НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МИФИ

С.Е. Муравьёв

ОТРАСЛЕВАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «РОСАТОМ»

ФИЗИКА

учебно-методическое пособие для учащихся инженерных классов московской школы

УДК 371.2(075)
ББК 74.200.587
О-86

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом». Физика. В помощь школьникам 7–11 классов: *Учебно-методическое пособие* / С.Е. Муравьев. – М.: НИЯУ МИФИ, 2018. – 124 с.

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» по математике и физике в течение многих лет проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» для школьников 7–11 классов в Москве, городах расположения объектов атомной отрасли, крупных образовательных центрах РФ. Ежегодно в олимпиаде участвуют около 20000 школьников, обычно около 500 из них становятся победителями и призерами олимпиады. В пособии, написанном составителями заданий олимпиады «Росатом», приведены задания всех туров олимпиады 2013–2014 учебного года. К большинству задач даны подробные комментарии, ответы или решения.

Предназначено участникам олимпиады «Росатом» будущих лет для подготовки к олимпиаде.

ISBN 978-5-7262-2517-3

СОДЕРЖАНИЕ

1. Структура и формат олимпиады «Росатом»

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). Олимпиада проводится более 30 лет[1]. Основная цель олимпиады «Росатом» – выявление одаренных школьников, которые интересуются инженерно-техническими специальностями, способны к техническому творчеству и инновационному мышлению и проявляют интерес к вопросам ядерной энергетики и высоких технологий, и ориентирование их на выбор инженерно-технических направлений обучения.

В состав оргкомитета, методической комиссии и жюри олимпиады входят члены Российской академии наук, государственные и общественные деятели РФ, ректоры ряда ведущих инженерных университетов, главные редакторы образовательных журналов для школьников. Председатель оргкомитета – ректор НИЯУ МИФИ.

Олимпиада «Росатом» проводится по математике и физике для школьников 7–11 классов. Школьники невыпускных классов составляют около половины участников олимпиады. Олимпиада проводится в два этапа – отборочный и заключительный (для всех классов).

Отборочный этап состоит из нескольких независимых туров и проходит в октябре-январе. Один из отборочных туров проходит дистанционно (с использованием сети Интернет). До заключительного этапа олимпиады допускаются лучшие участники отборочного этапа (до 45 %, но обычно несколько меньше). Пройти на заключительный этап можно из любого отборочного тура, количество участий в отборочных турах никак не ограничивается.

Заключительный этап олимпиады проходит в феврале-марте в очной форме. Из-за огромной географии олимпиады «Росатом» заключительные туры в разных городах могут проходить неодновременно. Поэтому для их проведения методическая комиссия по единым методическим принципам готовит несколько комплектов равноценных заданий (одинаковой структуры и сложности), по которым заключительный тур в разных городах проводится в разные сроки.

[1] До 2006 г. олимпиада называлась Олимпиадой Минатома России, до 1999 – Физико-математической олимпиадой МИФИ.

Однако каждый участник может участвовать в заключительном туре олимпиады только один раз по физике и один раз по математике.

Для широкого продвижения олимпиады «Росатом» в регионы РФ и отборочный, и заключительный этапы олимпиады «Росатом» проходят в очной форме во многих регионах РФ с обязательным выездом представителей оргкомитета. В 2017–2018 учебном году олимпиада проводилась на 41 региональной площадке в РФ и зарубежом. И здесь мы хотим поблагодарить наших друзей и коллег – региональных соорганизаторов олимпиады «Росатом», благодаря которым тысячи лучших школьников страны могут участвовать в олимпиаде.

В 2017–2018 учебном году в олимпиаде «Росатом» участвовало более 23 тысяч школьников 65 субъектов Российской Федерации и всех федеральных округов (в сумме по математике и физике и по всем классам). Несколько тысяч участвовали в заключительном этапе, победителями и призерами стали около 1000 участников.

Задания олимпиады составляются так, чтобы максимально точно проранжировать участников, и содержат как более простые, так и более сложные задания. Простые задачи соответствуют задачам раздела С ЕГЭ, уровень наиболее сложных задач соответствует уровню заданий заключительного тура Всероссийской олимпиады школьников.

Олимпиада «Росатом» по математике и физике много лет входит в Перечень олимпиад школьников, утверждаемый Министром образования и науки РФ, и потому ее победители и призеры (одиннадцатиклассники) могут получить особые права при зачислении в вузы, причем в любые – не только в НИЯУ МИФИ, – в которых в качестве вступительных испытаний есть математика или физика. По закону эти особые права могут быть такими (какое из них выбрать определяется каждым вузом): либо зачисление без вступительных испытаний; либо участие в конкурсе с оценкой 100 баллов по ЕГЭ по предмету, соответствующему профилю олимпиады; либо оценка 100 баллов по внутреннему вступительному испытанию в данном вузе (если оно есть). Многие технические вузы РФ зачисляют победителей и призеров олимпиады «Росатом» без вступительных испытаний. В Перечень олимпиад школьников 2017–2018 учебного года олимпиада «Росатом» по физике входит под первым уровнем, по математике – под вторым (от уровня олимпиады и степени диплома зависят права победителей и призеров). Ежегодно в НИЯУ МИФИ поступает около 40–50 % победителей и призеров олимпиады «Росатом», еще столько же в НИЯУ МИФИ поступает победителей и призеров других олимпиад школьников, обеспечивая около 40 % бюджетного набора в университет.

Оргкомитет олимпиады «Росатом» помогает будущим участникам подготовиться к олимпиаде. На сайте НИЯУ МИФИ размещены задания прошлых лет, в том числе и в формате видеолекций (http://mephi.ru/entrant/olimpiads/rosatom/Pobediteli/podgotovka.php). Олимпиадные задания с подробным разбором ежегодно публикуются в образовательных журналах для школьников («Квант», «Потенциал», «Математика» – 1-е сентября, «Физика» – 1-е сентября). Это дает возможность подготовиться к олимпиаде школьникам из самых отдаленных окраин нашей страны. Лучшие задания олимпиады «Росатом» неоднократно публиковались в рубрике «Задачник Кванта» журнала «Квант». Опубликован и размещен в открытом доступе на сайте олимпиады ряд учебных пособий с разбором олимпиадных задач. Дважды в год (в конце мая – начале июня и в январе) оргкомитет олимпиады «Росатом» проводит школы для 8–10-классников, показавших высокие результаты в олимпиаде текущего года. На школы приглашаются известные деятели олимпиадного движения, которые работают со школьниками. Такие мероприятия оказываются очень полезными для подготовки школьников к олимпиадам будущих лет. Участие в таких школах абсолютно бесплатно для участников.

2. Общие методические рекомендации по подготовке к олимпиаде «Росатом»

Так как же решают олимпиадные задачи по математике и физике и как лучше готовиться к олимпиадам? Чтобы научиться решать задачи, их нужно … решать. Пробовать, сомневаться, еще раз пробовать. Еще и еще пытаться «прочувствовать» логику физических законов и математических теорем, и снова пробовать решать задачи. Все же остальные советы по решениям являются конкретными и касаются тех разделов математики и физики, которые рассматриваются в данной задаче. Тем не менее, несколько общих рекомендаций по решению задач (и, соответственно, подготовке к участию в олимпиадах) можно сформулировать. При решении задач полезно придерживаться определенного порядка действий.

1. Прочтите условие. Внимательно прочтите условие. Перескажите его себе «своими словами» и «своими же словами» сформулируйте вопрос задачи. Если вам это поможет, выпишите все данные задачи (слева, справа, снизу или сверху – не важно).

2. Начертите чертеж, причем постарайтесь сделать это в правильном масштабе: на чертеже кубы должны быть похожи на кубы, круги на круги, наклонные плоскости на наклонные плоскости. «Функционально» хороший чертеж поможет решить задачу, плохой – помешает. На чертеже приведите все данные условия, чтобы они были у вас «перед глазами».

3. Постарайтесь использовать численные значения физических величин в Международной системе единиц (СИ), хотя это и необязательно, особенно если ответ выражается через отношение однородных величин.

4. И теперь главное. Вспомните те определения, теоремы и законы, которые «управляют» рассматриваемой задачей или явлением, вспомните их логику, принципы, идеи, похожие случаи.

5. И ничего не выдумывайте. Все выдумали до нас! Поэтому если вы пытаетесь «выдумать» решение, то, скорее всего, вы действуете неправильно. Ваша задача не выдумать, а вспомнить! Вспомнить логику математических теорем и физических законов и точно «приспособить» их к рассматриваемому случаю. Но приспособить нужно будет не формулу, а ту логику, которая в теоремах и законах содержится, и точно ей следовать.

6. Постарайтесь решить полученные на основе математических теорем и физических законов уравнения в общем («буквенном») виде, поскольку в этом случае проще проверить ответ, проверить размерность, частные случаи и т.д.

7. Проверьте размерность ответа. Единицы его измерения должны совпадать с единицей измерения искомой величины. Это означает, что если вы должны вычислить скорость, то ответ должен иметь размерность м/с, км/с, км/ч, но никак не метры, килограммы и т.д. Помните, что складывать или сравнивать величины разной размерности нельзя, и если в ответ у вас входит комбинация $a+m$, где a – ускорение тела, а m – его масса, то этот ответ неправильный.

8. Проверьте свой ответ на здравый смысл: если масса получилась отрицательной, скорость – больше скорости света, а ответ при каких-то возможных значениях параметров содержит нуль в знаменателе – ваш ответ неверен.

9. Попробуйте проверить ответ на частные случаи, т.е. рассмотрите такие модификации задачи, когда ответ понятен и без решения, и убедитесь, что полученный вами ответ в него переходит.

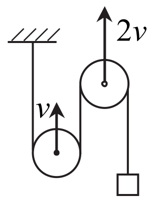
Конечно, умение решать задачи приходит с опытом и изученными книгами. Используйте для подготовки книги из списка литературы в конце настоящего пособия. Используйте и эту книгу, ведь именно для этого мы ее и писали.

3. Отборочные туры

3.1. Очный отборочный тур, 7 класс

1. В сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с основанием с размерами $2a \times 3a$ налита вода. На поверхности воды лежит поршень, притертый к стенкам сосуда. В поршне сделано квадратное отверстие с размерами $a \times a$, в которое вставлена трубка. Поршень двигают вниз со скоростью $v = 1$ м/с. С какой скоростью поднимается уровень воды в трубке?

2. Когда из сосуда объемом $V = 0,5$ л вылили воду, в сосуде осталось $v = 0,6$ мл воды в виде капелек на стенках. Затем сосуд герметично закрыли и нагрели так, что вся вода испарилась. Найти плотность получившегося газа, если первоначальная плотность воздуха в сосуде равна $\rho = 1,17$ кг/м^3, а плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.



3. В системе, изображенной на рисунке, левый блок движется вверх со скоростью v, правый – вверх со скоростью $2v$. В каком направлении и с какой скоростью движется груз?

4. Из тонкой проволоки сделана сетка с прямоугольными ячейками с размерами a и $2a$. На сетку падает широкий пучок маленьких шариков. Какая часть пучка пролетит через сетку, если радиус каждого шарика $a/4$? Считать, что пролетают сетку только те шарики, которые ее не касаются.

5. По кольцевому треку едут два велосипедиста. Длина трека равна $l = 360$ м. велосипедисты движутся с постоянными скоростями $v_1 = 18$ м/с и $v_2 = 12$ м/с. В некоторый момент времени велосипедисты оказались в одной точке трека. Через какое минимальное время велосипедисты снова окажутся в этой же точке трека?

Ответы и решения

1. Пусть в некоторый момент времени поршень занимает положение, показанное на рисунке. Пусть, далее, прошел интервал времени Δt. Тогда поршень опустится на величину $v\Delta t$, а вода, находившаяся под поршнем, должна будет перейти в трубку. Поэтому уровень воды в трубке повысится на такую величину Δx, что объем воды, вытесненной поршнем, будет равен объему воды, перешедшей в трубку

$$v\Delta t\left(S - S_1\right) = \Delta x S_1$$

где $S = 6a^2$ – площадь сечения сосуда; $S_1 = a^2$ – площадь сечения трубки. Отсюда находим скорость поднятия уровня воды в трубке

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 5v = 5 \text{ см/с.}$$

2. Масса влажного воздуха в сосуде равна

$$m = \rho V + \rho_0 v .$$

Отсюда находим плотность воздуха в сосуде

$$\rho_1 = \frac{m}{V} = \rho + \frac{\rho_0 v}{V} = 2{,}37 \text{ г/см}^3.$$

3. Очевидно, что груз перемещается потому, что перемещаются блоки. Поэтому для нахождения скорости груза свяжем перемещения блоков с перемещением груза. За некоторый интервал времени Δt левый блок переместится вверх на величину $v\Delta t$, правый – вверх на величину $2v\Delta t$. Тогда длина веревки слева от левого блока уменьшится на $v\Delta t$, между блоками увеличится на $2v\Delta t - v\Delta t = v\Delta t$. Поэтому длина куска веревки справа от правого блока не изменится, но точка правого блока, от которой этот кусок начинается, поднимется на величину $2v\Delta t$. Это и будет перемещение груза за время Δt – $\Delta x_{\text{гр}} = 2v\Delta t$. Отсюда заключаем, что скорость груза направлена вверх и равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{\Delta x_{\text{гр}}}{\Delta t} = 2v .$$

4. Поскольку шарики не являются точечными, пролететь сетку смогут только те из них, центры которых находятся на расстоянии, большем, чем радиус шарика от проволоки. Поэтому каждую ячейку сетки площадью $S_1 = 2a \cdot a = 2a^2$ пролетят только те шарики, центры которых попали в прямоугольник с размерами $a - a/4 = \frac{3a}{4}$ и $2a - a/4 = \frac{7a}{4}$, т.е. площадью $S_2 = \frac{3a}{4} \cdot \frac{7a}{4} = \frac{21a^2}{16}$. А поскольку шарики распределены по ячейке равномерно (их центры могут попасть на любую точку ячейки), то доля пролетевших шариков равна отношению площади той части ячейки, попадая в которую шарики пролетят сетку, к площади ячейки

$$\frac{N_{\text{пролет}}}{N_{\text{полн}}} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{21a^2}{16} : 2a^2 = \frac{21}{32}.$$

5. Чтобы велосипедисты встретились в той же точке они оба должны за одно и то же время проехать расстояния, кратные длине трека:

$$v_1 t = nl,$$

$$v_2 t = kl,$$

где n и k – целые числа. Деля эти уравнения друг на друга, получим

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n}{k}.$$

Подставляя сюда значения скоростей, найдем

$$\frac{n}{k} = \frac{3}{2}.$$

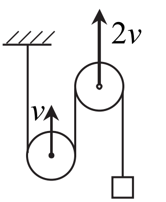
Это уравнение имеет множество решений в целых числах. Но минимальному времени встречи велосипедистов отвечают минимальные целые решения: $n = 3$, $k = 2$. Теперь можно найти и время встречи

$$t = \frac{nl}{v_1} = \frac{3l}{v_1} = 60 \text{ с.}$$

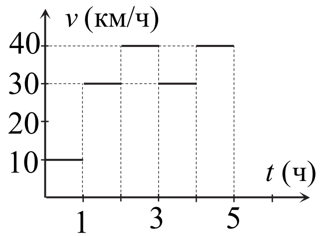
1. В цилиндрический сосуд с площадью дна S наливают две несмешивающихся жидкости – одну массой m плотностью ρ и вторую – массой $m/2$ и плотностью 2ρ. Найти высоту столба жидкости в сосуде и ее давление около дна.

