CD в точках M и N, соответственно. Известно, что четырехугольники $AMND$ и $MBSN$ подобные, а сумма длин сторон AD и BC не больше 6. Найти наибольшую возможную при этих условиях длину отрезка MN.

Ответ: 3.

Вариант № 3

1. Петя сбежал по эскалатору метро, двигающемуся вниз, от верха до низа, развернулся и побежал в обратном направлении. Добежав до верха, измерил затраченное время. В этот момент эскалатор был переключен на движение в обратном направлении. Петя решил повторить эксперимент: пробежать по эскалатору туда и обратно и измерить затраченное время. Какое из времен оказалось большим и во сколько раз, если скорость движения Пети относительно лестницы при подъеме в 1,6 раза больше скорости движения лестницы, а скорость на спуске – в 2,2 раза больше скорости движения лестницы?

Ответ: первое время больше, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{13}{8}$.

2. В мешке деда Мороза находится 38 одинаковых по форме шариков для елки разных цветов: 8 золотых, 12 серебряных и 18

красных. Катя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько шаров. Какое максимальное количество шаров может взять Катя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее пяти шаров одного цвета и не менее шести – другого?

Ответ: 11 шаров.

3. Найти x и y, если $\begin{cases} 5x-2\{y\}=10, \\ x-y=3,7, \end{cases}$ где $\{y\}$ – дробная часть числа y.

Ответ: $x=2,2;\ y=-1,5.$

4. Найти наибольшее целое $n \le 700$, для которого число $6n^2+19n+10$ делится на 14.

Ответ: 694.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с параллельными сторонами AD и BC проведена прямая L параллельная AD и пересекающая стороны AB и CD в точках M и N, соответственно. Известно, что четырехугольники $AMND$ и $MBSN$ подобные, а сумма длин сторон AD и BC не больше 8. Найти наибольшую возможную при этих условиях длину отрезка MN.

Ответ: 4.

Вариант № 4

1. Петя сбежал по эскалатору метро, двигающемуся вниз, от верха до низа, развернулся и побежал в обратном направлении. Добежав до верха, измерил затраченное время. В этот момент эскалатор был переключен на движение в обратном направлении. Петя решил повторить эксперимент: пробежать по эскалатору туда и обратно и измерить время. Какое из времен оказалось большим и во сколько раз, если скорость движения Пети относительно лестницы при подъеме в 1,7 раза больше скорости движения лестницы, а скорость на спуске – в 2,4 раза больше скорости движения лестницы?

Ответ: первое время больше, $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{27}{17}$.

2. В мешке деда Мороза находится 32 одинаковых по форме кукол, отличающихся по цвету волос: 9 блондинок, 8 брюнеток и 15 шатенок. Маша, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько кукол. Какое максимальное количество кукол может взять Маша, чтобы быть уверенной в том, что в мешке останется не менее пяти кукол с одним цветом волос и не менее семи – с другим?

Ответ: 8 кукол.

3. Найти x и y, если $\begin{cases} 2\{x\}+3y=5,5, \\ x+2y=0,5, \end{cases}$ где $\{x\}$ – дробная часть числа x.

Ответ: $x=-2,5; y=1,5.$

4. Найти наибольшее целое $n \le 800$, для которого число $18n^2+n-4$ делится на 10.

Ответ:796.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с параллельными сторонами AD и BC проведена прямая L параллельная AD и пересекающая стороны AB и CD в точках M и N, соответственно. Известно, что четырехугольники $AMND$ и $MBSN$ подобные, а сумма длин сторон AD и BC не больше 10. Найти наибольшую возможную при этих условиях длину отрезка MN.

Ответ: 5.

2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

Вариант № 1

1. Члены последовательности x_n удовлетворяют для всех n соотношению $x_{n+2}\cdot x_{n+1}=x_{n+1}\cdot x_n-2,\ x_1=2, x_2=2017$. Найти n, для которого $x_n=0$.

2. Найти наибольшее значение выражения $\sin x+\sin y+\sin z$, если x, y и z – неотрицательные числа, для которых $x+y+z=\frac{3\pi}{4}$.

3. При каких целых k выражение $k\cdot\left(k^2-1\right)\left(k^2-9\right)$ делится на 1680?

4. Найти числа x, являющиеся решениями уравнения

$$|x-a|+|x-2a+3|=1$$

хотя бы при одном значении $a\in[3;4]$.

5. Длины сторон параллелограмма равны и 3 и 2. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

Ответы и решения

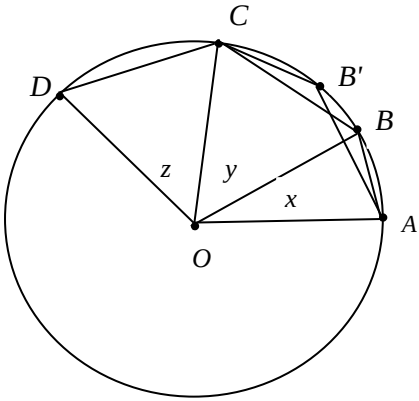
1. Так как члены последовательности x_n удовлетворяют при всех n соотношению $x_{n+2}\cdot x_{n+1}=x_{n+1}\cdot x_n-2$, то это равенство можно переписать в виде: $x_{n+1}\cdot x_n=x_n\cdot x_{n-1}-2$. Полагая в этом равенстве $x_n=0$, получим $0=-2$, что невозможно. Следовательно, задача не имеет решений.

Ответ: Задача не имеет решений.

2. Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в точке O. Отметим на окружности точки A, B, C и D так, что угол AOB равен x, угол BOC равен y, а угол COD равен z, причём $x+y+z=\frac{3}{4}\pi$. Тогда

$$\frac{1}{2}\left(\sin x+\sin y+\sin z\right)=S_{OABCD},$$

где S_{OABCD} – площадь многоугольника $OABCD$.



Найдём, при каких значениях x, y, z, удовлетворяющих условию $x+y+z=\frac{3}{4}\pi$, площадь этого многоугольника будет максимальной (существование искомых значений x, y, z,

следует из того, что выражение $\frac{1}{2}(\sin x+\sin y+\sin z)$ является непрерывной функцией в ограниченной замкнутой области $D=\left\{(x;y;z): x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0;\ x+y+z=\frac{3\pi}{4}\right\})$.. Докажем, что $x=y$. Если это не так, то есть $x\ne y$, то для точки $B'-$ середины дуги AC − площадь $S_{AB'C}>S_{ABC}$, поскольку треугольник $AB'C$ имеет большую высоту, чем треугольник ABC. Тогда $S_{OAB'CD}>S_{OABCD}$ и тогда при этих x, y, z максимум не достигается. Аналогично доказывается, что в точке максимума $x=z$. Следовательно, максимальное значение функции $f(x,y,z)$ достигается при $x=y=z=\frac{\pi}{4}$ и оно равно

$$(\sin x+\sin y+\sin z)_{\max}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $(\sin x+\sin y+\sin z)_{\max}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ достигается при

$$x=y=z=\frac{\pi}{4}.$$

3. Обозначим через $A=(k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)$. Разложим число 1680 на простые множители $1680=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Для того чтобы число A делилось на число 1680, необходимо чтобы оно делилось на числа $3, 5, 7, 2^4$. Рассмотрим отдельно случаи делимости числа A на каждое из этих чисел.

Случай 1. Докажем, что число A делится на 3 при любых k. Действительно, если $k=3n$, то в числе $A=(k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)$. делятся на 3 первый, третий и пятый сомножители. Если $k=3n+1$, то делится на 3 второй сомножитель. Если $k=3n+2$, то делится четвёртый сомножитель.

Случай 2. Докажем, что число A делится на 5 при любых k. Действительно, если $k=5n$, то в числе A делится на 5 третий сомножитель. Если $k=5n+1$, то делится на 5 второй сомножитель. Если

k=5n+2, то делится на 5 пятый сомножитель. Если k=5n+3, то на 5 делится первый сомножитель. Наконец, если k=5n+4, то на 5 делится четвёртый сомножитель.

Случай 3. Докажем, что число A делится на 2^4 при нечётных k=2m+1, $m \in Z$, и k=16n, $n \in Z$. Действительно, если k − чётное число, то есть k=2m, $m \in Z$, то в выражении

$$A = (2m-3)(2m-1)2m(2m+1)(2m+3)$$

все сомножители, кроме третьего, нечётные числа. Поэтому для делимости числа A на 16 необходимо, чтобы m=8n, $n \in Z$. Если k − нечётное число, т.е. k=2m+1, то

$$A = (2m-2)2m(2m+1)(2m+2)(2m+4) =$$
$$= 2^4(m-1)m(m+1)(m+2).$$

Следовательно, число A в этом случае делится на 16 при любом m

Случай 4. Докажем, что число A делится на 7 при $k \neq 7n+2$ и $k \neq 7n+5$, $n \in Z$. Действительно, если $k = 7n$, то в выражении третий сомножитель делится на 7. Если $k = 7n+1$, то второй сомножитель делится на 7. Если $k = 7n+2$, то ни один из сомножителей не делится на 7. Если $k = 7n+3$, то первый сомножитель делится на 7. Если $k = 7n+4$, то пятый сомножитель делится на 7. Если $k = 7n+5$, то ни один из сомножителей не делится на 7. Наконец, если $k = 7n+6$, то четвертый сомножитель делится на 7.

Перейдём к решению задачи для чётных k. Если k=16m, $m \in Z$, и k=7n+2, $n \in Z$, то 16m−7n=2. Решая это уравнение в целых числах, получим:

$$\begin{cases} m = 1 + 7t, \\ n = 2 + 16t, \end{cases} \quad t \in Z,$$

то есть k=16m является решением, если $m \neq 7t+1$, $t \in Z$. Если же k=16m и k=7n+5, то 16m−7n=5. Решая это уравнение в целых числах, получим:

$$\begin{cases} m = 7t - 1, \\ n = 16t - 3, \end{cases} \quad t \in Z,$$

то есть k=16m является решением, если $m \neq 7t-1$, $t \in Z$.

Решим задачу для нечётных k. Если $k=2m+1$, $m\in Z$ и $k=7n+2$, $n\in Z$, то $2m-7n=1$. Решая это уравнение в целых числах, получим:

$$\begin{cases} m = 7t+4, \\ n = 2t+1, \end{cases} \quad t \in Z,$$

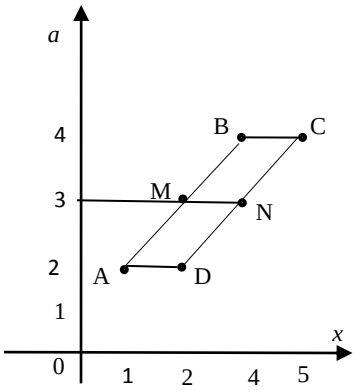
то есть $k=2m+1$, $m\in Z$, является решением, если $m\neq 7t+4$, $t\in Z$. Если же $k=2m+1$, $m\in Z$, и $k=7n+5$, $n\in Z$, то $2m-7n=4$. Решая это уравнение в целых числах, получим:

$$\begin{cases} m = 7t+2, \\ n = 2t, \end{cases} \quad t \in Z,$$

то есть $k=2m+1$, $m\in Z$, является решением, если $m\neq 7t+2$, $t\in Z$. Учитывая всё это, получаем ответ.

Ответ: при $k=2m+1$, $m\in Z$, $m\neq 7t+2$, $m\neq 7t+4$, $t\in Z$, при $k=16m$, $m\in Z$, $m\neq 7t\pm 1$, $t\in Z$.

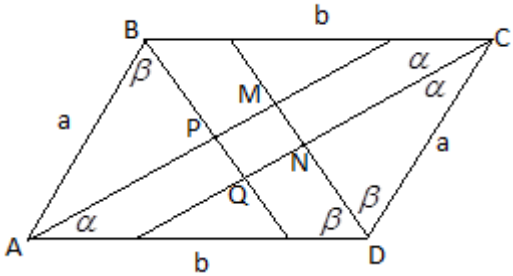
4. Введём на плоскости декартовую прямоугольную систему координат Oxa. Тогда множеством точек на плоскости с координатами $(x;a)$, удовлетворяющими уравнению $|x-a|+|x-2a+3|=1$, является параллелограмм $ABCD$, изображённый на рисунке. Действительно, модули, раскрытые по правилу $(++)$, приводят к уравнению $2x-3a+2=0$, то есть к прямой DC. Модули, раскрытые по правилу $(--)$, приводят к уравнению $2x-3a+4=0$, то есть к прямой AB. Модули, раскрытые по правилу $(-+)$, приводят к уравнению $a=2$, то есть к прямой AD. Модули, раскрытые по правилу $(+-)$, приводят к уравнению $a=4$, то есть к прямой BC. Вычислив координаты пересечения, записанных выше сторон параллелограмма $ABCD$, получим координаты его вер-



шин: $A(1;2), B(4;4), C(5;4), D(2;2)$. Прямая $a=3$ пересекает параллелограмм $ABCD$ в точках M и N с координатами $M\left(\frac{5}{2};3\right)$, $N\left(\frac{7}{2};3\right)$. Для $x\in\left[\frac{5}{2};5\right]$ найдется хотя бы одно значение $a\in[3;4]$, при которых точка $P(x;a)$ принадлежит параллелограмму, т.е. решением задачи является отрезок $x\in\left[\frac{5}{2};5\right]$.

Ответ: $x\in\left[\frac{5}{2};5\right]$.

5. На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с сторонами a и b и с острым углом 2α и четырехугольник $MNPQ$, образованный биссектрисами внутренних углов.



Поскольку $\alpha+\beta=90^0$, то четырехугольник $MNPQ$ – прямоугольник. Вычислим его стороны:

$$MN=DM-DN=b\sin\alpha-a\sin\alpha=(b-a)\sin\alpha,$$
$$QN=CQ-CN=b\cos\alpha-a\cos\alpha=(b-a)\cos\alpha.$$

Тогда

$$S_{MNPQ}=MN\cdot QN=(b-a)^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{(b-a)^2}{2}\sin 2\alpha,$$

$$S_{ABCD}=a\cdot b\cdot\sin 2\alpha,\quad S_{MNPQ}:S_{ABCD}=\frac{(b-a)^2}{2ab}.$$

Так как $a=2,\ b=3$, то $S_{MNPQ}:S_{ABCD}=1:12.$

Ответ: 1:12.

Вариант №2

1. Члены последовательности x_n удовлетворяют для всех n соотношению $x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_{n+1} \cdot x_n - 3,\ x_1 = 3, x_2 = 2018$. Найти n, для которого $x_n = 0$.

Ответ: Задача не имеет решений.

2. Найти наименьшее значение выражения $\cos x + \cos y + \cos z$, если x, y, z – неотрицательные числа, для которых $x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $(\cos x + \cos y + \cos z)_{\min} = 2$ достигается при $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0,\ z = 0.$

3. При каких целых k выражение $k\left(k^2 - 4\right)\left(k^2 - 9\right)$ делится на 168?

Ответ: при чётных $k=2m$, $m \neq 7t \pm 3$, $t \in Z$; при нечётных $k=2m+1$, $m \neq 7t$, $m \neq 7t+6$, $t \in Z$.

4. Найти числа x, являющиеся решениями уравнения

$$|x - 2a| + |x + a - 4| = 2$$

хотя бы при одном значении $a \in [1;2]$.

Ответ: $x \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

5. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 4. Биссектрисы всех его внешних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти площадь круга, описанного около многоугольника.

Ответ: $\frac{\pi(a+b)^2}{4} = \frac{49\pi}{4}$.

Вариант №3

1. Члены последовательности x_n удовлетворяют для всех n соотношению $x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_{n+1} \cdot x_n - 4,\ x_1 = 2, x_2 = 2016.$ Найти n, для которого $x_n = 0$.

Ответ: Задача не имеет решений.

2. Найти наименьшее значение выражения $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$, если x, y и z − неотрицательные числа, для которых

Ответ $(\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z)_{\min} = \dfrac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}$ достигается

при $x = y = z = \dfrac{\pi}{12}$.

3. При каких целых k выражение $k\left(k^2-1\right)\left(k^2-4\right)$ делится на 420?

Ответ: при всех $k \neq 7t \pm 3$, $t \in Z$.

4. Найти числа x, являющиеся решениями уравнения

$$|x+a| + |x-3a+4| = 3$$

хотя бы при одном значении $a \in [0;1]$.

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{7}{2}; -\dfrac{1}{4}\right]$.