2. К концам горизонтально расположенного рычага прикреплены грузы, при этом объем правого груза в $n = 1,5$ раза больше, чем левого. Чему равно отношение плотностей левого и правого грузов $\rho_{лев} / \rho_{прав}$, если отношение длин правого и левого плеч рычага $l_{прав} / l_{лев} = k = 2$? Массой рычага пренебречь.

3. В калориметре находится вода с температурой $T = 20$ °С. В калориметр опустили нагреватель, и через время $\Delta t = 10$ мин из калориметра выкипела 1/6 часть воды. Через какое время выкипит еще такая же масса воды? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота парообразования воды $L = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Теплоемкостью калориметра пренебречь, считать, что вся энергия, сообщаемая калориметру, тратится только на нагрев воды и ее испарение.



4. В системе, изображенной на рисунке, левый блок движется вверх со скоростью v, правый – вверх со скоростью $2v$. В каком направлении и с какой скоростью движется груз?



5. Автомобиль едет из одного города в другой со скоростью, зависимость которой от времени приведена на рисунке. Определить среднюю скорость автомобиля на одной пятой части пути.

Ответы и решения

1. Так как жидкости не смешиваются, более плотная жидкость окажется снизу, менее плотная – сверху. Толщину слоев жидкости можно найти из следующих очевидных соотношений:

$$h_\rho = \frac{m}{\rho S}, \qquad h_{2\rho} = \frac{(m/2)}{2\rho S} = \frac{m}{4\rho S}.$$

Отсюда находим высоту столба жидкости в сосуде

$$h = h_\rho + h_{2\rho} = \frac{5m}{4\rho S}$$

и ее давление около дна

$$p = \rho g h_\rho + 2\rho g h_{2\rho} = \frac{3m}{2S}.$$

2. Условие равновесия рычага дает

$$m_{\text{лев}} l_{\text{лев}} = m_{\text{прав}} l_{\text{прав}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_{\text{лев}}}{m_{\text{прав}}} = \frac{l_{\text{прав}}}{l_{\text{лев}}} = k.$$

Выражая теперь массы грузов через их плотности и объемы, получим

$$\frac{\rho_{\text{лев}} V_{\text{лев}}}{\rho_{\text{прав}} V_{\text{прав}}} = k \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_{\text{лев}}}{\rho_{\text{прав}}} = k\frac{V_{\text{прав}}}{V_{\text{лев}}} = kn = 3.$$

3. Интенсивное испарение воды происходит при температуре кипения. Поэтому можно считать, что при сообщении воде тепла она сначала нагревается до температуры кипения, а затем начинает испаряться. Поэтому для времени выкипания шестой части воды условие теплового баланса дает

$$P\Delta t = cm\left(T_0 - T\right) + \frac{1}{6}mL, \tag{1}$$

где P – мощность нагревателя; $T_0 = 100$ °C – температура кипения воды. Аналогично для выкипания еще одной шестой части воды (при том, что вода уже имеет температуру кипения) получаем из условия теплового баланса

$$P\Delta t_1 = \frac{1}{6}mL. \tag{2}$$

Деля формулу (1) на формулу (2), получим

$$\Delta t_1 = \frac{L\Delta t}{6c\left(T_0 - T\right) + L} = 6{,}7 \text{ мин.}$$

4. Очевидно, что груз перемещается потому, что перемещаются блоки. Поэтому для нахождения скорости груза свяжем перемещения блоков с перемещением груза. За некоторый интервал времени Δt левый блок переместится вверх на величину $v\Delta t$, правый – вверх на величину $2v\Delta t$. Тогда длина веревки слева от левого блока уменьшится на $v\Delta t$, между блоками увеличится на $2v\Delta t - v\Delta t = v\Delta t$. Поэтому длина куска веревки справа от правого блока не изменится, но точка правого блока, от которой этот кусок начинается, поднимется на величину $2v\Delta t$. Это и будет перемещение груза за время Δt – $\Delta x_{\text{гр}} = 2v\Delta t$. Отсюда заключаем, что скорость груза направлена вверх и равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{\Delta x_{\text{гр}}}{\Delta t} = 2v.$$

5. Путь, пройденный автомобилем, находим, применяя формулу «расстояние-время-скорость» к каждому из пяти часов движения автомобиля (или как площадь под графиком скорости) – $S = 150$ км. Одна пятая этого расстояния – 30 км. Из графика заключаем, что за первый час автомобиль проходит 10 км, а за второй (двигаясь с постоянной скоростью) – 30 км. Следовательно, 30 км автомобиль пройдет за 1 первый час и 2/3 второго часа. Поэтому средняя скорость автомобиля на одной пятой части пути равна

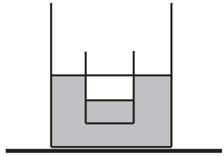
$$v_{\text{ср}} = \frac{30}{5/3} = 18 \text{ км/ч.}$$

3.3. Очный отборочный тур, 9 класс

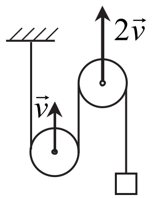
1. Тело бросают вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Какой путь пройдет тело за время $t = 1{,}6$ с после броска? $g = 10$ м/с^2.

2. Кусок льда с температурой $t_0 = 0$ °С бросают в сосуд с водой с температурой $t_1 = 20$ °С. Через некоторое время лед полностью тает, и в сосуде устанавливается температура $t_2 = 16$ °С. При какой максимальной начальной температуре воды лед не смог бы растаять полностью? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/кг·град; удельная теплота плавления льда $\lambda = 340000$ Дж/кг. Теплообменом с другими телами пренебречь.

3. В цилиндрическом стакане с водой, стоящим на столе, плавает другой цилиндрический стакан, в который также налито некоторое количество воды. Как изменится уровень воды в большом стакане, если в малый налить массу воды m? Площадь сечения большого стакана $3S$, малого – S. Плотность воды ρ. При наливании воды в малый стакан он не опускается на дно большого. Стенки стаканов очень тонкие.



4. В системе, изображенной на рисунке, левый блок движется вверх со скоростью v, правый – вверх со скоростью $2v$. В каком направлении и с какой скоростью движется груз?



5. Два жука, расстояние между которыми S, бегут навстречу друг другу. Один жук бежит с постоянной скоростью v. Второй жук движется с постоянной скоростью $2v$, но в тот момент, когда расстояние между жуками уменьшается вдвое, он останавливается и отдыхает такое же время, какое он двигался. Затем он снова движется со скоростью $2v$, но в тот момент, когда расстояние между жуками уменьшается вдвое по сравнению с тем, каким оно было, когда он начал двигаться во второй раз, он снова останавливается, отдыхает такое же время, какое он двигался во второй раз, а потом опять начинает двигаться. И далее движение повторяется. Какие расстояния пройдут жуки до встречи?

Ответы и решения

1. Поскольку тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с, поднимается вверх в течение времени $\Delta t = 1$ с ($\Delta t = v_0 / g$), то за данное в условии время тело успеет подняться до верхней точки траектории и спуститься на какую-то величину. Поэтому путь, пройденный телом за время $t = 1{,}6$ с, складывается из пути, пройденного до верхней точки, и пути, пройденного затем от верхней точки до того положения, в котором тело окажется через время $t=1{,}6$ с после броска. Используя известную формулу для максимальной высоты подъема

$$h=\frac{v_0^2}{2g}=5 \text{ м}$$

и находя по законам равноускоренного движения высоту положения тела над поверхностью земли через время $t=1{,}5$ с после броска

$$h_1=v_0t-\frac{gt^2}{2}=3{,}2 \text{ м},$$

получим

$$S=2h-h_1=\frac{v_0^2}{g}-v_0t+\frac{gt^2}{2}=6{,}8 \text{ м}.$$

2. Пусть масса куска льда – m, масса воды – M. Тогда уравнение теплового баланса для первого случая дает

$$m\lambda+cm\left(t_2-t_0\right)=cM\left(t_1-t_2\right).$$

Из этого уравнения находим отношение масс воды и льда

$$\frac{M}{m}=\frac{\lambda+c\left(t_2-t_0\right)}{c\left(t_1-t_2\right)}.$$

Во втором случае теплоты, которая выделяется при охлаждении воды до нуля градусов, недостаточно, чтобы растопить лед. Поэтому неравенство теплового баланса имеет вид

$$m\lambda\geq cM\left(t_x-t_0\right),$$

где t_x – искомая температура. Отсюда находим

$$t_x\leq t_0+\frac{\lambda\left(t_1-t_2\right)}{\lambda+c\left(t_2-t_0\right)}=3{,}3 \text{ °C}.$$

3. Условие равновесия плавающего стакана дает

$$Mg+mg=\rho gV_{\text{п.ч.}},$$

где M – масса плавающего стакана; m – масса воды в нем; $V_{\text{п.ч.}}$ – объем погруженной в воду части стакана. Очевидно, для погруженной в воду части стакана можно записать $V_{\text{п.ч.}}=Sh_1+Sh_2$, где h_1 – высота слоя воды в стакане; h_2 – разность уровней воды в большом и малом стакане. Отсюда получаем

$$Mg+mg=\rho gSh_1+\rho gSh_2 .$$

А поскольку стенки плавающего стакана – тонкие, произведение ρSh_1 равно массе воды налитой в плавающий стакан. Отсюда заключаем, что разность уровней воды в большом и малом стаканах определяется только массой плавающего стакана и не зависит от массы воды в нем $M=\rho Sh_2$. А поскольку слой воды в малом стакане увеличивается на величину

$$\Delta h=\frac{\Delta m}{\rho S},$$

то на эту величину увеличится расстояние от поверхности воды в большом стакане до дна малого стакана. Используя это условие, найдем подъем уровня воды в большом стакане.

Пусть малый стакан при наливании в него воды опустился на величину Δx_1 (по отношению к своему первоначальному положению). Тогда он вытеснил дополнительно из большого стакана объем воды $\Delta x_1 S$. Это вытеснение приводит к поднятию уровня в большом стакане на величину Δx_2, которую можно найти из очевидного соотношения

$$\left(3S-S\right)\Delta x_2=S\Delta x_1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x_2=\frac{\Delta x_1}{2}.$$

А поскольку $\Delta x_2+\Delta x_1=\Delta h$, находим из предыдущей формулы

$$\Delta x_1=\frac{2\Delta h}{3}=\frac{2\Delta m}{3\rho S}.$$

4. Очевидно, что груз перемещается потому, что перемещаются блоки. Поэтому для нахождения скорости груза свяжем перемещения блоков с перемещением груза. За некоторый интервал времени Δt левый блок переместится вверх на величину $v\Delta t$, правый – вверх на величину $2v\Delta t$. Тогда длина веревки слева от левого блока уменьшится на $v\Delta t$, между блоками увеличится на

$2v\Delta t - v\Delta t = v\Delta t$. Поэтому длина куска веревки справа от правого блока не изменится, но точка правого блока, от которой этот кусок начинается, поднимется на величину $2v\Delta t$. Это и будет перемещение груза за время Δt – $\Delta x_{\text{гр}} = 2v\Delta t$. Отсюда заключаем, что скорость груза направлена вверх и равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{\Delta x_{\text{гр}}}{\Delta t} = 2v.$$

5. Если бы жуки двигались без остановки, то скорость их сближения составляла бы $3v$, они встретились бы через время

$$t = \frac{S}{3v}.$$

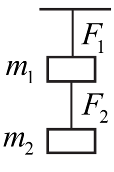
И прошли бы до встречи расстояния

$$S_1 = vt = \frac{vS}{3v} = \frac{S}{3}, \qquad S_2 = 2vt = \frac{2vS}{3v} = \frac{2S}{3}.$$

В нашей задаче второй жук половину времени движения движется со скоростью $2v$, половину стоит, поэтому его средняя скорость равна v, средняя скорость сближения жуков равна $2v$. Отсюда находим время до встречи и пути, пройденные жуками

$$t = \frac{S}{2v}, \qquad S_1 = vt = \frac{vS}{2v} = \frac{S}{2}, \qquad S_2 = vt = \frac{vS}{2v} = \frac{S}{2}.$$

3.4. Очный отборочный тур, 10 класс

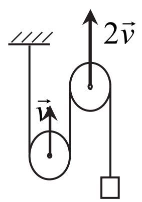


1. Два груза подвешены на двух легких веревках так, как показано на рисунке. Отношение сил натяжения верхней и нижней веревки известно: $F_1 : F_2 = 3:1$. Найти отношение масс верхнего и нижнего грузов $m_1 : m_2$.

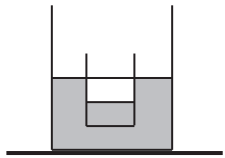
2. В калориметре находится вода с температурой $T = 20$ °C. В калориметр опустили нагреватель, и через время $\Delta t = 10$ мин из калориметра выкипела 1/6 часть воды. Через какое время выкипит еще такая же масса воды? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота парообразования воды

$L = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Теплоемкостью калориметра пренебречь, считать, что вся энергия, сообщаемая калориметру, тратится только на нагрев воды и ее испарение.

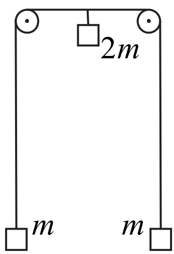
3. В системе, изображенной на рисунке, левый блок движется вверх со скоростью v, правый – вверх со скоростью $2v$. В каком направлении и с какой скоростью движется груз?



4. В цилиндрическом стакане с водой, стоящим на столе, плавает другой цилиндрический стакан, в который также налито некоторое количество воды. Как изменится уровень воды в большом стакане, если в малый налить массу воды m? Площадь сечения большого стакана $3S$, малого – S. Плотность воды ρ. При наливании воды в малый стакан он не опускается на дно большого. Стенки стаканов очень тонкие.



5. Через два блока, находящихся на одной высоте на расстоянии $2l$ друг от друга, переброшена очень длинная нить. К концам нити привязаны грузы массой m, к середине – груз массой $2m$. В начальный момент грузы удерживают так, что нить между блоками горизонтальна, а затем отпускают. Найти скорости грузов через достаточно большое время. Боковые грузы за это время не успели подняться до блоков.



Ответы и решения

1. Из условий равновесия грузов

$$F_1 = (m_1 + m_2)g,$$

$$F_2 = m_2 g$$

получим (деля первое уравнение на второе):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{F_1}{F_2} - 1 = 2 .$$

2. Интенсивное испарение воды происходит при температуре кипения. Поэтому можно считать, что при сообщении воде тепла она сначала нагревается до температуры кипения, а затем начинает испаряться. Поэтому для времени выкипания шестой части воды условие теплового баланса дает

$$P\Delta t = cm\left(T_0 - T\right) + \frac{1}{6}mL \,. \tag{1}$$

где P – мощность нагревателя; $T_0 = 100$ °C – температура кипения воды. Аналогично для выкипания еще одной шестой части воды (при том, что вода уже имеет температуру кипения) получаем из условия теплового баланса

$$P\Delta t_1 = \frac{1}{6}mL \,. \tag{2}$$

Деля формулу (1) на формулу (2), получим

$$\Delta t_1 = \frac{L\Delta t}{6c\left(T_0 - T\right) + L} = 6{,}7 \text{ мин.}$$

3. Очевидно, что груз перемещается потому, что перемещаются блоки. Поэтому для нахождения скорости груза свяжем перемещения блоков с перемещением груза. За некоторый интервал времени Δt левый блок переместится вверх на величину $v\Delta t$, правый – вверх на величину $2v\Delta t$. Тогда длина веревки слева от левого блока уменьшится на $v\Delta t$, между блоками увеличится на $2v\Delta t - v\Delta t = v\Delta t$. Поэтому длина куска веревки справа от правого блока не изменится, но точка правого блока, от которой этот кусок начинается, поднимется на величину $2v\Delta t$. Это и будет перемещение груза за время Δt – $\Delta x_{\text{гр}} = 2v\Delta t$. Отсюда заключаем, что скорость груза направлена вверх и равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{\Delta x_{\text{гр}}}{\Delta t} = 2v \,.$$

4. Условие равновесия плавающего стакана дает

$$Mg + mg = \rho g V_{\text{п.ч.}} \,,$$

где M – масса плавающего стакана; m – масса воды в нем; $V_{\text{п.ч.}}$ – объем погруженной в воду части стакана. Очевидно, для погруженной в воду части стакана можно записать $V_{\text{п.ч.}} = Sh_1 + Sh_2$, где h_1 – высота слоя воды в стакане; h_2 – разность уровней воды в большом и малом стакане. Отсюда получаем

$$Mg + mg = \rho g S h_1 + \rho g S h_2 .$$

А поскольку стенки плавающего стакана – тонкие, произведение $\rho S h_1$ равно массе воды, налитой в плавающий стакан. Отсюда заключаем, что разность уровней воды в большом и малом стаканах определяется только массой плавающего стакана и не зависит от массы воды в нем $M = \rho S h_2$. А поскольку слой воды в малом стакане увеличивается на величину

$$\Delta h = \frac{\Delta m}{\rho S},$$

то на эту величину увеличится расстояние от поверхности воды в большом стакане до дна малого стакана. Используя это условие, найдем подъем уровня воды в большом стакане.