5. Длины сторон параллелограмма равны 4 и 5. Биссектрисы всех его внешних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

Ответ: $\dfrac{(a+b)^2}{2ab} = \dfrac{81}{40}$.

Вариант №4

1. Члены последовательности x_n удовлетворяют для всех n соотношению $x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_{n+1} \cdot x_n - 5,\ x_1 = 3, x_2 = 2015.$ Найти n, для которого $x_n = 0$.

Ответ: Задача не имеет решений.

2. Найти наименьшее значение выражения

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z,$$

если x, y и z − неотрицательные числа, для которых $x + y + z = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\left(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z\right)_{\min} = \frac{5}{2}$ достигается при $x = \frac{\pi}{4}, y = 0, z = 0;\quad x = 0, y = \frac{\pi}{4}, z = 0;\quad x = 0, y = 0, z = \frac{\pi}{4}.$

3. При каких целых k выражение $(k-1)\cdot\left(k^2-4\right)\left(k^2-9\right)$ делится на 120?

Ответ: при чётных k вида k=4n+2, $n \neq 5t \pm 2$, $t \in Z$; при нечётных k вида k=2m+1, $m \neq 5t + 2$, $t \in Z$.

4. Найти числа x, являющиеся решениями уравнения

$$|x - 2a + 5| + |x + a - 1| = 3$$

хотя бы при одном значении $a \in [2;3]$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{5}{2};1\right]$.

5. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 5. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти сумму квадратов длин сторон многоугольника.

Ответ: $2(a-b)^2 = 8.$

2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

Вариант № 1

1. Найти x, при которых числа $\log_2(6\sin x), \log_{2\cos x}(6\sin x)$ и $\log_{2\cos x} 4$ могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

2. Найти решения $(x; y)$ системы $\begin{cases} \sin(2x+y)=-1, \\ \cos(x-y)=1, \end{cases}$ в прямоугольнике $-\pi \le x \le \pi/2$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

3. Отрезок $[A; B]$ длины 5 двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y = 2x^2$. Точка M − середина отрезка $[A; B]$. Найти минимально возможное значение расстояния точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

4. Код замка состоит из трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 3. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

5. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} \left|x\cos a + y\sin a - 3/\sqrt{2}\right| + \left|y\cos a - x\sin a\right| = 3/\sqrt{2}, \\ \left|x-y\right| + \left|x+y\right| = 8, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Высота пирамиды равна h. Найти радиус шара, касающегося ребер основания и боковых ребер пирамиды или их продолжений.

1. Из условия, что числа $\log_2(6\sin x), \log_{2\cos x}(6\sin x)$ и $\log_{2\cos x} 4$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, имеем:

$$\log_2(6\sin x)\cdot\log_{2\cos x} 4 = \left(\log_{2\cos x}(6\sin x)\right)^2.$$

После очевидных преобразований получим:

$$\log_{2\cos x}(6\sin x)\left(2-\log_{2\cos x}(6\sin x)\right)=0.$$

Возможны два случая.

Случай 1. Если $\log_{(2\cos x)}(6\sin x)=0$, то заданные три числа не могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии, так как среди них есть члены равные нулю.

Случай 2. $\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\neq 0$, тогда $\log_{(2\cos x)}(6\sin x)=2.$ Из этого равенства получим, что:

$$\begin{cases}\cos x>0, \quad \cos x\neq\dfrac{1}{2},\\ 6\sin x=4\cos^2 x,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\cos x>0, \quad \cos x\neq\dfrac{1}{2},\\ 2\sin^2 x+3\sin x-2=0.\end{cases}$$

Отсюда окончательно получаем:

$$\begin{cases}\cos x>0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Следовательно, $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z.$

2. Решения заданной системы $\begin{cases}\sin(2x+y)=-1,\\ \cos(x-y)=1,\end{cases}$ имеют вид:

$$\begin{cases}2x+y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=\ 2\pi m,\end{cases} \quad k,m\in Z.$$

Из этой системы находим

$$\begin{cases} x = -\pi/6 + 2\pi(m+k)/3, \\ y = -\pi/6 + 2\pi(k-2m)/3, \end{cases} \quad k, m \in Z.$$

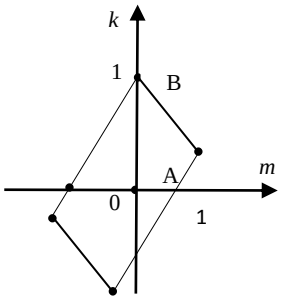
Из условия $-\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ получим

$$-\frac{5}{4} \le m + k \le 1, \qquad (1)$$

а из условия $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ получим

$$-\frac{1}{2} \le k - 2m \le 1. \qquad (2)$$

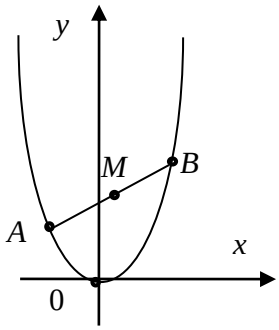
На плоскости параметров $(m;k)$ неравенства (1) и (2) ограничивают параллелограмм (см. рисунок), внутри которого только две точки A(0,0) и B(0,1) имеют целочисленные координаты. Им соответствуют решения $\begin{cases} x_1 = -\pi/6, \\ y_1 = -\pi/6, \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = \pi/2, \\ y_2 = \pi/2. \end{cases}$



Ответ: $\begin{cases} x_1 = -\pi/6, \\ y_1 = -\pi/6; \end{cases} \begin{cases} x_2 = \pi/2, \\ y_2 = \pi/2. \end{cases}$

3. Обозначим через $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ координаты концов отрезка [*A*;*B*], лежащих на параболе $y = 2x^2$, а через $M(x; y)$ − середину отрезка [*A*;*B*]. Точка *M* будет иметь координаты:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



По условию задачи имеем:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 25.$$

Подставляя $y_1 = 2x_1^2$, $y_2 = 2x_2^2$, получим:

$$(x_2 - x_1)^2 + (2x_2^2 - 2x_1^2)^2 = 25$$

или

$$(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2 (x_1 + x_2)^2 = 25.$$

Перепишем это равенство в виде:

$$(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)\left(4(x_2 + x_1)^2 + 1\right) = 25.$$

Так как $x_1 + x_2 = 2x,\ x_1^2 = \dfrac{y_1}{2},\ \ x_2^2 = \dfrac{y_2}{2}$ и $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = y,$ то из последнего равенства получим:

$$(y - 2x_1x_2)\left(16x^2 + 1\right) = 25. \qquad \text{(A)}$$

Рассмотрим равенство:

$$4x^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} + 2x_1x_2 = y + 2x_1x_2.$$

Тогда из этого равенства следует, что $2x_1x_2 = 4x^2 - y.$ Подставляя найденное значение $2x_1x_2$ в (A), получим:

$$(2y - 4x^2)\left(16x^2 + 1\right) = 25.$$

Из этого равенства найдём ординату точки M:

$$y = 2x^2 + \frac{25}{2\left(16x^2 + 1\right)}.$$

Перепишем это равенство в следующем виде:

$$y = 2x^2 + \frac{25}{2\left(16x^2 + 1\right)} = \frac{1}{8}\left(16x^2 + 1\right) + \frac{25}{2\left(16x^2 + 1\right)} - \frac{1}{8}.$$

Обозначим через $t = 16x^2 + 1 \geq 1.$ Тогда расстояние точки M до оси абсцисс будет равно $y = \dfrac{t}{8} + \dfrac{25}{2t} - \dfrac{1}{8}.$ Введём обозначения: $a = \dfrac{t}{8} > 0,\quad b = \dfrac{25}{2t} > 0.$ Тогда из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим получим:

$$y + \frac{1}{8} = a + b \geq 2\sqrt{ab} = \frac{5}{2},$$

причём равенство достигается при $a=b$, то есть при $\frac{t}{8}=\frac{25}{2t}$. Следовательно, минимальное расстояние точки *M* до оси абсцисс достигается при *t*=10 и $y_{\min}=\frac{5}{2}-\frac{1}{8}=\frac{19}{8}$. Это значение $y_{\min}$ достигается при тех значениях *x*, когда $16x^2+1=10$, то есть при $x=\pm\frac{3}{4}$.

Ответ: 1) $d_{min}=\frac{19}{8}$; 2) $x_{\min}=\pm\frac{3}{4}$.