Пусть малый стакан при наливании в него воды опустился на величину Δx_1 (по отношению к своему первоначальному положению). Тогда он вытеснил дополнительно из большого стакана объем воды $\Delta x_1 S$. Это вытеснение приводит к поднятию уровня в большом стакане на величину Δx_2, которую можно найти из очевидного соотношения

$$\left(3S - S\right)\Delta x_2 = S\Delta x_1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{2} .$$

А поскольку $\Delta x_2 + \Delta x_1 = \Delta h$, находим из предыдущей формулы

$$\Delta x_1 = \frac{2\Delta h}{3} = \frac{2\Delta m}{3\rho S} .$$

5. Очевидно, центральный груз начнет опускаться с ускорением (его силу тяжести не смогут компенсировать силы натяжения нити между блоками). Однако через достаточно большое время (при условии, что боковые грузы еще не успевают подняться к блокам) система тел будет двигаться с постоянной скоростью. Действительно, когда центральный груз опустится достаточно сильно, участки нити между блоками расположатся практически вертикально. Поэтому сила тяжести действующая на центральный груз – $2m\vec{g}$, будет компенсироваться силами тяжести крайних грузов – две силы по $m\vec{g}$. Следовательно, ускорение тел будет равно нулю, и тела будут двигаться с постоянными скоростями.

Скорости тел найдем по закону сохранения энергии. Пусть крайние тела поднялись на величину x. Это приведет к увеличению потенциальной энергии системы на величину $2mgx$. Но центральные участки нити, которые будут практически вертикальны будут иметь длину $x+l$ (длина x «пришла» от боковых участков нити, куски нити длиной l были в начальный момент слева и справа от центрального груза). Поэтому убыль потенциальной энергии за счет опускания центрального груза равна

$$2mg(x+l).$$

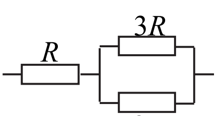
Поэтому потенциальная энергия системы тел уменьшилась на величину $2mgl$. Поэтому закон сохранения энергии (с учетом того, что при практически вертикальном расположении нитей скорости всех грузов одинаковы) дает

$$2mgl = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{2mv^2}{2}.$$

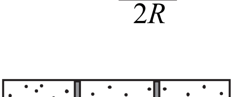
Отсюда получаем

$$v = \sqrt{gl}.$$

3.5. Очный отборочный тур-1, 11 класс

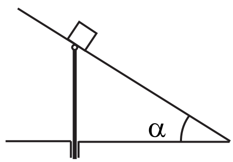


1. К цепи, схема которой представлена на рисунке, приложено электрическое напряжение. Известно, что мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна P. Какая мощность выделяется на сопротивлении $2R$? Величины всех сопротивлений даны на рисунке.

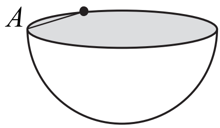


2. В цилиндрическом сосуде длиной l находятся 2 подвижных теплонепроницаемых поршня, делящих сосуд на 3 отсека. Первоначально температура газа во всех отсеках была равна T, объемы отсеков одинаковы. Затем температуру газа в среднем и левом отсеках увеличивают вдвое, температуру газа в правом отсеке поддерживают равной T. На сколько сместится при этом левый поршень?

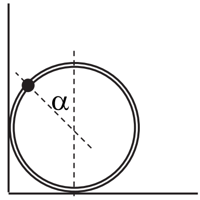
3. Тело начинает соскальзывать по наклонной плоскости из точки, расположенной над вертикальным упором (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и плоскостью μ. При каком угле наклона плоскости α время соскальзывания будет минимальным?



4. На краю полусферической чаши радиусом R закреплена невесомая нить длиной $R/2$ (в точке A), ко второму концу которой прикреплено маленькое тело. Тело удерживают на краю ямы так, что нить натянута (см. рисунок). В некоторый момент времени тело отпускают. Найти скорость и ускорение тела в тот момент, когда оно будет проходить нижнюю точку своей траектории.



5. Очень легкий обруч радиусом R удерживают на гладкой горизонтальной поверхности около вертикальной стены. К обручу прикреплено массивное тело, которое расположено так, как показано на рисунке ($\alpha = 45°$). Обруч отпускают. Достигнет ли тело горизонтальной поверхности, и если да, то на каком расстоянии от стены? Масса обруча много меньше массы тела, трение отсутствует.



Ответы и решения

1. Из закона Джоуля-Ленца находим ток, текущий через сопротивление R,

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

Далее этот ток на участке параллельного соединения делится в отношении 2:3 (2 – через резистор $3R$, 3 – через резистор $2R$). Поэтому

$$I_{2R} = \frac{3}{5} I, \qquad I_{3R} = \frac{2}{5} I.$$

Отсюда находим мощность, выделяемую на сопротивлении $2R$,

$$P_{2R} = I_{2R}^2 2R = \frac{18}{25} P.$$

2. Поскольку поршни подвижны, условие их равновесия заключается равенство давлений газов в каждом отсеке сосуда. Поэтому из условия равновесия поршней в начальном состоянии и закона Клапейрона-Менделеева заключаем, что количество вещества газа в каждом отсеке одинаково.

При нагревании газов в среднем и левом отсеке, увеличатся их давления, и поршни переместятся вправо. Поскольку после нагревания температуры газа в среднем и левом отсеках будут одинаковы, одинаковыми должны быть и объемы этих отсеков. Поэтому если правый поршень сместился вправо на величину Δx, то левый сместится на $\Delta x / 2$. При этом увеличение объемов среднего и левого отсеков будет равно $\Delta V = S\Delta x / 2$, а уменьшение объема правого отсека – $\Delta V = S\Delta x$. Поэтому закон Клапейрона-Менделеева для газа в среднем или левом и правом отсеках при условии равенства давлений газа в них дает

$$\begin{aligned} p\left(\frac{l}{3} S + \frac{\Delta x}{2} S\right) &= \nu R 2T, \\ p\left(\frac{l}{3} S - \Delta x S\right) &= \nu R T, \end{aligned} \qquad (1)$$

где p – давление газа в отсеках в конечном состоянии; ν – количество вещества газа в отсеках. Деля уравнения (1) друг на друга и решая уравнение относительно Δx, получим

$$\Delta x = \frac{2}{15} l.$$

И, следовательно, смещение левого поршня равно

$$\Delta x_{\text{лев}} = \frac{1}{15} l.$$

3. Пусть расстояние от основания плоскости до упора равно x. Тогда длина плоскости (от шарнира до основания) равна $x/\cos\alpha$. Ускорение тела при движении по плоскости равно

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Тогда квадрат времени соскальзывания тела с наклонной плоскости будет равен

$$t^2 = \frac{2x}{g\left(\cos\alpha\sin\alpha - \mu\cos^2\alpha\right)}. \qquad (2)$$

Величина (2) минимальна, когда максимален знаменатель формулы (2). Дифференцируя его по α, получим

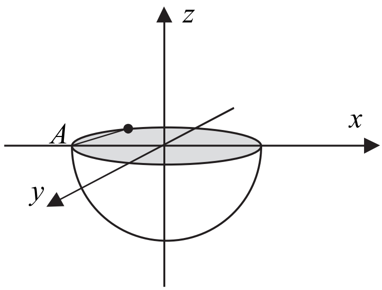
$$-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\mu\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Отсюда находим угол, для которого время соскальзывания тела минимально,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}(\mu) = \operatorname{arctg}\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right).$$

4. Докажем, что тело движется в вертикальной плоскости. С одной стороны, оно находится на поверхности сферы радиусом R, и, следовательно, его координаты связаны соотношением (уравнением сферы; оси координат показаны на рисунке):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (3)$$



С другой стороны, тело в любой момент времени находится на расстоянии $R/2$ от точки A. Поэтому ее координаты должны также принадлежать сфере с радиусом $R/2$ и центром в точке A (x-координата которой в нашей системе координат равна $x = -R$):

$$\left(x + R\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(R/2\right)^2. \qquad (4)$$

Вычитая формулу (4) из формулы (3), получим

$$x = -\frac{7R}{8}.$$

Это означает, что тело движется так, что его x-координата остается постоянной, т.е. тело движется в плоскости, перпендикулярной оси x. А поскольку сечение сферы любой плоскостью есть окружность, то тело движется в вертикальной плоскости по окружности. Радиус этой окружности найдем по теореме Пифагора

$$r=\sqrt{R^2-\left(7R/8\right)^2}=\frac{\sqrt{15}R}{8}.$$

Ускорение тела в нижней точке траектории направлено к центру окружности (т.е. вертикально вверх) и равно v^2/r, где v – скорость тела; r – радиус окружности. Скорость тела в нижней точке траектории найдем по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=mg\frac{\sqrt{15}R}{8} \qquad \Rightarrow \qquad v^2=\frac{\sqrt{15}gR}{4}.$$

Отсюда находим ускорение тела

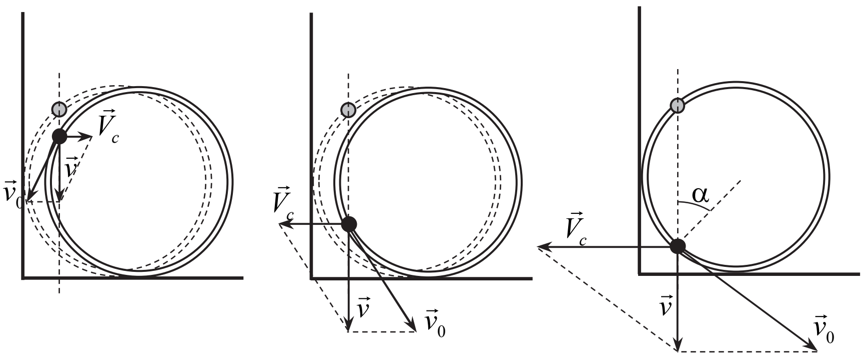
$$a=\frac{v^2}{r}=2g.$$

5. Рассмотрим сначала движение обруча. Когда он не касается боковой стенки, на него действуют только сила реакции пола (которая является вертикальной из-за отсутствия трения) и сила со стороны тела. Но поскольку масса обруча равна нулю, сумма этих сил и сумма их моментов относительно любой точки должна быть равна нулю. Этого можно добиться только, если обе силы реакции нулевые (в противном случае момент силы реакции пола относительно тела был бы не равен нулю и, следовательно, сообщал обручу бесконечное угловое ускорение). Поэтому обруч не действует на тело, и, следовательно, тело падает вертикально вниз с ускорением свободного падения и «заставляет» двигаться обруч бесконечно малой силой.

Найдем теперь, как движется обруч. Рассмотрим сначала участок траектории тела от его начальной точки до середины обруча. С одной стороны, его скорость $\vec{v}$ направлена вертикально вниз, с другой, складывается из скорости центра обруча $\vec{V}_c$ (которая направлена горизонтально) и его скорости относительно центра $\vec{v}_0$

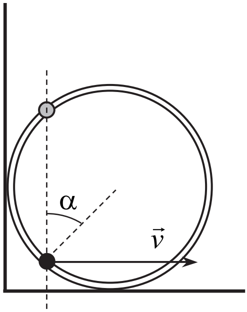
(которая направлена по касательной к обручу против часовой стрелки)

$$\vec{v} = \vec{V}_c + \vec{v}_0 . \qquad (5)$$



Треугольник сложения скоростей, отвечающий формуле (5) до того, как тело прошло середину обруча, показан на левом рисунке, когда пройдет – на среднем. Из этих рисунков видно, что до того, как тело пройдет середину обруча, обруч движется направо, после этого – налево (на этих рисунках первоначальное положение обруча и тела показано пунктиром и прозрачным кружком соответственно). При этом, когда тело дойдет до точки, расположенной ниже середины обруча и в которой угол между радиусом и вертикалью равен $\alpha = 45°$, обруч вернется в свое первоначальное положение около стенки (правый рисунок). А поскольку в этом положении обруч движется налево (и еще вращается против часовой стрелки), произойдет его столкновение со стенкой.

В этот момент возникнет сила реакции со стороны стенки, момент которой относительно тела не равен нулю. Поэтому эта сила «закрутит» обруч относительно тела, и возникнет сила реакции со стороны пола, причем ее величина будет в любой момент времени равна силе реакции стенки. Поэтому импульсы этих сил за время взаимодействия будут одинаковы. А поскольку тело не может опускаться дальше «в угол», находясь между стенкой и потолком, его вертикальная скорость погасится, и возникнет точно такая же скорость, направленная горизонтально. В этот момент тело отскочит от стенки, имея ту же по величине горизонтальную скорость, какую оно имело до столкновения обруча со стенкой в вертикальном направлении. В этот же момент пропадут обе силы реакции, и тело снова будет двигаться с ускорением свободного падения. Т.е. фактически после того, как обруч отскочит от стенки, тело будет двигаться «под углом к горизонту» с горизонтальной начальной скоростью.



Найдем скорость тела v в этот момент. Скорость v находится по законам равноускоренного движения (или закону сохранения энергии). Поскольку тело спустится на величину $\sqrt{2}R$ его скорость будет равна

$$v = \sqrt{2\sqrt{2}gR}\,.$$

Вернемся теперь к движению тела. Поскольку сразу после удара тело находится на высоте $R - R/\sqrt{2}$, а скорость направлена горизонтально, а ускорение равно g, то тело коснется земли через интервал времени

$$t = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)R}{g}}\,.$$

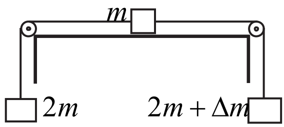
И следовательно, пролетит по горизонтали расстояние

$$S = vt = \sqrt{2\sqrt{2}gR}\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)R}{g}} = 2R\sqrt{\sqrt{2}-1}\,.$$

Чтобы найти расстояние от тела до стенки в этот момент к расстоянию S, нужно прибавить расстояние от тела до стенки в тот момент, когда обруч сталкивался со стенкой, т.е. $R - R/\sqrt{2}$. Поэтому расстояние от тела до стенки в тот момент, когда оно коснется пола, равно

$$x = S + \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}R = R\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1} + \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}\right).$$

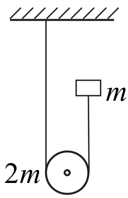
3.6. Очный отборочный тур-2, 11 класс



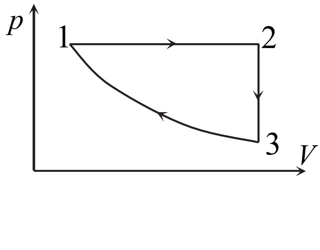
1. На столе находится тело массой m, к которому с помощью веревок привязаны тела с массой $2m$ и $2m+\Delta m$. Веревки переброшены через блоки, укрепленные на краях стола (см. рисунок). Коэффициент трения между верхним телом и столом – k. Каким будет ускорение верхнего тела, если значение массы Δm вдвое превосходит то ее минимальное значение, при котором верхнее тело сдвигается с места?

2. Тело движется вдоль оси x со скоростью, пропорциональной кубу расстояния, до начала координат $v=\alpha x^3$, где α – некоторое число. Известно, что в точке с координатой $x_0=1$ м скорость тела равнялась $v_0=2$ м/с. Найти ускорение тела в этой точке.

3. Два конденсатора с емкостью C и $2C$ соединили последовательно. Эту батарею конденсаторов зарядили от источника электрического напряжения U, а затем отсоединили от него. Каким будет напряжение на батарее, если конденсатор емкостью C опустить в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε?



4. Подвижный блок массой $2m$, масса которого сосредоточена в его оси, удерживают с помощью куска веревки, один конец которой прикреплен к потолку, второй – к телу массой m. В некоторый момент тело отпускают. Найти его ускорение.



5. С одноатомным идеальным газом проводят циклический процесс, состоящий из изобары, изохоры и адиабаты (см. рисунок). Чему равен максимально возможный КПД такого процесса как теплового двигателя? В адиабатическом процессе давление газа и его объем связаны соотношением: $pV^{5/3}=\text{const}$.

Ответы и решения

1. Найдем сначала значение массы Δm, при котором верхнее тело сдвигается с места. При нулевом ускорении на него направо действует сила $(2m+\Delta m)g$, налево $2mg$. Поэтому оно сдвигается, если

$$(2m+\Delta m)g - 2mg \geq kmg \qquad \Rightarrow \qquad \Delta m \geq km. \tag{1}$$

Если масса Δm вдвое превосходит значение (1), второй закон Ньютона для всех тел имеет вид

$$\begin{gathered}(2m+2\Delta m)g - T_1 = (2m+2\Delta m)a,\\ T_1 - T_2 - kmg = ma,\\ T_2 - 2mg = 2ma,\end{gathered} \tag{2}$$

где T_1 – сила натяжения правой нити; T_2 – левой. Складывая уравнения (2), получим

$$a = \frac{kg}{5+2k}.$$

2. Продифференцируем заданную функцию по времени

$$a = \frac{dv}{dt} = \alpha 3x^2 \frac{dx}{dt} = 3\alpha x^2 v.$$

По заданным значениям x_0 и v_0 найдем коэффициент α: $\alpha = v_0 / x_0^3$. Отсюда находим ускорение в точке с координатой x_0:

$$a_0 = 3\frac{v_0^2}{x_0} = 24 \text{ м/с}^2.$$

3. При последовательном соединении конденсаторов их заряд будет одинаковым и равным

$$Q = UC_{\text{об}},$$

где $C_{\text{об}}$ – общая емкость системы конденсаторов. Находя общую емкость последовательно соединенных конденсаторов

$$C_{\text{об}} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{2C}\right)^{-1} = \frac{2C}{3},$$

получим

$$Q=\frac{2CU}{3}.$$

Поэтому на каждом из них будет следующее электрическое напряжение

$$U_C=\frac{Q}{C}=\frac{2U}{3}, \quad U_{2C}=\frac{Q}{2C}=\frac{U}{3}.$$

После того как мы отсоединили конденсаторы от источника, их заряды не могут поменяться. Поэтому при опускании одного из них в жидкий диэлектрик, заряды конденсаторов не изменятся. А поскольку емкость конденсатора $2C$ не изменится, то не изменится и напряжение на нем. Емкость конденсатора C увеличится в ε раз: $C\to\varepsilon C$. Поэтому напряжение на нем уменьшится в ε раз. Следовательно, новое напряжение на батарее конденсаторов будет равно

$$U'=\frac{U_C}{\varepsilon}+U_{2C}=\frac{2U}{3\varepsilon}+\frac{U}{3}=\frac{(2+\varepsilon)}{3\varepsilon}U.$$

4. Если бы нить была не натянута, блок и тело падали бы с ускорением g. Но при натянутой нити ускорение тела должно быть в 2 раза больше ускорения блока. Поэтому сила натяжения должна тормозить блок и ускорять тело так, чтобы ускорение тела было вдвое больше ускорения блока. Пусть сила натяжения веревки T. Тогда на блок со стороны веревки действует сила $2T$ и сила тяжести $2mg$, на тело – сила натяжения T и сила тяжести mg. Поэтому законы Ньютона для блока и тела имеют вид

$$\begin{aligned} 2ma_{\text{б}} &= 2mg-2T, \\ ma_{\text{т}} &= mg+T. \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, ускорения блока и тела связаны: когда тело проходит расстояние Δx, блок опускается на $\Delta x/2$, поскольку слева и справа от блока добавляется кусочек веревки длиной $\Delta x/2$. Поэтому в любой момент времени скорость тела вдвое больше скорости блока, а поэтому вдвое больше и ускорение тела $a_{\text{т}}=2a_{\text{б}}$. В результате уравнения (3) дают

$$2ma_{б} = 2mg - 2T,$$
$$2ma_{б} = mg + T.$$

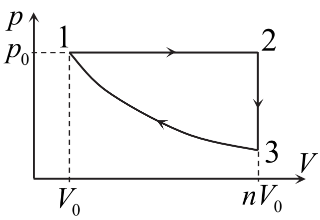
Умножая второе уравнение на 2 и складывая, находим ускорение блока, а затем и ускорение тела

$$a_{б} = \frac{2g}{3}, \qquad a_{т} = \frac{4g}{3}.$$

То обстоятельство, что ускорение тела оказалось больше ускорения свободного падения, есть следствие натянутости нити: нить тормозит блок, но разгоняет тело так, чтобы обеспечить двукратную разницу в их ускорениях.

В заключение отметим, что если бы нить первоначально не была натянута, блок и тело падали бы с ускорением g, и через некоторое время блок натянул бы нить, и тела стали бы двигаться так, как описано в задаче.

5. Пусть состоянию 1 отвечают давление p_0 и объем V_0, а в течение цикла объем увеличивается в n раз. Найдем КПД цикла и исследуем его изменение в зависимости от изменения этих параметров.



Поскольку процесс 3-1 – адиабатический, тело получает тепло на участке 1-2 (контакт с нагревателем), отдает – на участке 2-3 (контакт с холодильником). Применяя первый закон термодинамики к процессам 1-2 и 2-3, получим

$$Q_{н} = Q_{1-2} = \frac{5}{2} p_0 V_0 (n-1), \quad Q_{х} = Q_{2-3} = \frac{3}{2}(p_0 - p_1) n V_0, \tag{4}$$

где $Q_{н}$ и $Q_{х}$ – количества теплоты, полученные газом в течение цикла; p_1 – давление в состоянии 3. Давление в состоянии 3 найдем, применяя к процессу 3-1 закон адиабаты, данный в указании к условию задачи

$$p_0 V_0^{5/3} = p_1 (nV_0)^{5/3} \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = \frac{1}{n^{5/3}} p_0. \tag{5}$$

В результате из (4), (5) имеем для КПД процесса 1-2-3-1:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{3}{5}\frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{(n-1)}. \tag{6}$$

Из формулы (6) заключаем, что КПД вообще не зависит от p_0 и V_0, а зависит только от того, во сколько раз увеличивается объем газа в течение цикла. Поэтому для нахождения максимального КПД цикла нужно исследовать КПД как функцию n. Очевидно, это функция монотонно возрастающая. Действительно, из неравенств

$$1 < \frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{(n-1)} < \frac{n}{n-1}.$$

И того факта, что при $n \to \infty$ величина $n/(n-1)$ стремится к единице, следует, что величина

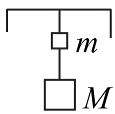
$$\frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{(n-1)}$$

стремится к единице сверху, а поскольку в формуле (6) она вычитается, то КПД процесса растет с ростом n. Поэтому КПД цикла будет максимальным при $n \to \infty$ и равным

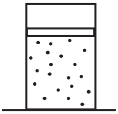
$$\eta_{\max} = 0,4.$$

3.7. Очный отборочный тур-3, 11 класс

1. Два тела массами $m = 1$ кг и $M = 2$ кг, связанные невесомой и нерастяжимой нитью, привязаны к потолку кабины лифта. Сила натяжения нижней нити известна и равна $T = 40$ Н. Найти силу натяжения верхней нити. $g = 10$ м/с^2.

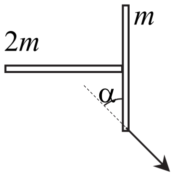


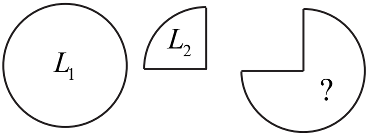
2. Имеются две бухты проволоки, изготовленной из одного и того же металла. Масса первой бухты m, второй – $2m$. Диаметр проволоки из первой бухты – d, второй – $2d$. Найти отношение сопротивления проволок из первой и второй бухт.



3. В запаянном вертикальном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем массой m находится одноатомный идеальный газ при температуре T. Над поршнем вакуум. Из-за неплотных контактов поршня со стенками газ медленно просачивается в верхнюю часть сосуда. Пренебрегая теплоемкостью поршня и сосуда, а также теплопотерями, найти температуру газа, когда поршень опустится на дно сосуда.

4. Две тонкие палочки одинаковой длины с массами m и $2m$ образуют букву «Т» (палочка с массой $2m$ прикреплена к середине палочки с массой m под прямым углом к ней). Палочки лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (см. рисунок, вид сверху). К одному из концов палочки m привязана нить, за которую систему палочек медленно тянут по поверхности. Какой угол α составляет палочка m с нитью.





5. Индуктивность кольца известна и равна L_1. Индуктивность контура, представляющего собой сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $\pi/2$, также известна и равна L_2. Найти индуктивность контура, представляющего сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $3\pi/2$.

Ответы и решения

1. Второй закон Ньютона для нижнего тела в проекциях на ось, направленную вертикально вверх, дает

$$Ma = T - Mg \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{T}{M} - g = 10 \text{ м/с}^2, \qquad (1)$$

где a – проекция ускорения тела. Таким образом, лифт движется с ускорением, направленным вверх. Применяя второй закон Ньютона для обоих тел и используя ускорение (1), получим

$$T_1-(m+M)g=(m+M)a=\frac{(m+M)T}{M}-(m+M)g\,.$$

Отсюда находим

$$T_1=\frac{(m+M)T}{M}=60\ \text{Н}.$$

2. Выразим сопротивление проволоки через массу и диаметр проволоки. Имеем

$$R=\frac{\rho l}{S}=\frac{4\rho l}{\pi d^2}\,,$$

где ρ – удельное сопротивление материала проволоки; l – ее длина; S – площадь поперечного сечения; d – диаметр. С другой стороны, длину проволоки можно выразить через площадь поперечного сечения и плотность материала проволоки

$$l=\frac{m}{\rho_0 S}=\frac{4m}{\pi\rho_0 d^2}\,,$$

где ρ_0 – плотность материала проволоки. Отсюда

$$R=\frac{16\rho m}{\pi^2\rho_0 d^4}\,. \qquad (1)$$

Применяя формулу (1) к первой и второй бухте и вычисляя отношение сопротивлений проволок, получим

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{m}{2m}\left(\frac{2d}{d}\right)^4=8\,.$$

3. Поскольку работа силы тяжести над поршнем равна mgh, где h – высота поршня над дном сосуда, получим из первого закона термодинамики

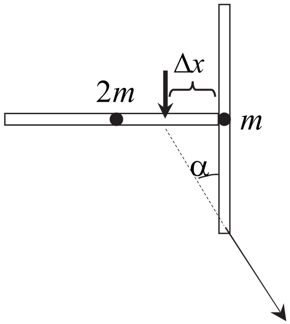
$$\Delta U=\frac{3}{2}\nu R\Delta T=mgh\,, \qquad (1)$$

где ν – количество вещества газа; ΔT – изменение его температуры. Чтобы найти h, используем условие равновесия поршня в начальном состоянии

$$\frac{mg}{S} = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu RT}{Sh} \quad \Rightarrow \quad mgh = \nu RT\,, \qquad (2)$$

где V – объем газа в начальном состоянии. Подставляя формулу (2) в формулу (1), найдем конечную температуру газа T_1:

$$T_1 = \frac{5}{3}T\,.$$



4. Поскольку палочки движутся медленно, сумма сил и сумма моментов всех сил, действующих на палочки, равна нулю. Это значит, что момент силы трения относительно точки приложения внешней силы должен быть равен нулю. А поскольку силы трения, приложенные к различным малым элементам палочек, пропорциональны их массам и одинаково направлены, для вычисления момента силы трения можно воспользоваться тем же приемом, что и для вычисления момента силы тяжести: считать, что сила трения приложена к центру тяжести палочек. Поэтому линия действия внешней силы должна проходить через центр тяжести палочек.

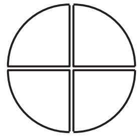
Найдем положение их центра тяжести. Для этого заменим палочки точечными массами, расположенными в их центрах, и найдем их центр тяжести. Так как масса «перекладинки» буквы «Т» вдвое меньше массы ее «ножки», расстояние Δx от середины «перекладинки» до центра тяжести палочек составит 2/3 расстояния от середины «перекладинки» до середины «ножки» (см. рисунок, центр тяжести палочек отмечен стрелкой):

$$\Delta x = \frac{2}{3}\frac{l}{2} = \frac{l}{3}\,.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l/3}{l/2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right).$$

5. Мысленно представим кольцо с током в виде четырех секторов так, как показано на рисунке, причем в проводах, расположенных вдоль диаметра токи текут навстречу друг другу. Тогда с точки зрения распределения магнитного поля в пространстве ничего не изменилось, так как новых токов не появилось. Поэтому поток магнитного поля через кольцо Φ_1 будет таким же, как поток магнитного поля через четыре сектора. С другой стороны, этот поток будет складываться из четырех потоков магнитного поля каждого секториального тока через сам этот сектор Φ_2, четырех потоков магнитного поля каждого секториального тока через сектор, лежащий крест накрест $\Phi_\times$, и восьми потоков магнитного поля каждого секториального тока через соседние секторы $\Phi_=$. Поэтому



$$\Phi_1 = 4\Phi_2 + 4\Phi_\times + 8\Phi_= . \tag{1}$$

Используя известные индуктивности кольца и сектора, получим из (1), если во всех цепях текут одинаковые токи I:

$$4\Phi_\times + 8\Phi_= = \left(L_1 - 4L_2\right) I . \tag{2}$$

Разобьем теперь сектор, опирающийся на угол $270°$ на три сектора. Тогда поток магнитного поля через него Φ_3 будет складываться из трех потоков Φ_2, двух потоков $\Phi_\times$ и четырех потоков $\Phi_=$:

$$\Phi_3 = 3\Phi_2 + 2\Phi_\times + 4\Phi_= \tag{1}$$

или

$$L_3 I = 3L_2 I + \frac{\left(L_1 - 4L_2\right)}{2} I .$$

Отсюда находим

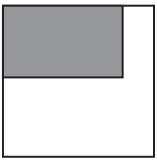
$$L_3 = L_2 + \frac{L_1}{2} .$$

4. Заключительные туры

4.1. Заключительный тур, 7 класс

1. Вес ведерка, до краев заполненного водой, равен $P_1 = 20$ Н. В ведерко кладут камень, плотность которого втрое больше плотности воды и который полностью погружается в воду. Вес ведерка становится равным $P_2 = 24$ Н. Каким будет вес ведерка, если из него аккуратно вытащить первый камень, а положить другой камень с той же плотностью, но с вдвое меньшим объемом, чем у первого.