4. Пусть *x*, *y* и *z* − первая, вторая и третья цифры кода. Обозначим через *p*(*t*) количество решений уравнения $x+y=t$, где t − целое число на интервале $0\le t\le 18$. Заметим, что

$$p(t)=\begin{cases} t+1, t\in[0;9], \\ 19-t, t\in[10;18]. \end{cases}$$

С помощью этой формулы легко заполнить таблицу числа различных решений уравнения $x+y=3k-z$ для допустимых значений $k=0,1,...,9$ и $z=0,1,...,9$.

K \ z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	4	3	2	1						
2	7	6	5	4	3	2	1			
3	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
4	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4
5	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7				1	2	3	4	5	6	7
8							1	2	3	4
9										1

Пустые клетки таблицы можно заполнить нулями (решений уравнение не имеет).

Сумма чисел по всем клеткам таблицы равна количеству кодов, сумма цифр которых делится на 3. Подсчет этой суммы осуществляется с учетом симметрии таблицы (сумма чисел в первых пяти строках равна сумме чисел в последних пяти), а также формулой суммы членов арифметической прогрессии. Число благоприятных кодов $m_3 = 334$. Общее число кодов равно $n_3 = 10^3$. Тогда

$$P(A) = \frac{334}{1000} = 0,334.$$

Ответ: $P(A) = 0,334.$

5. Множество точек на плоскости с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими второму уравнению системы, является границей квадрата с центром в начале координат, сторонами, параллельными координатным осям и имеющими длину 8.

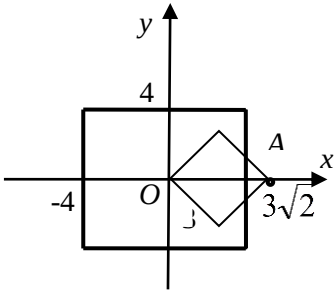


Рис. 1

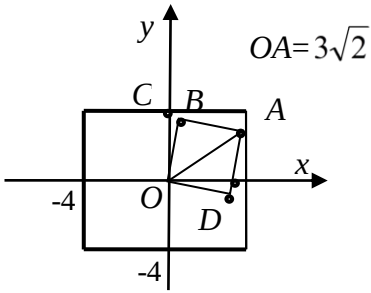


Рис. 2

Множество точек, координаты которых удовлетворяют второму уравнению системы, является границей квадрата *ABOD* с диагональю *OA* длины $3\sqrt{2}$, который вращается вокруг точки *O* при изменении параметра *a* (см. рис. 1 и рис. 2). Запишем координаты его вершин:

$$A(3\sqrt{2}\cos\alpha;3\sqrt{2}\sin a),\ B\left(3\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right);3\sin a\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$D\left(3\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right);3\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right),\ O(0;0).$$

С ростом a «малый» квадрат (со стороной 3) вращается относительно начала координат. На рис. 2 отмечено его положение при $a=a_1$, когда вершина A находится на стороне «большого» квадрата (со стороной 8). Так как $3\sqrt{2}\cos a_1=4,$ то $\cos a_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и, следовательно, $a_1=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

Покажем, что при $a=a_1$ остальные вершины «малого» квадрата находятся внутри «большого». Угол COB равен $\frac{\pi}{4}-a_1,$ следовательно, $OC=3\cos\left(\frac{\pi}{4}-a_1\right)=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4+\sqrt{2}}{2}<4.$ Это означает, что точка B находится внутри «большого» квадрата. Угол EOD равен $\frac{\pi}{4}-a_1,$ тогда $EO=\frac{3}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-a_1\right)}=\frac{18}{4+\sqrt{2}}<4.$ Это означает, что и точка D находится внутри «большого» квадрата.

В результате мы доказали, что при $a=a_1$ система имеет единственное решение. В силу симметрии при увеличении a точка A появится на другой стороне большого квадрата при $a=a_2=\frac{\pi}{2}-a_1=\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$, тогда система снова имеет единственное решение. При $a\in(a_1;a_2)$ система решений не имеет. При увеличении a на число кратное $\frac{\pi}{2}$ картина повторяется. Итак, система имеет единственное решение при

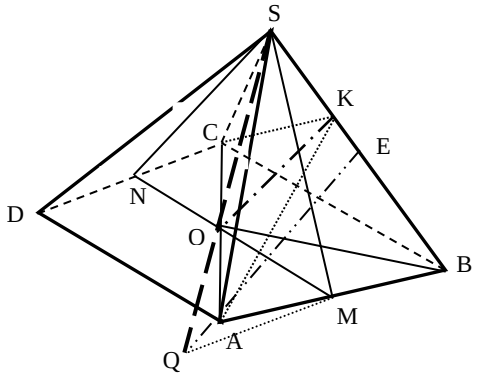
$$a = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2},\ a = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z,$$

или в другой форме записи

$$a = \pm a_1 + \frac{\pi k}{2} = \pm\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2}.$$

Ответ: $a = \pm\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

6. Введём обозначения: $SO=h$, $OM=a$, N, M − середины сторон основания, угол MSN равен 90°. Следовательно, $h=a$, $AB=2a=2h$.



Пусть Q − центр искомого шара, а OK − перпендикуляр к ребру SB; QE − параллельно OK; $OQ=x$. Так как $OA = h\sqrt{2} = SM$, то $SB = h\sqrt{3}$. Угол SBO равен углу SOK и пусть он равен α. Обозначим через φ угол AKO и найдём, чему равны углы α и φ. Из площади треугольника SAB следует, что $2\sqrt{2}h^2 = AK \cdot h\sqrt{3}$.

$2\sqrt{2}h^2 = AK \cdot h\sqrt{3}$. Отсюда находим $AK = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}h$. Тогда $\sin\varphi = \frac{OA}{AK} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, угол $\varphi = 60^0$. Из прямоуголь-

ного треугольника SOK имеем: $OK^2 = \frac{8}{3}h^2 - 2h^2 = \frac{2}{3}h^2$. Следовательно, $\cos\alpha = \frac{OK}{OS} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Так как $QS = h + x$, $QE = QM = R$ – радиус искомого шара и угол SQE равен α, то $(h+x)\cos\alpha = \sqrt{h^2 + x^2}$ или $\frac{2}{3}(h+x)^2 = h^2 + x^2$. Перепишем последнее уравнение в виде: $x^2 - 4hx + h^2 = 0$. Отсюда находим $x = h\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$. Тогда $R^2 = x^2 + h^2 = 4xh = 4h^2\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$. Следовательно, $R_{1,2} = 2h\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ (касание рёбер или их продолжений).

Ответ: $R_{1,2} = 2h\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

Вариант №2

1. Найти x, при которых числа $\log_3\left(2\cos x\right), \log_{4\operatorname{ctg} x}\left(2\cos x\right)$ и $\log_{4\operatorname{ctg} x}\sqrt{3}$ могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

Ответ: нет решений.

2. Найти решения $\left(x; y\right)$ системы $\begin{cases} \sin(2x - y) = -1 \\ \cos(x - y) = 0 \end{cases}$ в прямоугольнике $0 \le x \le \pi$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

3. Отрезок $\left[A; B\right]$ длины 2 двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y = -5x^2$. Точка M – середина отрезка $\left[A; B\right]$. Найти минимально возможное значение

расстояния точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

Ответ: 1) $d_{min} = \frac{19}{20}$; 2) $x_{\min} = \pm\frac{3}{10}$.

4. Код замка состоит трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 4. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

Ответ: $P(A) = 0,254$.

5. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} |x\cos a + y\sin a - 2| + |y\cos a - x\sin a| = 2, \\ |x - y| + |x + y| = 6, \end{cases}$$

не имеет решений?

Ответ: $a \in \left(\arccos\frac{3}{4} + \frac{\pi k}{2}; \arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in Z.$

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Боковое ребро пирамиды равна b. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

Ответ: $R = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$

Вариант №3

1. Найти x, при которых числа $\log_2\left(4\sin^2 x\right), \log_{\sqrt[3]{2tgx}}\left(4\sin^2 x\right)$ и $\log_{\sqrt[3]{2tgx}} 8$ могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

2. Найти решения $(x; y)$ системы $\begin{cases} \sin(2x + y) = 1, \\ \cos(2x - y) = -1, \end{cases}$ в прямоугольнике $-\pi \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi$.