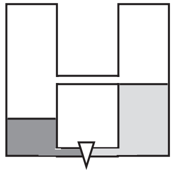
2. Винни Пух пошел в гости к Пятачку. Перед выходом Винни заметил, что его настенные часы стоят, показывая время 10 ч 15 мин. Поскольку Винни не знал точного времени, он завел часы, не переводя стрелок. Когда Винни Пух пришел к Пятачку, он увидел, что часы в доме Пятачка показывали время 14 ч 30 мин. Винни ушел от Пятачка в 15 ч 10 мин. Когда Винни вернулся домой, его часы показывали 14 ч 20 мин. Увидев это, Винни Пух сразу же выставил на своих часах точное время. Какое время он выставил на своих часах?



3. Кубик составили из двух частей, имеющих разную плотность (см. рисунок). Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объема кубика, но четвертую часть его массы. Найдите плотность второй части кубика.

4. Нечестный спортсмен при подготовке к Олимпийским играм принимал допинг, который позволял достигать очень высокой скорости, но при медленном разгоне. В результате спортсмен бежал дистанцию $l = 100$ м по следующему графику: в начале каждой следующей секунды он мгновенно увеличивал свою скорость на величину $\Delta v = 1{,}8$ м/с (до начала первой секунды его скорость была нулевой). На какое время обгонит или отстанет этот спортсмен от своих конкурентов, которые бегут с постоянной скоростью $v = 10$ м/с?

5. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены в самом низу тонкой трубкой, перекрытой краном. Вторая узкая трубка соединяет сосуды на высоте *h*. В сосуды налита жидкость плотностью ρ в одно колено и жидкость плотности 6ρ в другое, причем высота слоя жидкости с плотностью ρ равна *h*, плотности 6ρ – $h/2$. Кран открывают. Найти высоту столба легкой жидкости в том сосуде, где первоначально была только тяжелая жидкость.



Ответы и решения

1. Камень вытеснит такое количество воды, объем которого равен его объему. Эта вода выльется из ведра. Поэтому увеличение веса ведерка равно

$$P_2 = P_1 + (\rho_к - \rho_в) gV = P_1 + (3\rho_в - \rho_в) gV = P_1 + 2\rho_в gV ,$$

где $\rho_к$ и $\rho_в$ – плотности камня и воды соответственно; V – объем камня. Отсюда

$$\rho_в gV = \frac{P_2 - P_1}{2} . \qquad (*)$$

Когда мы вытащим из ведерка первый камень и положим другой камень меньшего объема, часть ведерка объемом $V/2$ окажется ничем не заполненной. Поэтому вес ведерка будет равен

$$P_3 = P_1 + (\rho_к - \rho_в) g\frac{V}{2} - \rho_в g\frac{V}{2} = P_1 + 2\rho_в g\frac{V}{2} - \rho_в g\frac{V}{2} = P_1 + \rho_в g\frac{V}{2} .$$

Поэтому из (*) получим

$$P_3 = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{4} = \frac{3P_1 + P_2}{4} = 21 \text{ Н.}$$

2. Обозначим время, стоящее на часах Винни Пуха, как t_1 (10 ч 10 мин; время, которое он увидел, придя к Пятачку – t_2 (14 ч 30 мин); время, когда он ушел от Пятачка – t_3 (15 ч 10 мин); время, которое он увидел на своих часах, когда вернулся – t_4 (14 ч 20 мин).

Очевидно, все путешествие Винни Пуха заняло время $t_4 - t_1$. Из них $t_3 - t_2$ он провел у Пятачка. Следовательно, на дорогу в каждый конец он затратил

$$\tau = \frac{1}{2}\left(t_4 - t_1 - \left(t_3 - t_2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(t_4 - t_1 - t_3 + t_2\right) = 1 \text{ ч } 45 \text{ мин}.$$

Поэтому в тот момент, когда часы Пуха показывали $t_1 = 10.10$, точное время составляло

$$t_2 - \tau = 12.45.$$

Следовательно, часы Пуха нужно перевести на 2 ч 35 мин вперед. Т.е. когда часы Пуха показывали 14.20, точное время составляло 16.55. Это время и поставил на своих часах Винни Пух, когда вернулся.

3. Пусть объем всего кубика V, а плотность его второй части – ρ_2. Тогда из условия имеем

$$\rho_1 \frac{V}{3} + \rho_2 \frac{2V}{3} = 4\rho_1 \frac{V}{3}.$$

Решая это уравнение относительно ρ_2, получаем

$$\rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1.$$

4. Конкуренты нечестного спортсмена пробегут стометровку за время

$$t = \frac{l}{v} = 10 \text{ с.}$$

Найдем, за какое время пробежит стометровку нечестный спортсмен. Поскольку в течение первой секунды он бежит со скоростью Δv, в точение второй секунды – $2\Delta v$, третьей – $3\Delta v$ и т.д., за 10 с он пробежит расстояние

$$S = \Delta v \Delta t + 2\Delta v \Delta t + ... + 10\Delta v \Delta t = 55\Delta v \Delta t = 99 \text{ м},$$

где $\Delta t = 1$ с. Таким образом, нечестный спортсмен за 10 с пробежит 99 м, а последний метр дистанции он пробежит со скоростью $11\Delta v$ и, следовательно, затратит на его прохождение время

$$t_1 = \frac{1\,(\text{м})}{11\Delta v} = 0{,}05 \text{ с.}$$

Значит, нечестный спортсмен отстанет от своих конкурентов на время $t_1 = 0{,}05$ с.

5. Давление около дна сосуда с тяжелой жидкостью ($p = 6\rho gh / 2 = 3\rho gh$) больше давления около дна в сосуде с легкой жидкостью ($p_1 = \rho gh$). Поэтому при открывании крана тяжелая жидкость по нижней трубке будет перетекать в сосуд, в котором первоначально была легкая жидкость, которая, в свою очередь, по верхней трубке будет перетекать в сосуд с тяжелой жидкостью. Процесс перетекания будет происходить до тех пор, пока не выровняются давления около дна в левом и правом сосуде. Пусть к этому моменту в сосуд с легкой жидкостью перетечет столб тяжелой жидкости высотой x. Тогда точно такой же слой легкой жидкости перетечет по верхней трубке в сосуд с тяжелой жидкостью, и условие равновесия жидкости в сосуде дает

$$6\rho g\left(h/2 - x\right) + \rho gx = 6\rho gx + \rho g\left(h - x\right).$$

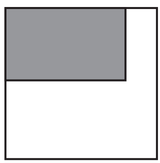
Отсюда

$$x = \frac{h}{5}.$$

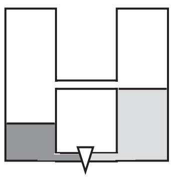
4.2. Заключительный тур, 8 класс

1. Тело составлено из трех частей одинакового объема, но с разными плотностями, которые относятся друг к другу как $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 1:2:4$. Удельные теплоемкости этих частей – также разные и относятся друг к другу как $c_1 : c_2 : c_3 = 3:2:1$. Найти среднюю удельную теплоемкость тела, если большая из удельных теплоемкостей его частей равна c.

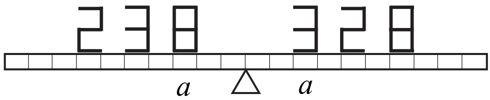
2. Кубик составили из двух частей, имеющих разную плотность (см. рисунок). Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объема кубика, но четвертую часть его массы. Найдите плотность второй части кубика.



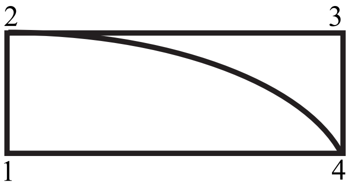
3. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены в самом низу тонкой трубкой, перекрытой краном. Вторая узкая трубка соединяет сосуды на высоте h. В сосуды налита жидкость плотностью ρ в одно колено и жидкость плотностью 6ρ в другое,



причем высота слоя жидкости с плотностью ρ равна h, плотности $6\rho\ -\ h/2$. Кран открывают. Найти высоту столба легкой жидкости в том сосуде, где первоначально была тяжелая жидкость.



4. Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры – один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на другом конце коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?



5. Имеется прямоугольник 1234, изготовленный из металлических стержней одинакового материала и одинакового сечения, причем длины сторон прямоугольника относятся как 1-2 : 1-4 = 1:2. Вершины 2 и 4 связаны таким же (но кривым) стержнем с длиной, втрое большей длины стержня 1-2. Температуры вершин 1 и 3 поддерживаются постоянными и равными $t_1 = 100$ °C, $t_3 = 0$ °C. Найти температуры вершин 2 и 4?

Указание. Тепловой поток между точками, температуры которых поддерживаются постоянными, пропорционален разности температур точек, обратно пропорционален расстоянию между ними и коэффициенту теплопроводности среды между ними (закон Фурье). Считать, что боковые поверхности стержней теплоизолированы.

Ответы и решения

1. Пусть мы сообщаем телу количество теплоты Q. С одной стороны, по смыслу средней удельной теплоемкости

$$Q = cm\Delta T = c\left(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3\right)V\Delta T\ ,$$

где c – средняя удельная теплоемкость тела; m – его масса; ΔT – приращение температуры; V – объем каждой части. С другой стороны, это количество теплоты идет на нагревание частей тела, которые все нагреются на ту же величину ΔT. Поэтому

$$Q = c_1 m_1 \Delta T + c_2 m_2 \Delta T + c_3 m_3 \Delta T = \left(c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 + c_3 \rho_3\right) V \Delta T .$$

Сравнивая две эти формулы, имеем

$$c = \frac{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 + c_3 \rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3} = \frac{11c}{21} .$$

2. Пусть объем всего кубика V, а плотность его второй части – ρ_2. Тогда из условия имеем

$$\rho_1 \frac{V}{3} + \rho_2 \frac{2V}{3} = 4\rho_1 \frac{V}{3} .$$

Решая это уравнение относительно ρ_2, получаем

$$\rho_2 = \frac{3}{2} \rho_1 .$$

3. Давление около дна сосуда с тяжелой жидкостью ($p = 6\rho g h / 2 = 3\rho g h$) больше давления около дна в сосуде с легкой жидкостью ($p_1 = \rho g h$). Поэтому при открывании крана тяжелая жидкость по нижней трубке будет перетекать в сосуд, в котором первоначально была легкая жидкость, которая, в свою очередь, по верхней трубке будет перетекать в сосуд с тяжелой жидкостью. Процесс перетекания будет происходить до тех пор, пока на выровняются давления около дна в левом и правом сосуде. Пусть к этому моменту в сосуд с легкой жидкостью перетечет столб тяжелой жидкости высотой x. Тогда точно такой же слой легкой жидкости перетечет по верхней трубке в сосуд с тяжелой жидкостью, и условие равновесия жидкости в сосуде дает

$$6\rho g(h/2 - x) + \rho g x = 6\rho g x + \rho g(h - x) .$$

Отсюда

$$x = \frac{h}{5}.$$

4. Конечно, массы макетов чисел 238 и 328 равны, но при их сравнении на коромысельных весах сравниваются не силы тяжести, действующие на макеты чисел, а моменты сил тяжести относительно опоры. Посчитаем моменты сил, действующих на правое и левое плечо коромысла. «Двойка» (слева) и «восьмерка» (справа). У «восьмерки» есть два лишних стержня, расположенных на расстояниях $6a$ и $7a$ относительно опоры. Значит, для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем $\Delta M_{\text{пр}} = 6amg + 7amg = 13amg$. «Тройка» (слева) и «двойка» (справа). У «двойки» есть лишний стержень на расстоянии $5a$ от опоры, и не хватает стержня на расстоянии $4a$ от опоры. Следовательно, избыточный момент, действующий на правое плечо коромысла весов, есть $\Delta M_{\text{пр}} = 13amg + 5amg - 4amg = 14amg$. «Восьмерка» (слева) и «тройка» (справа). У восьмерки есть 2 лишних стержня на расстоянии $2a$ от опоры. Поэтому для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{\text{пр}} = 14amg - 4amg = 10amg .$$

Следовательно, число 328 справа от опоры перевесит. Поскольку восстанавливающий равновесие весов груз нужно положить на самый конец левого колена коромысла (плечо $10a$), для его массы m_0 имеем

$$10am_0g = 10amg .$$

Откуда находим

$$m_0 = m .$$

5. Очевидно, что в равновесном состоянии (когда температуры всех точек не меняются) тепловой поток по стержню 1-2 равен сумме тепловых потоков по стержням 2-3 и 2-4. Поэтому из закона Фурье имеем

$$\frac{t_1 - t_2}{l} = \frac{t_2 - t_3}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l},$$

где l – длина стержня 1-2. Отсюда

$$6t_1 + 3t_3 = 11t_2 - 2t_4 . \qquad (*)$$

Аналогично, тепловой поток по стержню 4-3 равен сумме тепловых потоков по стержням 2-4 и 1-4. Поэтому

$$\frac{t_4 - t_3}{l} = \frac{t_1 - t_4}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l}.$$

Откуда

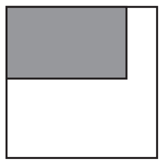
$$3t_1 + 6t_3 = -2t_2 + 11t_4. \qquad (**)$$

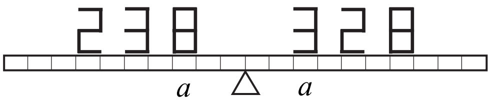
Решая систему уравнений (*)–(**), получим

$$t_2 = \frac{72t_1 + 45t_3}{117} = 61{,}5\ ^\circ\text{C}, \quad t_4 = \frac{45t_1 + 72t_3}{117} = 38{,}5\ ^\circ\text{C}.$$

4.3. Заключительный тур, 9 класс

1. Кубик составили из двух частей, имеющих разную плотность (см. рисунок). Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объема кубика, но четвертую часть его массы. Найдите плотность второй части кубика.





2. Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры – один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на конце второго коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?

3. В калориметр налита вода комнатной температуры – $t_1 = 20\ ^\circ\text{C}$. Объем воды составляет половину объема калориметра. Когда в калориметр доливают столько же воды, имеющей температуру $t_2 = 30\ ^\circ\text{C}$, в нем устанавливается температура $t_0 = 24\ ^\circ\text{C}$. Другой точно такой же калориметр, находящийся при комнатной температуре, содержит воду, объем которой составляет одну треть объема калориметра. Какая установится температура в этом калориметре, если его доверху заполнить водой с температурой t_2. Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

4. Минутная стрелка часов в 2 раза длиннее часовой. В некоторый момент времени стрелки совпали. Через какое время после этого конец часовой стрелки будет удаляться от конца минутной с максимальной скоростью?

5. Тело начинает движение из состояния покоя с ускорением a_0 и далее движется прямолинейно. Из-за действия силы сопротивления воздуха ускорение тела падает с увеличением его скорости v по закону $a = a_0 v_0 / \left(v + v_0\right)$, где v_0 – известная постоянная. Через какое время скорость тела достигнет значения $2v_0$?

Ответы и решения

1. Пусть объем всего кубика *V*, а плотность его второй части – ρ_2. Тогда из условия имеем

$$\rho_1 \frac{V}{3} + \rho_2 \frac{2V}{3} = 4\rho_1 \frac{V}{3}.$$

Решая это уравнение относительно ρ_2, получаем

$$\rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1.$$

2. Конечно, массы макетов чисел 238 и 328 равны, но при их сравнении на коромысельных весах сравниваются не силы тяжести, действующие на макеты чисел, а моменты сил тяжести относительно опоры. Посчитаем моменты сил, действующих на правое и левое плечо коромысла. «Двойка» (слева) и «восьмерка» (справа). У «восьмерки» есть два лишних стержня, расположенных на расстояниях 6*a* и 7*a* относительно опоры. Значит, для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем $\Delta M_{\text{пр}} = 6amg + 7amg = 13amg$. «Тройка» (слева) и «двойка» (справа). У «двойки» есть лишний стержень на расстоянии 5*a* от опоры и не хватает стержня на расстоянии 4*a* от опоры. Следовательно, избыточный момент, действующий на правое плечо коромысла весов, есть $\Delta M_{\text{пр}} = 13amg + 5amg - 4amg = 14amg$. «Восьмерка» (слева) и «тройка» (справа). У восьмерки есть 2 лишних стержня на расстоянии $2a$ от опоры. Поэтому для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{\text{пр}} = 14amg - 4amg = 10amg .$$

Следовательно, число 328 справа от опоры перевесит. Поскольку восстанавливающий равновесие весов груз нужно положить на самый конец левого колена коромысла (плечо $10a$), для его массы m_0 имеем

$$10am_0 g = 10amg .$$

Откуда находим

$$m_0 = m .$$

3. Поскольку температура жидкости, получившейся при смешивании равных количеств горячей и холодной жидкости, не равна среднему арифметическому температур жидкостей, а потери тепла в окружающее пространство не учитываются, нужно учитывать нагревание калориметра. Пусть теплоемкость калориметра C, C_1 – теплоемкость воды, занимающей половину калориметра. Тогда уравнение теплового баланса для первого смешивания воды дает

$$\left(C + C_1\right)\left(t_0 - t_1\right) = C_1\left(t_2 - t_0\right) .$$

Отсюда находим отношение теплоемкостей калориметра и половинного количества воды в калориметре

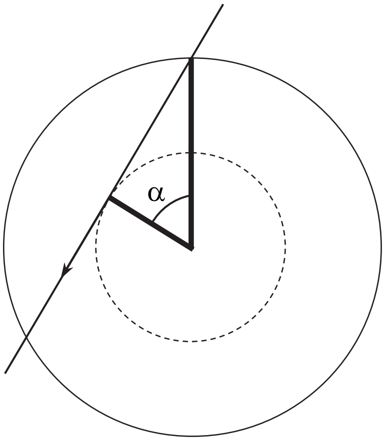
$$\frac{C}{C_1} = \frac{t_2 + t_1 - 2t_0}{t_0 - t_1} = \frac{1}{2} . \qquad (*)$$

Рассмотрим теперь второе смешивание горячей и холодной воды в калориметре. Уравнение теплового баланса в этом случае дает

$$\left(C + \frac{2}{3}C_1\right)\left(t_x - t_1\right) = \frac{4}{3}C_1\left(t_2 - t_x\right),$$

где t_x – искомая температура смеси. Отсюда с учетом (*) получаем

$$t_x = \frac{7t_1 + 8t_2}{15} = 25{,}3 \ \text{°C}.$$



4. Скорость удаления конца часовой стрелки от конца часовой стрелки определяется тем, как растет расстояние между концами стрелок и потому не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается их движение. Перейдем в систему отсчета, в которой минутная стрелка не вращается. В ней часовая стрелка вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega_{мин} - \omega_{час}$, где $\omega_{мин}$ и $\omega_{час}$ – угловые скорости минутной и часовой стрелок, и, следовательно, ее конец движется с постоянной по величине скоростью. Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной тогда, когда вектор скорости часовой стрелки направлен вдоль прямой, соединяющей концы стрелок (см. рисунок). Поэтому в этот момент прямая, проведенная из конца минутной стрелки к концу часовой, является касательной к окружности, по которой движется конец часовой стрелки. А поскольку длина часовой стрелки вдвое меньше длины минутной, угол между стрелками составляет $\alpha = 60°$. А поскольку этот угол составляет шестую часть полного угла, то стрелка пройдет его за шестую часть времени, за которое она совершает полный оборот вокруг минутной стрелки, которое, в свою очередь, равно

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{мин} - \omega_{час}} = \frac{60 \cdot 12}{11} = 65{,}5 \text{ мин.}$$

Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной через 1/6 часть этого времени, т.е. через

$$\Delta t = \frac{2\pi / 6}{\omega_{мин} - \omega_{час}} = \frac{60 \cdot 12}{11 \cdot 6} = 10{,}9 \text{ мин.}$$

5. Поскольку при прямолинейном движении мгновенное ускорение тела определяется как

$$a = \frac{v_к - v_н}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

где $v_к$ и $v_н$ – скорость тела в начале и в конце малого интервала времени Δt, то изменение скорости тела за малый интервал времени Δt равно $\Delta v = a\Delta t$. Если просуммировать изменения скорости тела за все малые интервалы времени, на которые можно разбить полное время движения, получится полное изменение скорости, которое из-за равенства нулю начальной скорости равно конечной скорости тела:

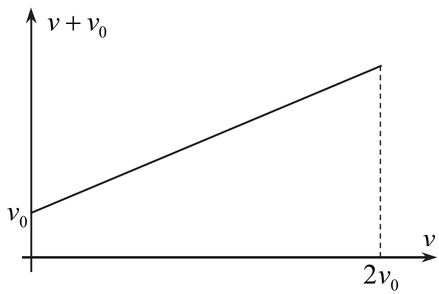
$$\sum_n \frac{\Delta v_n}{a_n} = \sum_n \Delta t_n ,$$

где a_n – ускорение тела внутри малого интервала времени Δt_n. Подставляя в эту формулу зависимость ускорения от скорости, найдем

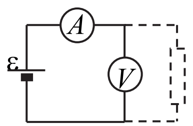
$$\frac{1}{a_0 v_0} \sum_n \Delta v_n \left(v_n + v_0 \right) = \sum_n \Delta t_n ,$$

где v_n – значение внутри *n*-го интервала времени Δt_n. Сумма в правой части дает значение времени τ в тот момент, когда скорость станет равна $2v_0$. Сумма в левой части имеет графический образ как площадь под графиком зависимости $f(v) = v + v_0$ (ср. с вычислением работы переменной силы). Вычисляя эту площадь (см. рисунок), получим

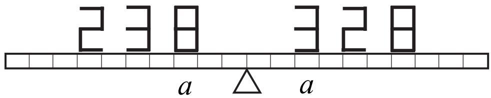
$$\tau = \frac{4v_0}{a_0}.$$



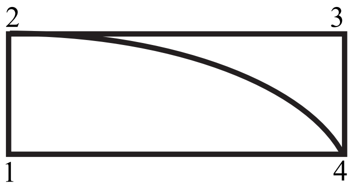
4.4. Заключительный тур, 10 класс



1. К батарее с ЭДС ε и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями. Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, вольтметра в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.



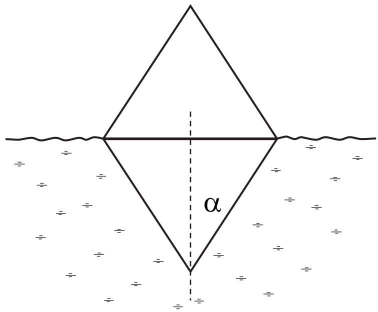
2. Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры – один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на конце второго коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?



3. Имеется прямоугольник 1234, изготовленный из металлических стержней одинакового материала и одинакового сечения, причем длины сторон прямоугольника относятся как 1-2 : 1-4 = 1:2. Вершины 2 и 4 связаны таким же (но кривым) стержнем с длиной, втрое большей длины стержня 1-2. Температуры вершин 1 и 3 поддерживаются постоянными и равными $t_1 = 100\ ° \ t_3 = 0$ °С. Найти температуры вершин 2 и 4?

Указание. Тепловой поток между точками, температуры которых поддерживаются постоянными, пропорционален разности температур точек, обратно пропорционален расстоянию между ними и коэффициенту теплопроводности среды между ними (закон Фурье). Считать, что боковые поверхности стержней теплоизолированы.

4. Минутная стрелка часов в 2 раза длиннее часовой. В некоторый момент времени стрелки совпали. Через какое время после этого конец часовой стрелки будет удаляться от конца минутной с максимальной скоростью?



5. Буй составлен из двух одинаковых металлических конусов с высотой $h = 1$ м и углом при вершине ($\alpha = 20°$; см. рисунок). Буй плавает в воде в вертикальном положении, погрузившись в воду до половины. Через щели внутрь буя просачивается вода, выходит воздух, и буй медленно погружается в воду. Будет ли меняться разность уровней воды внутри и снаружи буя в процессе его погружения в воду? Найти разность уровней воды внутри и снаружи буя, в тот момент времени, когда она будет минимальной. Толщиной стенок буя пренебречь.

Указание. Объем прямого кругового конуса определяется соотношением $V = (1/3)\pi R^2 h$, где R – радиус основания конуса; h – его высота.

Ответы и решения

1. По закону Ома для замкнутой цепи имеем (в случае цепи без дополнительного сопротивления) находим ток в цепи (который равен току через амперметр)

$$I = \frac{\varepsilon}{r + r_A + r_V},$$

где r – внутреннее сопротивление источника; r_A – сопротивление амперметра; r_V – сопротивление вольтметра. Отсюда находим напряжение на вольтметре

$$U_V = Ir_V = \frac{\varepsilon r_V}{r + r_A + r_V} = \varepsilon - I\left(r + r_A\right). \qquad (*)$$

Аналогично находим, что когда параллельно вольтметру подключают сопротивление R, напряжение на вольтметре будет равно

$$U'_V = \varepsilon - I'\left(r + r_A\right).$$

Но по условию показания амперметра увеличиваются вдвое ($I' = 2I$), а вольтметра вдвое уменьшаются ($U'_V = U_V / 2$). Отсюда

$$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2I\left(r + r_A\right). \qquad (**)$$

Выражая теперь величину $I\left(r + r_A\right)$ из формулы (*) и подставляя ее в формулу (**), получим

$$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2\left(\varepsilon - U_V\right),$$

или

$$U_V = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

2. Конечно, массы макетов чисел 238 и 328 равны, но при их сравнении на коромысельных весах сравниваются не силы тяжести, действующие на макеты чисел, а моменты сил тяжести относительно опоры. Посчитаем моменты сил, действующих на правое и левое плечо коромысла. «Двойка» (слева) и «восьмерка» (справа). У «восьмерки» есть два лишних стержня, расположенных на расстояниях $6a$ и $7a$ относительно опоры. Значит, для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем $\Delta M_{\text{пр}} = 6amg + 7amg = 13amg$. «Тройка» (слева) и «двойка» (справа). У «двойки» есть лишний стержень на расстоянии $5a$ от опоры, и не хватает стержня на расстоянии $4a$ от опоры. Следовательно, избыточный момент, действующий на правое плечо коромысла весов, есть $\Delta M_{\text{пр}} = 13amg + 5amg - 4amg = 14amg$. «Восьмерка» (слева) и «тройка» (справа). У восьмерки есть 2 лишних стержня на расстоянии $2a$ от опоры. Поэтому для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{\text{пр}} = 14amg - 4amg = 10amg.$$

Следовательно, число 328 справа от опоры перевесит. Поскольку восстанавливающий равновесие весов груз нужно положить на самый конец левого колена коромысла (плечо $10a$) для его массы m_0 имеем

$$10am_0g = 10amg\ .$$

Откуда находим

$$m_0 = m\ .$$

3. Очевидно, что в равновесии (когда все температуры не меняются) тепловой поток по стержню 1-2 равен сумме тепловых потоков по стержням 2-3 и 2-4. Поэтому из закона Фурье имеем

$$\frac{t_1 - t_2}{l} = \frac{t_2 - t_3}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l}\ ,$$

где l – длина стержня 1-2. Отсюда

$$6t_1 + 3t_3 = 11t_2 - 2t_4\ . \qquad (*)$$

Аналогично, тепловой поток по стержню 4-3 равен сумме тепловых потоков по стержням 2-4 и 1-4. Поэтому

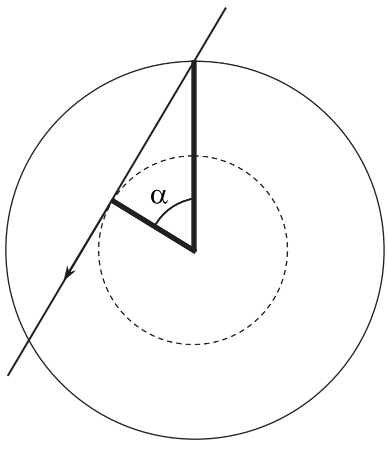
$$\frac{t_4 - t_3}{l} = \frac{t_1 - t_4}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l}\ .$$

Откуда

$$3t_1 + 6t_3 = -2t_2 + 11t_4\ . \qquad (**)$$

Решая систему уравнений (*)–(**), получим

$$t_2 = \frac{72t_1 + 45t_3}{117} = 61{,}5\ °\text{C}, \quad t_4 = \frac{45t_1 + 72t_3}{117} = 38{,}5\ °\text{C}.$$



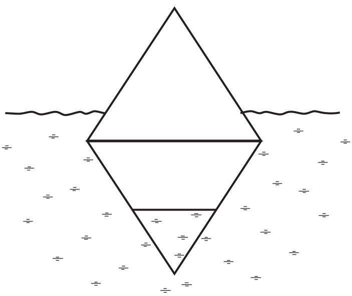
4. Скорость удаления конца часовой стрелки от конца часовой стрелки определяется тем, как растет расстояние между концами стрелок и потому не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается их движение. Перейдем в систему отсчета, в которой минутная стрелка не вращается. В ней часовая стрелка вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}$, где

$\omega_{\text{мин}}$ и $\omega_{\text{час}}$ – угловые скорости минутной и часовой стрелок, и, следовательно, ее конец движется с постоянной по величине скоростью. Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной тогда, когда вектор скорости часовой стрелки направлен вдоль прямой, соединяющей концы стрелок (см. рисунок). Поэтому в этот момент прямая, проведенная из конца минутной стрелки к концу часовой, является касательной к окружности, по которой движется конец часовой стрелки. А поскольку длина часовой стрелки вдвое меньше длины минутной, угол между стрелками составляет $\alpha = 60°$. А поскольку этот угол составляет шестую часть полного угла, то стрелка пройдет его за шестую часть времени, за которое она совершает полный оборот вокруг минутной стрелки, которое в свою очередь равно

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}} = \frac{60 \cdot 12}{11} = 65{,}5 \text{ мин.}$$

Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной через 1/6 часть этого времени, т.е. через

$$\Delta t = \frac{2\pi / 6}{\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}} = \frac{60 \cdot 12}{11 \cdot 6} = 10{,}9 \text{ мин.}$$



5. Пусть в буй просочилась вода, и он погрузился на некоторую глубину (см. рисунок). Рассмотрим условие равновесия буя. В равновесии сила тяжести равна силе Архимеда. Поэтому

$$(M + m)g = \rho g V_{\text{п.ч.}},$$

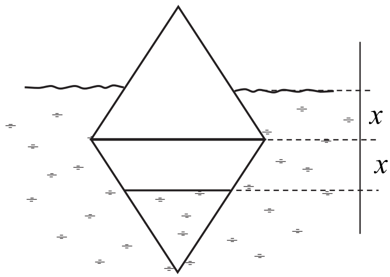
где M – масса буя; m – масса воды в буе; ρ – плотность воды; $V_{\text{п.ч.}}$ – объем погруженной в воду части буя. С другой стороны, объем погруженной в воду части буя складывается из (стенки буя считаем тонкими) объема его погруженной части, заполненной водой $V_{\text{п.ч.с.в.}}$, и объема его погруженной части без воды $V_{\text{п.ч.б.в.}}$. Поэтому

$$(M + m)g = \rho g \left(V_{\text{п.ч.с.в.}} + V_{\text{п.ч.б.в.}}\right).$$

Но в пренебрежении толщиной стенок, очевидно, $m = \rho V_{\text{п.ч.с.в.}}$. Поэтому условие равновесия буя дает

$$M = \rho V_{\text{п.ч.б.в.}}.$$

Из этой формулы следует, что объем его подводной части, не заполненный водой, определяется только массой самого буя, т.е. не меняется в процессе его погружения в воду из-за наполнения водой. А поскольку ширина центральной части буя больше ширины его концов, то расстояние между уровнем воды внутри буя и уровнем воды в водоеме будет максимальным, когда максимальна ширина части буя, расположенной между этими уровнями. Т.е. это расстояние будет минимально, если расстояния от середины буя до уровня воды внутри буя и уровня воды в водоеме будут одинаковы (см. рисунок, эти расстояния обозначены как x). Найдем эти расстояния.