Ответ: $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8}, \\ y = \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

3. Отрезок $[A;B]$ длины 2 двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y = 13x^2$. Точка M − середина отрезка $[A;B]$. Найти минимально возможное значение расстояния точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

Ответ: 1) $d_{min} = \dfrac{51}{52}$, 2) $x_{\min} = \pm\dfrac{5}{26}$.

4. Код замка состоит трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 5. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

Ответ: $P(A) = 0,2$.

5. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} |x\cos a + y\sin a - 2| + 2|y\cos a - x\sin a| = 2, \\ |x - y| + |x + y| = 4\sqrt{3}, \end{cases}$$

имеет два решения?

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}\right), k \in Z$.

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Ребро основания пирамиды a. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и перпендикулярной боковому ребру.

Ответ: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Вариант№4

1. Найти x, при которых числа $\log_3\left(3tg^2x\right), \log_{\sqrt{6}\sin x}\left(3tg^2x\right)$ и $\log_{\sqrt{6}\sin x} 9$ могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

Ответ: $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

2. Найти решения $(x;y)$ системы $\begin{cases}\sin(2x+3y)=-1,\\ \cos(x+y)=0,\end{cases}$ в прямоугольнике $-\pi\le x\le 3\pi/2$, $\pi/2\le y\le 2\pi.$

Ответ: $\begin{cases}x=-\pi,\\ y=\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pi,\\ y=\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\ y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$

3. Отрезок $[A;B]$ длины 10 двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y=-5x^2$. Точка M – середина отрезка $[A;B]$. Найти минимально возможное значение расстояния точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

Ответ: 1) $d_{min}=\dfrac{99}{20}$; 2) $x_{\min}=\pm\dfrac{7}{10}.$

4. Код замка состоит трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 6. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

Ответ: $P(A)=0{,}167.$

5. При каких a система уравнений

$$\begin{cases}4\left|x\cos a+y\sin a\right|+\left|y\cos a-x\sin a-8\right|=8,\\ \left|x-y\right|+\left|x+y\right|=16\sqrt{3},\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z.$

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Радиус шара, вписанного в пирамиду, равен r. Найти объем пирамиды.

Ответ: $V = \dfrac{4\left(7+5\sqrt{2}\right)}{3} r^3$.

2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

Вариант № 1

1. Для каждого допустимого a найти наименьшее решение уравнения $2\log_a^2 x + \log_a x^3 - 3 = \log_x a^2$.

2. Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения

$$\cos 2x - \sin 2x - \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin x + \sin x = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\{2\sin x\} + [\cos 2x] = 0,$$

где $[a]$ – целая часть числа a (наибольшее целое число не превосходящее a), $\{a\}$ – дробная часть числа a: $\{a\} = a - [a]$.

4. Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

5. При каких a уравнение $4\sin^2 x + a4\cos x - a = 0$ имеет решения на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

6. Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тре-

мя последовательными членами геометрической прогрессии с знаменателем $q=3$. Найти двугранный угол при основании пирамиды, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар.

Ответы и решения

1. Запишем область допустимых значений параметра a и переменной x. Это $a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ x\neq 1.$ С учетом того, что $\log_x a^2 = 2\log_x a = \dfrac{2}{\log_a x}$, перепишем уравнение в виде:

$$2\log_a^2 x + 3\log_a x - 3 = \frac{2}{\log_a x}.$$

После умножения уравнения на $\log_a x \neq 0$, получим:

$$2\log_a^3 x + 3\log_a^2 x - 3\log_a x - 2 = 0.$$

Если сделать замену $t=\log_a x$, то получим кубическому уравнение $2t^3+3t^2-3t-2=0$. Это уравнение имеет следующие корни $t_1=1,\ t_2=-2,\ t_3=-\dfrac{1}{2}$. Им соответствуют три решения логарифмического уравнения: $x_1=a,\ x_2=\dfrac{1}{a^2},\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

На интервале $a\in(0;1)$ справедливы неравенства $a<\dfrac{1}{\sqrt{a}}<\dfrac{1}{a^2}$. Следовательно, $x_{\min}(a)=a.$ Аналогично, на полуоси $a\in(1;+\infty)$ выполнено неравенство $\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{\sqrt{a}}<a.$ В этом случае $x_{\min}(a)=\dfrac{1}{a^2}$.

Ответ: $x_{\min}(a)=\begin{cases} a,\ a\in(0;1); \\ \dfrac{1}{a^2},\ a\in(1;+\infty). \end{cases}$

2. Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\sin 2x\cdot(\operatorname{ctg}2x-1)-\sin x\cdot(\operatorname{ctg}2x-1)=0.$$

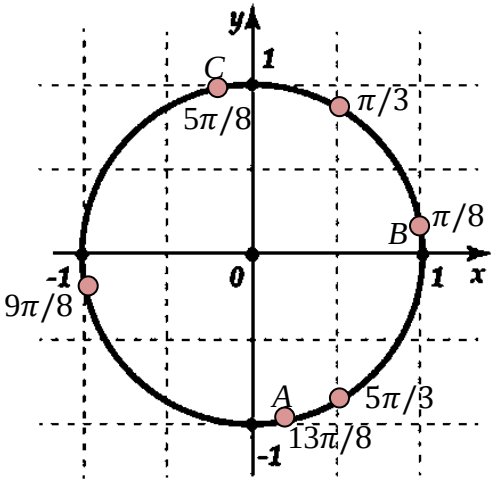
Вынося общий множитель, получим:

$$(\operatorname{ctg}2x-1)(\sin 2x-\sin x)=0 \text{ или } \sin x\cdot(2\cos x-1)\cdot(\operatorname{ctg}2x-1)=0.$$

Запишем множество решений уравнения ($\sin x\neq 0$ из ОДЗ):

$$\left[\begin{array}{l} ctg\,2x=1, \\ \cos x=\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in Z, \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z. \end{array}\right.$$

Для удобства изобразим это множество на тригонометрическом круге

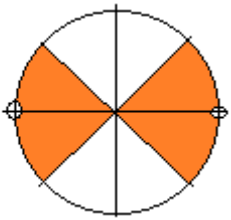


Наименьшая дуга секторов, содержащих три решения, соответствует сектору AOB или BOC. Каждый из этих секторов имеет угол $\dfrac{\pi}{2}$ и длину дуги окружности, на которую он опирается, равную так же $\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $L=\dfrac{\pi}{2}$

3. Дробная часть числа a может быть целым числом только, если $\{a\}=0$. Тогда $\begin{cases}\{2\sin x\}=0,\\ [\cos 2x]=0,\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin x=\{0,\pm 1/2,\pm 1\},\\ 0\le\cos 2x<1.\end{cases}$

Решение неравенства изображено на рисунке.



Следовательно, решением системы является $\sin x=\pm\frac{1}{2}$. Отсюда находим $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

4. Пусть шаг вперед – успех, а шаг назад – неудача, тогда имеем схему Бернулли с вероятностями успеха и неудачи $p=q=1/2$. Распределение числа успехов

$$p_k=C_{10}^k/2^{10}.$$

Если k – число успехов, то $(10-k)$ –число неудач. Поэтому координата робота от начала движения $d=k-(10-k)=2k-10$. Условие $|d|>2$ равносильно тому, что либо $k\le 3$, либо $k\ge 7$. Поэтому искомая вероятность равна

$$p=p_0+p_1+p_2+p_3+p_7+p_8+p_9+p_{10}.$$

Так как сумма всех вероятностей равна 1, то

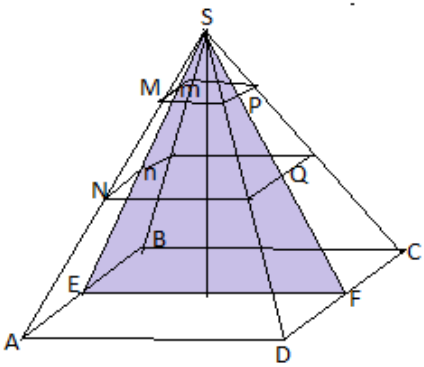
$$p=1-(p_4+p_5+p_6)=1-\left(\frac{210}{1024}+\frac{252}{1024}+\frac{210}{1024}\right)=\frac{352}{1024}=\frac{11}{32}.$$

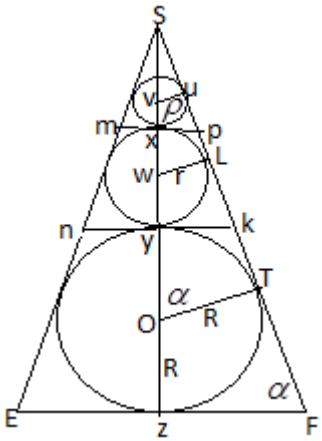
Ответ: $\frac{11}{32}$.

5. Искомые значения a принадлежат области значений функции $a=\dfrac{4\sin^2 x}{5-4\cos x}=\dfrac{4(1-\cos^2 x)}{5-4\cos x}$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Замена $t=\cos x$ приводит к задаче нахождения области значений функции $a=\dfrac{4(1-t^2)}{5-4t}$ на отрезке $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. Производная $a'=8\dfrac{(2t-1)(t-2)}{(5-4t)^2}$ неотрицательна на всем отрезке $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, поэтому $a_{\min}=a(0)=\dfrac{4}{5}$, $a_{\max}=a(0,5)=1$.

Ответ: $[0,8\ ;1]$.

6. В пирамиде проведем осевое сечение, перпендикулярное стороне основания (см. рисунки). По условию $Sn=Sm\cdot q$, $SE=Sn\cdot q=Sm\cdot q^2$. Тогда $\triangle Smp\sim\triangle Snk$ с коэффициентом подобия q и $\triangle Smp\sim\triangle SEF$ с коэффициентом подобия q^2.





Так как в усеченную пирамиду можно вписать шар, то в трапецию $nmpk$ можно вписать окружность. Так как образом при преобразовании подобия с центром в точке S и коэффициентом подо-

бия q отрезка mp является отрезок nk, а отрезок nk переходит в отрезок EF, то окружность радиуса r с центром в точке w переходит в окружность радиуса $R = r \cdot q$ с центром в точке O, вписанную в трапецию $EnkF$. Аналогично, окружность с центром в точке w является образом окружности радиуса ρ, вписанной в треугольник Smp. Из подобия двух треугольников OTS и FzS имеем $(H - R)\cos\alpha = R,$ где $H = Sz$. Отсюда находим

$$R = \frac{H\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Если $Sy = h$, то $h + 2R = H = hq$ или $h(q-1) = 2R.$ Подставим в последнее равенство полученное выше выражение для R:

$$h(q-1) = \frac{2H\cos\alpha}{1+cos\alpha} = \frac{2hq\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Выразим q из последнего равенства:

$$q\left(1 - \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = 1 \text{ или } q = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

По условию q=3, следовательно, имеем уравнение $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = 3.$

Отсюда находим $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\alpha = 60^0$.

Ответ: 60^0

Вариант № 2

1. Для каждого допустимого a найти наибольшее решение уравнения $2\log_a^2 x - \log_a x^3 + \log_x a^2 = 3$.

Ответ: $x_{\max}(a) = \begin{cases} \frac{1}{a}, a \in (0;1); \\ a^2, \ a \in (1;+\infty). \end{cases}$

2. Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения

$$6\sin^2 x\cdot\cos 3x-2\cos 3x\cdot\cos^2 x+4\sin^2 x=1.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{18}$.

3. Решить уравнение $\{2\cos 2x\}+2[\sin x]=0$, где $[a]-$целая часть числа a (наибольшее целое число не превосходящее a), $\{a\}-$дробная часть числа $a:\{a\}=a-[a]$.

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ x=\pi k,$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$$

4. Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 9 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии не более трех шагов от начала движения.

Ответ: $\frac{105}{128}$.

5. При каких a уравнение $4\cos^2 x+4a\sin x+5a=0$ имеет решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$?

Ответ: $a\in\left[-1;-\frac{3}{7}\right]$.

6. Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии с знаменателем $q=4$. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду $SABCD$, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар, а сторона основания пирамиды равна a.

Ответ: $\frac{a}{4}$.

Вариант № 3

1. Для каждого допустимого a найти наименьшее решение уравнения $2\log_a^2 x - \log_a x^5 + \log_{\sqrt{x}} a + 1 = 0$.

Ответ: $x_{\min}(a) = \begin{cases} a^2, a \in (0;1); \\ \frac{1}{\sqrt{a}}, \ a \in (1;+\infty). \end{cases}$

2. Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения
$16\sin^2 2x \cdot \cos^3 x - (3\cos x + 1)(4\sin^2 2x - 3) = 3(\cos 3x + 3\cos x)$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

3. Решить уравнение $2\{\cos x\} + [\sin 2x] = 0$, где $[a]$ – целая часть числа a (наибольшее целое число не превосходящее a), $\{a\}$ – дробная часть числа a: $\{a\} = a - [a]$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}, x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

4. Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 8 шагов и остановился. Найти вероятность того, что робот окажется в том же месте откуда он начал движение.

Ответ: $\frac{35}{128}$.

5. При каких a уравнение $\cos^2 x + 5a\sin x - 2a = 0$ имеет решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$?

Ответ: $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$.

6. Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии с знаменателем $q = 5$. Найти объем пирамиды $SABCD$, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар, а сторона основания пирамиды равна a.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$.

Вариант № 4

1. Для каждого допустимого a найти наибольшее решение уравнения $3\log^2_{\sqrt{a}} x - \log_a x^4 + \log_{\sqrt{x}} a^2 = 12$.

Ответ: $x_{\min}(a) = \begin{cases} \frac{1}{a}, a \in (0;1); \\ a, \ a \in (1;+\infty). \end{cases}$

2. Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения

$$4\sin^2 3x \cdot \cos 2x - 2\cos 6x - \cos 2x + 1 = 0.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{9}$.

3. Решить уравнение $2\{\sin 2x\} + [\cos x] = 0$, где $[a]$ – целая часть числа a (наибольшее целое число не превосходящее a), $\{a\}$ – дробная часть числа a: $\{a\} = a - [a]$.

Ответ: $x = \pm\frac{11\pi}{12} + 2\pi k, \ x = \pm\frac{7\pi}{12} + 2\pi k, \ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

4. Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 7 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более четырех шагов от начала движения.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

5. При каких a уравнение $4a\sin^2 x - 2\cos x + 3a = 0$ имеет решения на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$?

Ответ: $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right]$.

6. Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии с знаменателем $q = 6$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар, а сторона основания пирамиды равна a.

Ответ: $\frac{7a^2}{5}$.

2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

Вариант № 1

1. Члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = a$ для любых n и целом a. При каких a число 637 является членом последовательности?

2. Найти наибольшее значение функции

$$y = 24\pi x / (9\pi^2 + 16x^2)$$

на множестве решений уравнения

$$\sin x \cdot \cos 2x - 2\cos^3 x + \cos 2x - \sin x + 2\cos x = 1.$$

3. Найти натуральное число, делящееся на 225 и имеющее 15 различных делителей.

4. На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

5. При каких a система

$$\begin{cases} \left(x^2 + (y-7)^2 - 9\right)\left((x-4)^2 + (y-3)^2 - 1\right) = 0, \\ ax - y - 4a - 2 = 0, \end{cases}$$

имеет четыре решения?

6. Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K, соответственно, и образует угол 45^0 с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA \cdot SB \cdot SC = 5\sqrt{15}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Ответы и решения

1. Перепишем исходное равенство $a_{n+1} = 2a_n + 3$ в виде $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$. Отсюда следует, что числа $b_n = a_n + 3$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 2$ и первым членом $b_1 = a + 3$. Используя формулу общего члена геометрической прогрессии $b_n = (a+3)2^{n-1}$, получим $a_n = (a+3)2^{n-1} - 3$. Нужно найти целые a и n, при которых $a_n = 637$: $(a+3) \cdot 2^{n-1} - 3 = 637$. Перепишем это уравнение в виде:

$$(a+3) \cdot 2^{n-1} = 640 = 5 \cdot 2^7 \quad \text{или} \quad a + 3 = 5 \cdot 2^{8-n}.$$

Число $a + 3$ может быть целым для $n = 1, 2, \ldots 8$, т.е. существует восемь таких значений $a = 5 \cdot 2^{8-n} - 3$ для $n = 1, 2, \ldots 8$.

Ответ: $a = 5 \cdot 2^{8-n} - 3$ для $n = 1, 2, \ldots 8$.