Из условия равновесия буя без воды (учитывая, что он погружается в воду ровно наполовину) имеем

$$M = \rho V_{\text{п.ч.б.в.}} = \rho \frac{1}{3}\pi R^2 h = \rho \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha,$$

где R – радиус самой широкой части буя. Если буй заполнен водой слоем высотой h_1, то объем незаполненной водой части буя от его средней части до уровня воды внутри буя будет равен

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(h^3 - h_1^3\right)\operatorname{tg}^2\alpha. \qquad (*)$$

Поскольку в случае минимального расстояния между уровнями воды внутри буя и в водоеме расстояния от средней части буя до уровней воды внутри буя и в водоеме одинаковы, объем незаполненной водой подводной части буя равен удвоенному объему (*) и равен объему половины буя. Поэтому

$$\frac{2}{3}\pi\left(h^3 - h_1^3\right)\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Отсюда находим

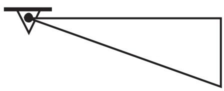
$$h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} \qquad \Rightarrow \qquad x = h - h_1 = \frac{h\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\sqrt[3]{2}}.$$

А минимальное расстояние между уровнями воды внутри буя и в водоеме равно

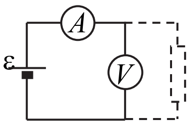
$$\Delta h_{\min} = 2\left(h - h_1\right) = \frac{2h\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\sqrt[3]{2}} = 0,41h = 0,41 \text{ м}.$$

От угла при вершине буя ответ не зависит.

4.5. Заключительный тур, 11 класс. Вариант 1



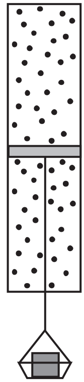
1. Вырезанный из листа фанеры плоский прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся друг другу, как 1:2 подвешен шарнирно за вершину меньшего острого угла к горизонтальному потолку. Треугольник удерживают так, что его длинный катет горизонтален (см. рисунок). Какую минимальную силу нужно приложить к треугольнику для этого. Масса треугольника – m.

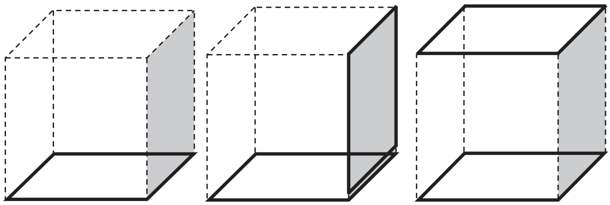


2. К батарее с ЭДС ε и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями. Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, вольтметра в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.

3. Тело начинает движение из состояния покоя с ускорением a_0 и далее движется прямолинейно. Из-за действия силы сопротивления воздуха ускорение тела падает с увеличением его скорости v по закону $a = a_0 v_0 / (v + v_0)$, где v_0 – известная постоянная. Через какое время скорость тела достигнет значения $2v_0$?

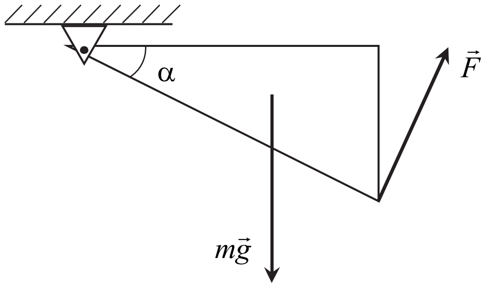
4. В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью сечения S и длиной h находится очень легкий подвижный поршень, к которому с помощью длинного стержня прикреплена легкая чашка. В отсеках, на которые поршень делит сосуд, находится по одному молю идеального одноатомного газа под давлением p_0, а поршень в равновесии делит сосуд на равные части. На чашку кладут тело массой m и поршень после нескольких колебаний приходит в новое положение равновесия. Найти смещение поршня относительно первоначального положения. Сосуд теплоизолирован, поршень хорошо проводит тепло, теплоемкостью поршня и сосуда пренебречь. Каким будет смещение поршня при $m \to \infty$ и почему?





5. Индуктивность замкнутого квадратного витка, сделанного из тонкой проволоки, равна L (левый рисунок). Если рядом с этим витком перпендикулярно его плоскости и без электрического контакта с ним расположить точно такой же по размеру, но сверхпроводящий виток (так, что они образуют соседние грани куба), то индуктивность первого витка станет равна L_1 (средний рисунок). Какой будет индуктивность витка, если сверхпроводящий виток расположить параллельно его плоскости так, что они образуют с первым противоположные грани куба?

1. Чтобы треугольник был в равновесии момент искомой силы $\vec{F}$ относительно шарнира должен быть равен по величине моменту силы тяжести. Поэтому сила *F* будет минимальна, если будет максимальным ее плечо относительно шарнира. Следовательно, внешнюю силу нужно приложить к точке треугольника, максимально удаленной от шарнира, и направить перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с шарниром. Т.е. внешняя сила $\vec{F}$ должна быть приложена к вершине угла $\pi/2-\alpha$ и направлена перпендикулярно гипотенузе (см. рисунок).



Для того чтобы найти силу *F*, воспользуемся условием вторым равновесия. Причем моменты сил будем вычислять относительно шарнира – это позволит сделать момент неизвестной силы реакции шарнира равным нулю.

Пусть длина меньшего катета треугольника равна *a*. Тогда длина большего катета – $2a$, а дина гипотенузы – $\sqrt{5}a$. Поэтому момент силы $\vec{F}$ относительно шарнира равен $M_F=\sqrt{5}Fa$. Найдем момент силы тяжести. Центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан. А поскольку точка пересечения медиан делит каждую медиану на части, относящиеся друг к другу, как 2:1, то плечо силы тяжести относительно шарнира равно двум третьим частям его горизонтального катета. Поэтому $M_{mg}=(2/3)mg2a=(4/3)mga$. Следовательно, условие моментов для треугольника дает

$$\sqrt{5}Fa = \frac{4}{3}mga .$$

Отсюда находим

$$F = \frac{4}{3\sqrt{5}}mg .$$

2. По закону Ома для замкнутой цепи имеем (в случае цепи без дополнительного сопротивления) находим ток в цепи (который равен току через амперметр)

$$I = \frac{\varepsilon}{r + r_A + r_V},$$

где r – внутреннее сопротивление источника; r_A – сопротивление амперметра; r_V – сопротивление вольтметра. Отсюда находим напряжение на вольтметре

$$U_V = Ir_V = \frac{\varepsilon r_V}{r + r_A + r_V} = \varepsilon - I\left(r + r_A\right). \qquad (*)$$

Аналогично находим, что когда параллельно вольтметру подключают сопротивление R, напряжение на вольтметре будет равно

$$U'_V = \varepsilon - I'\left(r + r_A\right).$$

Но по условию показания амперметра увеличиваются вдвое ($I' = 2I$), а вольтметра вдвое уменьшаются ($U'_V = U_V / 2$). Отсюда

$$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2I\left(r + r_A\right). \qquad (**)$$

Выражая теперь величину $I\left(r + r_A\right)$ из формулы (*) и подставляя ее в формулу (**), получим

$$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2\left(\varepsilon - U_V\right)$$

или

$$U_V = \frac{2}{3}\varepsilon .$$

3. Поскольку при прямолинейном движении мгновенное ускорение тела определяется как

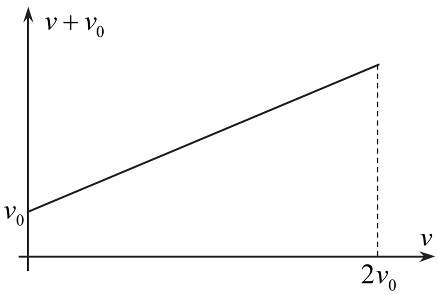
$$a = \frac{v_к - v_н}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

где $v_к$ и $v_н$ – скорость тела в начале и в конце малого интервала времени Δt, то изменение скорости тела за малый интервал времени Δt равно $\Delta v = a\Delta t$. Если просуммировать изменения скорости тела за все малые интервалы времени, но которые можно разбить полное время движения, получится полное изменение скорости, которая из-за равенства нулю начальной скорости равна конечной скорости тела

$$\sum_n \frac{\Delta v_n}{a_n} = \sum_n \Delta t_n,$$

где a_n – ускорение тела внутри малого интервала времени Δt_n. Подставляя в эту формулу зависимость ускорения от скорости, найдем

$$\frac{1}{a_0 v_0} \sum_n \Delta v_n \left(v_n + v_0 \right) = \sum_n \Delta t_n,$$



где v_n – значение внутри n-го интервала времени Δt_n. Сумма в правой части дает значение времени τ в тот момент, когда скорость станет равна $2v_0$. Сумма в левой части имеет графический образ как площадь под графиком зависимости $f(v) = v + v_0$ (ср. с вычислением работы переменной силы). Вычисляя эту площадь (см. рисунок), получим

$$\tau = \frac{4v_0}{a_0}.$$

4. Поскольку поршень хорошо проводит тепло, можно считать, что температура газа в отсеках одинакова. После того как на чашку положили тело, и тело вместе с поршнем опустилось вниз, потенциальная энергия тела перешла во внутреннюю энергию газа. Поэтому, если поршень опустился на величину Δx вниз, закон сохранения энергии дает

$$mg\Delta x = \frac{3}{2} p_{\text{в}} S\left(l + \Delta x\right) + \frac{3}{2} p_{\text{н}} S\left(l - \Delta x\right) - \frac{3}{2} 2 p_0 Sl \,, \qquad (*)$$

где $2l$ – длина сосуда; $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{в}}$ – давления газа в верхней и нижней частях сосуда. С другой стороны, из условия равновесия поршня имеем

$$mg = \left(p_{\text{н}} - p_{\text{в}}\right) S \,. \qquad (**)$$

Кроме того, внутренние энергии газа над и под поршнем равны. Поэтому

$$p_{\text{в}}\left(l + \Delta x\right) = p_{\text{н}}\left(l - \Delta x\right). \qquad (***)$$

Исключая из системы уравнений (*)–(***) давления газа, получим уравнение относительно Δx

$$5mg\Delta x^2 + 6p_0 Sl\Delta x - 3mgl^2 = 0 \,.$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \left(\frac{\sqrt{9p_0^2 S^2 + 15m^2 g^2} - 3p_0 S}{5mg}\right) l \,.$$

При $m \to \infty$ поршень не ляжет на дно сосуда, даже несмотря на бесконечную силу тяжести. Это связано с тем, что при большой массе груза даже небольшое его смещение приводит к высвобождению большой потенциальной энергии, и соответственному сильному нагреванию газа в сосуде, возрастанию его давления и увеличению разности давлений между нижним и верхним газами. Пренебрегая в случае большой массы величиной $p_0 S$ по сравнению с mg, получим

$$\Delta x = \sqrt{\frac{3}{5}} l \,.$$

5. Пропустим через первый виток ток *I*. Тогда поток магнитного поля через него будет равен

$$\Phi = LI\ , \tag{1}$$

где *I* – индуктивность первого витка. Поскольку магнитных зарядов не существует, суммарный поток через любую замкнутую поверхность, в состав которой входит наш виток (и в частности, через куб, для которого рассматриваемый виток является одной гранью), будет равен нулю. Поэтому

$$\Phi = 4\Phi_{12} + \Phi_{16}\ , \tag{2}$$

где Φ_{12} – поток магнитного поля через соседнюю грань куба; Φ_{16} – поток магнитного плоя через противоположную грань. Поскольку магнитный поток через сверхпроводящий виток должен быть равен нулю, то при поднесении его к рассматриваемому витку в нем индуцируется ток I_1, создающий точно такой же (но противоположный) поток через самого себя. Ток I_1 создает магнитный поток через основной виток, который во столько же раз меньше потока Ф, во сколько раз ток I_1 меньше тока *I*. Поэтому поток магнитного поля через основной виток при поднесении к нему сверхпроводящего витка будет равен

$$\Phi - \frac{I_1}{I}\Phi_{12} = \Phi - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi^2}\right). \tag{3}$$

С другой стороны, этот поток по определению равен $L_1 I$. Отсюда получаем

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi} = \sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\ . \tag{4}$$

В результате из формулы (2) находим

$$\Phi_{16} = \Phi\left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right). \tag{5}$$

Если теперь мы уберем боковой виток и разместим сверхпроводящий виток на противоположной грани куба, то в нем возникнет такой ток I_2, который, с одной стороны, будет компенсировать магнитный поток Φ_{16} основного тока через самого себя, а с другой – создаст поток через основной виток, во столько же раз меньший потока Φ_{16}, во сколько ток I_2 меньше тока *I*. Поэтому поток магнитного поля через основной виток в этом случае равен

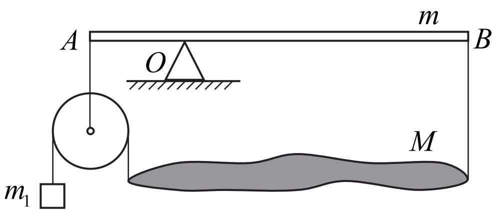
$$\Phi_2 = \Phi - \frac{I_2}{I}\Phi_{16} = \Phi - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi^2}\right). \qquad (6)$$

Но этот поток по определению равен $L_2 I$, где L_2 – индуктивность основного витка в присутствии сверхпроводящего витка на противоположной грани. Поэтому из предыдущей формулы получаем

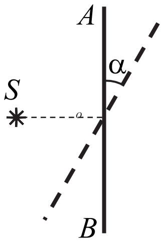
$$L_2 = L\left(1 - \left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right)^2\right) = 0{,}96 \text{ мГн.}$$

4.6. Заключительный тур, 11 класс. Вариант 2

1. Рычаг *AB* массой *m* находится в равновесии на точечной опоре *O*. Плечи рычага относятся как *AO* : *OB* = 1 : 2. К концам рычага с помощью невесомых нитей прикреплены невесомый блок и неоднородное тело массой *M*. Ко второму концу тела прикреплена нить с грузом, переброшенная через блок. Найти массу груза m_1.

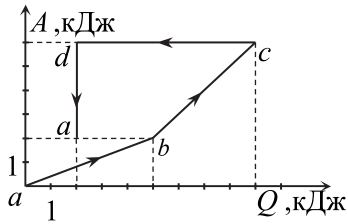


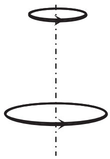
2. Точечное тело начинает движение из точки $x = 0$ в положительном направлении оси *x*. Известно, что координата тела *x* и его скорость в процессе движения связаны соотношением $x = Av_x^2 + B$, где $A = -2$ с^2/м, $B = 2$ м. Вернется ли тело в точку $x = 0$ и если да, то через какое время после выхода из нее?