2. Решаем тригонометрическое уравнение

$$-\sin x\cdot\left(1-\cos 2x\right)+\cos x\cdot\left(2-2\cos^2 x\right)-(1-\cos 2x)=0.$$

Делая преобразования, получаем следующее уравнение

$$-\sin x\cdot\left(1-\cos 2x\right)+\cos x\cdot\left(1-\cos 2x\right)-(1-\cos 2x)=0$$

или

$$\left(1-\cos 2x\right)\left(\cos x-\sin x-1\right)=0.$$

Находим множество решений последнего уравнения:

$$\left[\begin{array}{c}\cos 2x=1\\ \cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=\pi k\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k\\ x=2\pi m\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{array}\right.,n,m,k\in Z$$

Переходим к нахождению наибольшего значения функции

$$y=24\pi x/(9\pi^2+16x^2)$$

на найденном множестве решений.

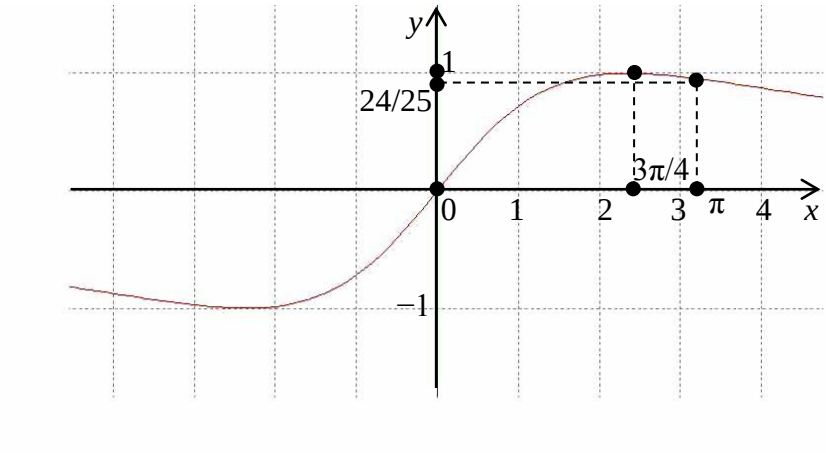
Вычислим производную функции y:

$$y'=24\pi\cdot\frac{9\pi^2-16x^2}{(9\pi^2+16x^2)^2}$$

Производная y' меняет свой знак в точке $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ с минуса на плюс и в точке $x=\dfrac{3\pi}{4}$ с плюса на минус. Следовательно, $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ – точка минимума, а $x=\dfrac{3\pi}{4}$ – точка максимума. Вычислим минимальное и максимальное значение y:

$$y_{\min} = y\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -1, y_{\max} = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1.$$

График функции y приведен на рисунке.



Ближайшими к $x_{\max} = \frac{3\pi}{4}$ решениями уравнения являются $x = 0$ и $x = \pi$, поэтому наибольшее значение функции $y(x)$ должно достигается на одной из них. Так как $y(0) = 0,\ y(\pi) = \frac{24}{25}$, то максимальное значение функции равно 24/25.

Ответ: $y_{\max} = \frac{24}{25} = 0,96$.

3. Заметим, что число a с разложением на простые делители вида $a = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$ имеет $(s_1+1)(s_2+1)\cdot\ldots\cdot(s_k+1)$ различных делителей. Если a делится на 225, то $a = 3^{s_1} \cdot 5^{s_2} \cdot b$, причем $s_1 \geq 2$ и $s_2 \geq 2$. Если $b > 1$, то оно имеет по крайней мере один простой делитель p: $p \neq 3,\ p \neq 5$. Тогда общее число различных делителей числа a не меньше $(s_1+1)(s_2+1)\cdot 2 \geq 3\cdot 3\cdot 2 = 18 > 15$, что противоречит условию. Отсюда следует, что $b = 1$ и общее

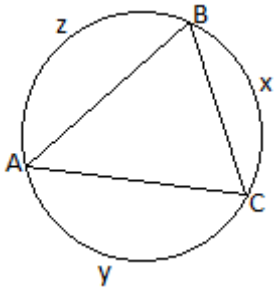
число делителей числа a равно $(s_1+1)(s_2+1)=15$. Последнее возможно в двух случаях.

Случай 1. $s_1=2,\ s_2=4.$ Тогда $a_1=3^2\cdot 5^4=5625.$

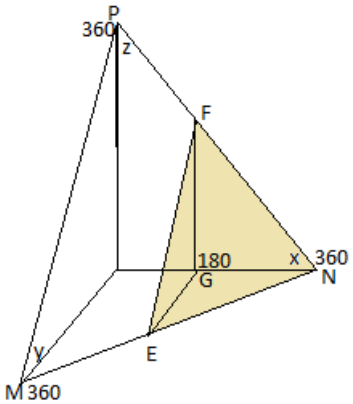
Случай 2. $s_1=4,\ s_2=2.$ Тогда $a_2=3^4\cdot 5^2=2025.$

Ответ: 5625, 2025.

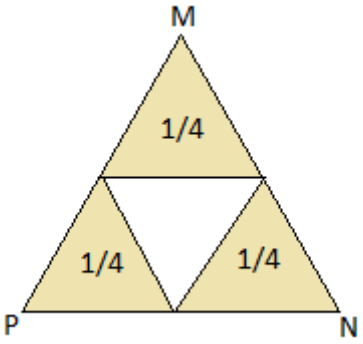
4. Обозначим через x, y, z величины (в градусах) дуг окружности, на которые опираются углы при вершинах A, B, C треугольника.



По условию $x+y+z=360,\ x>0,\ y>0,\ z>0$. Множество допустимых троек являются координатами точек треугольника MNP в пространстве:



Если треугольник тупоугольный, например, $x > 180$, то допустимые точки с координатами $(x; y; z)$ принадлежат треугольнику EFN, площадь которого равна $\frac{1}{4} S_{NMP}$. Аналогично, для допустимых точек при $y > 180$ и $z > 180$. Поскольку вероятность события пропорциональна площади соответствующей ему области в треугольнике MNP, имеем $P(A|x > 180) = \frac{S_{EFN}}{S_{MNP}} = \frac{1}{4}$. Ту же вероятность имеют события $P(A|y > 180) = \frac{1}{4}$, $P(A|z > 180) = \frac{1}{4}$. В итоге получаем $P(A) = \frac{3}{4}$.



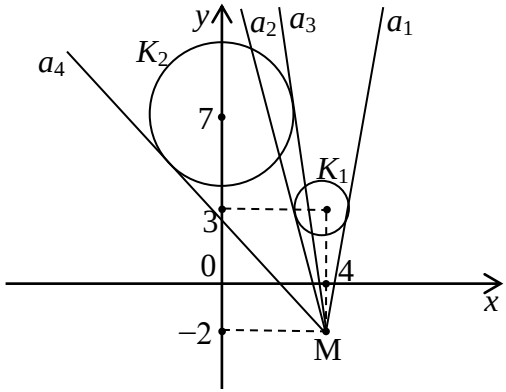
Ответ: $\frac{3}{4}$.

5. Пусть K_1, K_2 – окружности соответственно с уравнениями

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 - 1 = 0,\ x^2 + (y-7)^2 - 9 = 0,$$

$M(4; -2)$ – точка, через которую проходят прямые, заданные уравнением $ax - y - 4a - 2 = 0$ при любых a; a_1, a_2 – значения параметра a, соответствующие касательным к окружности K_1, проведенным из точки M; a_3, a_4 – значения параметра a, соответ-

ствующие касательным к окружности K_2, проведенным из точки M.



Вычислим a_1, a_2. Имеем систему уравнений:

$$(x-4)^2+(y-3)^2-1=0,$$

$$ax-y-4a-2=0.$$

Из второго уравнения выражаем $y=a(x-4)-2$ и подставляем его в первое уравнение системы:

$$(x-4)^2+\left(a(x-4)-5\right)^2-1=0.$$

После упрощения приходим к квадратному уравнению:

$$\left(1+a^2\right)(x-4)^2-10a(x-4)+24=0.$$

Условием касания является равенство нулю дискриминанта полученного квадратного уравнения. Вычислим дискриминант:

$$D\left(a\right)=100a^2-96(1+a^2)=4a^2-96.$$

Уравнение $D\left(a\right)=0$ имеет корни $a_1=2\sqrt{6},\ a_2=-2\sqrt{6}.$

Вычисление a_3, a_4 проводится аналогично. Записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+(y-7)^2-9=0, \\ ax-y-4a-2=0. \end{cases}$$

Выражаем y из второго уравнения и подставляем в первое уравнение:

$$x^2+\left(a(x-4)-9\right)^2-9=0.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду:

$$\left(1+a^2\right)x^2-2a(4a+9)x+(4a+9)^2-9=0.$$

Вычисляем дискриминант полученного уравнения:

$$D\left(a\right)=4a^2(4a+9)^2-4(1+a^2)((4a+9)^2-9)=$$

$$=-4(4a+9)^2+36(1+a^2).$$

и приравниваем его нулю. В результате приходим к уравнению: $7a^2+72a+72=0.$ Находим его корни:

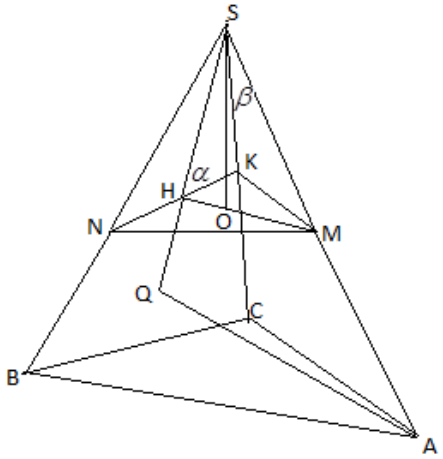
$$a_3=\frac{-36-6\sqrt{22}}{7},\ a_4=\frac{-36+6\sqrt{22}}{7}.$$

Отметим, что $a_3<a_2$. Следовательно, для всех $a\in\left(a_3;a_2\right)$ прямая $ax-y-4a-2=0$ пересекает окружности K_1 и K_2, а система имеет четыре решения.

Ответ: $a\in\left(\frac{-36-6\sqrt{22}}{7};-2\sqrt{6}\right).$

6. Пусть плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках $M, N, K,$ соответственно, и образует угол α с боковой гранью $SBC.$ Найдем объем пирамиды $SABC$ при условии, что произведение ее ребер $SA\cdot SB\cdot SC=p,$ а пирамида $SMNK$ правильная.

Введем обозначения: $H-$середина NK; $\measuredangle MHS=\alpha-$заданный угол; $\measuredangle MSK=\beta-$угол при вершине правильной пирамиды; $\measuredangle MSH=\gamma-$ угол наклона ребра AS к плоскости боковой грани SBC; AQ – высота пирамиды $SABC,$ опущенная на грань SBC; $a-$сторона правильного треугольника MNK; l – боковое ребро правильной пирамиды $SMNK$.



Выразим объем пирамиды $SABC$ через введенные переменные:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot AQ = \frac{1}{6} SB \cdot SC \cdot \sin\beta \cdot SA \cdot \sin\gamma = \frac{p}{6} \sin\beta \cdot \sin\gamma .$$

Выразим $\sin\beta, \sin\gamma$ через тригонометрические функции угла α. Из $\triangle SNK$ находим $a = 2l \sin\beta / 2$. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды и площадь ее основания связаны соотношением $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$. Используя эту формулу, получим

$$\frac{3}{2} l^2 \sin\beta = \frac{\sqrt{3} a^2}{4\cos\alpha}.$$

Исключим из последнего уравнения $l = \dfrac{a}{2\sin\beta/2}$:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{a^2}{4\sin^2\beta/2} \sin\beta\cos\alpha = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда находим $tg\beta/2 = \sqrt{3}\cos\alpha,$ тогда

$$\sin\beta = \frac{2tg\beta/2}{1+tg^2\beta/2} = \frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}.$$

Применим теорему синусов к $\triangle SHM$: $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{3}\cdot a\cdot\sin\alpha}{2l}$.

Применим теорему Пифагора к $\triangle SOM$:

$$l^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}tg\alpha\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{12}\left(tg^2\alpha + 4\right).$$

Тогда $l = \dfrac{a\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$, $\sin\gamma = \dfrac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$.

Объединяя формулы, получим объем

$$V_{SABC} = \frac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}} = \frac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}.$$

Подставляя данные задачи $\alpha = 45^0$, $p = 5\sqrt{15}$, находим $V_{SABC} = 3$.

Ответ: 3.

Вариант № 2

1. Члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1} = 5a_n - 4$, $a_1 = a$ для любых n и целом a. При каких a число 4379 является членом последовательности?

Ответ: $a = 4379$.

2. Найти наименьшее значение функции $y = x^2/(x^2+\pi^2)$ на множестве решений уравнения

$$\sin x\cdot\cos x + (1+2\sqrt{2})\cos^2 x - \sin 2x\cdot\cos x = \left(\sqrt{2}+2\cos^2 x\right)\cos x.$$

Ответ: $\dfrac{1}{17}$.

3. Найти натуральное число, делящееся на 63 и имеющее 14 различных делителей.

Ответ: 5103.

4. На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC остроугольный.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

5. При каких a система

$$\begin{cases} \left((x-3)^2+y^2-9\right)\left((x+2)^2+(y-4)^2-4\right)=0, \\ x+ay+4a-2=0, \end{cases}$$

имеет три решения?

Ответ: $a=\frac{6\sqrt{2}-4}{7}$, $a=\frac{8-\sqrt{19}}{15}$.

6. Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K, соответственно, и образует угол 60^0 с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA\cdot SB\cdot SC=14\sqrt{7}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Ответ: 6.

Вариант № 3

1. Члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1}=3a_n+5$, $a_1=a$ для любых n и целом a. При каких a число 8014 является членом последовательности?

Ответ: $a=8014$.

2. Найти наибольшее значение функции $y=\pi x/(\pi^2+16x^2)$ на множестве решений уравнения

$$\sqrt{3}\sin^2 x-(2+\sqrt{3})\sin x\cos x+\sin x(\sqrt{3}-2\sin x\cos x)+\sin 2x\cos x=0.$$

Ответ: $\frac{3}{26}$.

3. Найти натуральное число, делящееся на 72 и имеющее 21 различных делителей.

Ответ: 576.

4. На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что в треугольнике ABC хотя бы один угол более чем в два раза больше других углов.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

5. При каких a система

$$\begin{cases} \left(x^2+(y-3)^2-9\right)\left((x+3)^2+(y+2)^2-4\right)=0, \\ ax+y+a+5=0, \end{cases}$$

имеет два решения?

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{4-3\sqrt{14}}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{12}; \frac{4+3\sqrt{14}}{4}\right)$.

6. Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K, соответственно, и образует угол 30^0 с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA \cdot SB \cdot SC = 13\sqrt{39}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Ответ: 9.

Вариант № 4

1. Члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1} = 7a_n - 6$, $a_1 = a$ для любых n и целом a. При каких a число 4465 является членом последовательности?

Ответ: $a = 4465$.

2. Найти наименьшее значение функции

$$y = (4x^2 - 4\pi x + 3\pi^2) / (4x^2 - 4\pi x + 5\pi^2)$$

на множестве решений уравнения

$$\sqrt{3}(\sin x + \cos x) - 4\sqrt{2}\sin x\cos x + 4\sin^2 x\cos x = \sqrt{6} - 4\sin x\cos^2 x.$$

Ответ: $\frac{19}{37}$.

3. Найти натуральное число, делящееся на 45 и имеющее 22 различных делителей.

Ответ: 295245.

4. На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что в треугольнике ABC хотя бы один угол более чем в три раза больше других углов.

Ответ: $\frac{3}{10}$.

5. При каких a система

$$\begin{cases} \left((x-5)^2+(y-5)^2-4\right)\left((x-3)^2+(y-2)^2-1\right)=0, \\ x-ay-4=0, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a=-\frac{4}{3}$, $a=\frac{5+2\sqrt{22}}{21}$.

6. Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K, соответственно, и образует угол $arctg\sqrt{5}$ с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA\cdot SB\cdot SC=27\sqrt{15}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Ответ: 15.

Т.И. Бухарова, С.А. Гришин, О.В. Нагорнов, Д.Г. Орловский,
Е.Х. Садекова, Е.Б. Сандаков

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом»
Математика

В помощь школьникам 7–11 классов

Учебно-методическое пособие

Под редакцией О.В. Нагорнова

Редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет подготовлен Т.И. Бухаровой, Е.Х. Садековой
Подписано в печать 12.10.2018. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 15,75. Печ. л. 15,75. Тираж экз.
Изд. № 003-1. Заказ №

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31