3. Точечный источник света S находится на расстоянии $d = 15$ см от зеркала AB (см. рисунок). Зеркало вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через основание перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало (через точку O). Найти мгновенную скорость и мгновенное ускорение изображения источника в зеркале в тот момент, когда зеркало повернулось на угол $\alpha = 30°$ по сравнению с первоначальным положением.

4. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс a-b-c-d-a (начальное и конечное состояния газа совпадают). Дан график зависимости работы, совершенной газом с начала процесса, от количества теплоты, полученного газом с начала процесса. Качественно построить график зависимости давления газа от его объема в этом процессе и объяснить построение. Найти КПД процесса.





5. Имеется два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найти силу взаимодействия колец.

Ответы и решения

1. Пусть сила натяжения левой нити (привязанной к телу) – T_1, правой – T_2. Тогда условие равновесия тела дает

$$Mg = T_1 + T_2 .$$

С другой стороны, из условия равновесия груза имеем $T_1 = m_1 g$. Из условия равновесия блока находим силу натяжения нити T_3, связывающей левый конец рычага с осью блока $T_3 = 2T_1 = 2m_1 g$. Поэтому из условия равновесия рычага имеем

$$\frac{1}{3}T_3 = \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{3}m_1 g = \frac{2}{3}\left(Mg - m_1 g\right) + \frac{1}{6}mg\,.$$

Отсюда находим

$$m_1 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{8}m\,.$$

2. Поскольку тело начинает движение из точки $x = 0$, то его начальную скорость можно найти из уравнения, связывающего координату и скорость, подставляя в него значение $x = 0$:

$$v_{0,x} = \sqrt{-\frac{B}{A}}$$

(с учетом отрицательного значения B и положительного A под корнем положительное число, перед корнем взят знак «+», поскольку по условию тело начало движение в положительном направлении оси x).

Определим теперь характер движения тела. Для этого продифференцируем данную функцию по времени и найдем, таким образом, связь его скорости и ускорения

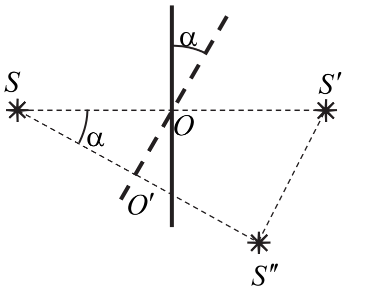
$$\frac{dx}{dt} = 2Av_x\frac{dv_x}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_x = 2Av_x a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{1}{2A} = \text{const}\,, \qquad (*)$$

где a_x – проекция ускорения на ось x. Из формулы (*) следует, что проекция ускорения постоянна и отрицательны. Поэтому тело движется равноускоренно сначала в положительном направлении оси x с торможением, а затем, разгоняясь, в отрицательном направлении оси x. Поэтому тело обязательно попадет в точку $x = 0$. Чтобы найти время движения до этой точки, воспользуемся аналогией с движением вблизи поверхности земли. Если тело бросить вертикально вверх с начальной скоростью v_0, оно упадет на землю через время

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}\,.$$

Поэтому наше тело вернется в точку $x=0$ через время

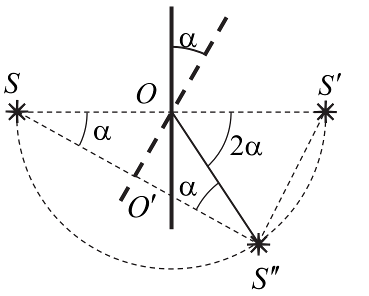
$$\Delta t = \frac{2v_{0,x}}{|a_x|} = 2\sqrt{-\frac{B}{|A|}}2|A| = 4\sqrt{B|A|} = 8 \text{ с.}$$



3. Определим характер движения изображения. Построение старого (S') и нового (S''; после поворота зеркала на угол α) изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол $SS''S'$ – прямой. Действительно, треугольники $SO'O$ и $SS''S'$ подобны, так как у них общий угол α, а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны,

$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2 .$$

А поскольку угол $SO'O$ – прямой, то прямым является и угол $SS''S'$. Причем независимо от угла поворота зеркала. Это значит, что изображение источника движется по такой кривой, что угол $SS''S'$ все время остается прямым. Отсюда следует, что изображение источника движется по окружности, для которой отрезок SS' является диаметром. А потому радиус этой окружности равен расстоянию от источника до зеркала в начальный момент, т.е. $R = SO = d$. Эта окружность показана на рисунке.



Найдем теперь угловую скорость вращения изображения. Пусть зеркало повернулось на угол α. Тогда (поскольку траектория движения изображения – окружность) $OS = OS''$ и $\angle OSS'' = \angle OS''S = \alpha$ (эти углы отмечены на рисунке). Поэтому $\angle S'OS'' = 2\alpha$, и, следовательно, изображение вращается с постоянной угловой скоростью ω', которая вдвое больше угловой скорости зеркала

$$\omega' = 2\omega .$$

Поэтому ускорение изображения является центростремительным, его величина постоянна (т.е. не зависит от данного в условии угла α) и равна

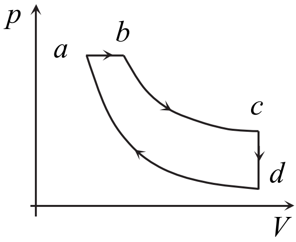
$$a' = (2\omega)^2 R = 4\omega^2 d = 0,6 \text{ м/с}^2.$$

4. Из графика видим, что для первого процесса *a-b* (начало процесса – в начале координат) выполнено условие

$$A_{a-b} = \frac{5}{2} Q_{a-b} ,$$

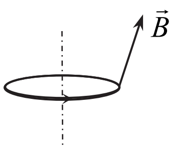
где A_{a-b} – работа газа; Q_{a-b} – количество теплоты, полученное газом. Такая связь работы и количества теплоты, полученного одноатомным газом, характерна для изобарического процесса. Поэтому процесс *a-b* – изобарический, в котором газ получил количество теплоты $Q_{a-b} = 5$ кДж. В процессе *b-c* $A_{b-c} = Q_{b-c}$, поэтому $\Delta U_{b-c} = 0$, и, следовательно, процесс *b-c* – изотермический, в котором газ получил количество теплоты $Q_{b-c} = 4$ кДж. На участке *c-d* работа газа, совершенная с начала процесса, не меняется, следовательно, $A_{c-d} = 0$ – процесс *c-d* – изохорический, в котором газ отдает количество теплоты $Q_{c-d} = 4$ кДж. После состояния *d* количество теплоты, полученное газом с начала процесса не меняется, $Q_{d-a} = 0$, процесс *d-a* – адиабатический, в котором газ совершает работу $A_{d-a} = -4$ кДж. Таким образом, за цикл газ совершил положительную работу $A_{a-b-c-d-a} = 2$ кДж, а получил от нагревателя (участки *a-b-c*, на которых газ получал тепло) следующее количество теплоты $Q_{a-b-c} = Q_{a-b} + Q_{b-c} = 9$ кДж. Поэтому КПД циклического процесса *a-d-c-d-a* равен

$$\eta_{a-b-c-d-a} = \frac{A_{a-b-c-d-a}}{Q_{a-b-c}} = \frac{2}{9} = 0,22 .$$



Качественный график процесса *a*-*d*-*c*-*d*-*a* в координатах $p-V$ приведен на рисунке, в котором процесс *a*-*b* – изобара, *b*-*c* – изотерма, *c*-*d* – изохора, *d*-*a* – адиабата. Поскольку работа и количество теплоты не являются функциями состояния, и в условии не задано количество вещества газа, определить параметры этого цикла (объемы, давления, температуры) по данным условия невозможно.

5. Найдем индукцию магнитного поля, созданного кольцом радиусом $2R$ в области второго кольца, а затем по закону Ампера найдем силу взаимодействия колец.



Индукция магнитного поля кольца на его оси направлена вдоль оси, а в точках, расположенных на некотором расстоянии от оси (т.е. в области второго кольца) под некоторым углом к оси (см. рисунок). Используя далее закон взаимодействия магнитного поля и тока (закон Ампера), заключаем, что суммарная сила Ампера, действующая на кольцо радиусом R со стороны магнитного поля второго кольца, направлена вдоль оси колец и определяется составляющей вектора $\vec{B}$, направленной перпендикулярно оси

$$F = 2\pi RIB_{\perp}, \qquad (1)$$

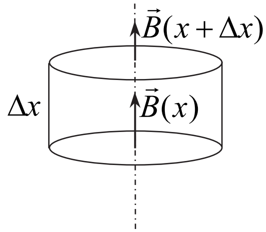
где $B_{\perp}$ – составляющая вектора индукции, перпендикулярная оси кольца. Найдем $B_{\perp}$.

Используем известное выражение для индукции магнитного поля кольца на его оси на расстоянии x от его плоскости

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I\left(2R\right)^2}{\left(\left(2R\right)^2 + x^2\right)^{3/2}}, \qquad (2)$$

где I – ток в кольце; $2R$ – его радиус. Рассмотрим вспомогательную цилиндрическую поверхность соосную оси кольца, с радиусом, равным радиусу второго кольца R, и малой высотой Δx (см.

рисунок). Так как величина индукции на оси кольца уменьшается с ростом расстояния от кольца, то поток вектора магнитной индукции через верхнее основание цилиндрической поверхности меньше потока через нижнее. А поскольку поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю (отсутствуют магнитные заряды), то разница потоков через основания



$$\Delta\Phi = \pi R^2 \left(B(x) - B(x+\Delta x) \right) \tag{3}$$

(πR^2 – площадь оснований цилиндра) равна потоку вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра

$$\Delta\Phi = B_\perp 2\pi R \Delta x\,, \tag{4}$$

где $2\pi R\Delta x$ – площадь его боковой поверхности. Из формул (3), (4) находим

$$B_\perp = -\frac{R}{2}\frac{\left(B(x+\Delta x) - B(x) \right)}{\Delta x}\,. \tag{5}$$

Так как Δx мало, то выражение (5) сводится к производной величины индукции на оси кольца (2) по x. Дифференцируя функцию (2), находим по формулам (5), (1) в пределе $x \gg R$

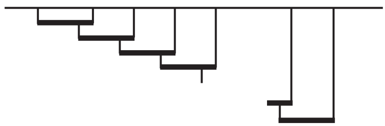
$$F = 6\pi\mu_0 \frac{I^2 R^4}{x^4}\,.$$

4.7. Заключительный тур, 11 класс. Вариант 3

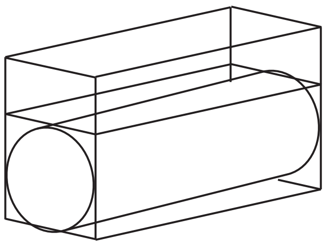
1. Амперметр подключают к источнику, имеющему некоторое внутреннее сопротивление, и он показывает силу тока $I_1 = 1$ А. Если параллельно первому амперметру подключить второй, точно такой же, то сумма показаний амперметров будет равна $I_2 = 1{,}2$ А.

Найти сумму показаний 8 точно таких же амперметров, подключенных к этому же источнику параллельно.

2. Имеется 2018 одинаковых стержней массой $m = 1$ кг. Каждый стержень подвешен на двух нитях, прикрепленных к его концам. Левый стержень подвешен к горизонтальному потолку. Все остальные стержни подвешены так, что одна из нитей прикреплена к потолку, вторая – к «предыдущему» стержню в точке, отстоящей на одну пятую часть его длины от его правого конца (см. рисунок). Найти силу натяжения самой левой нити. Считать, что $g = 10$ м/с^2.



3. Однородный цилиндр радиусом R и высотой h положили в кювету в форме прямоугольного параллелепипеда, длина которой на очень небольшую величину превосходит длину цилиндра h, а ширина – диаметр цилиндра так, что цилиндр можно положить в кювету с очень небольшими зазорами между ним и стенками кюветы. Затем в кювету налили воду, которая только-только покрывает цилиндр (см. рисунок). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды? Плотность воды ρ, плотность материала цилиндра 6ρ .



4. В протекторе покрышек переднего и заднего колес велосипеда застряли два маленьких камня. В тот момент, когда камень на заднем колесе касается земли, камень на переднем находится в крайнем переднем положении (см. рисунок; камни обведены кружками). Найти минимальное расстояние между камнями в процессе движения велосипеда. Через какое минимальное время после положения, показанного на рисунке, расстояние между камнями достигает минимального значения? Скорость велосипеда – v, радиус колес – R, расстояние между центрами колес – $3R$. Колеса не проскальзывают по дороге.

5. Два тела с теплоемкостями $2C$ и C имеют температуры T и $3T$ соответственно. Какая минимальная температура может установиться в этой системе, если тела использовать в качестве нагревателя и холодильника теплового двигателя, а произведенная механическая работа будет «уходить» из системы? Какую максимальную работу можно получить в такой системе тел? Других потерь энергии в рассматриваемой системе нет.

Ответы и решения

1. Очевидно, что амперметры неидеальны. Действительно, если бы сопротивление амперметров равнялось бы нулю, то сумма токов через все амперметры (которая равна току через источник) определялась бы ЭДС и внутренним сопротивлением самого источника. А эта величина не меняется при подключении дополнительных амперметров. У нас же ток через источник при подключении одного амперметра и сумма токов через два амперметра – разные.

Пусть сопротивление амперметра – R, сопротивление источника – r. Тогда для тока через источник (или суммы токов через амперметры) получим из закона Ома для замкнутой цепи в первом и втором случае

$$R + r = \frac{\varepsilon}{I_1},$$

$$\frac{R}{2} + r = \frac{\varepsilon}{I_2},$$

где ε – ЭДС источника; $R/2$ – общее сопротивление двух амперметров. Из этой системы уравнений находим

$$R = \frac{2\varepsilon\left(I_2 - I_1\right)}{I_1 I_2}, \qquad r = \frac{\varepsilon\left(2I_1 - I_2\right)}{I_1 I_2}.$$

Тогда закон Ома для замкнутой цепи в случае восьми амперметров, подключенных к источнику параллельно, дает

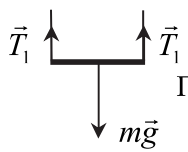
$$\frac{\varepsilon}{I_3} = \frac{R}{8} + r = \frac{\varepsilon\left(I_2 - I_1\right)}{4I_1 I_2} + \frac{\varepsilon\left(2I_1 - I_2\right)}{I_1 I_2} = \frac{\varepsilon\left(7I_1 - 3I_2\right)}{4I_1 I_2},$$

где I_3 – ток через источник (сумма токов через амперметры). Отсюда

$$I_3 = \frac{4I_1 I_2}{7I_1 - 3I_2} = 1{,}41 \text{ А}.$$

2. На самый правый стержень действует сила тяжести и две силы натяжения. Из симметрии задачи очевидно, что последние одинаковы. Поэтому

$$T_1 = \frac{mg}{2}.$$



Первый стержень

Из условия равенства нулю моментов сил, действующих на второй стержень относительно правой нити, получим (чтобы не загромождать рисунок сила натяжения правой нити на рисунке не показана)

$$T_2 l = mg\frac{l}{2} + \frac{mg}{2}\frac{l}{5} = \frac{mgl}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right).$$

Отсюда находим

$$T_2 = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right).$$

Условие равенства нулю моментов сил, действующих на третий стержень (относительно его правого), получим

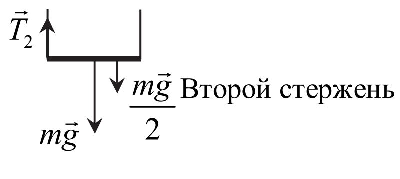
$$T_3 l = mg\frac{l}{2} + T_2\frac{l}{5} = \frac{mgl}{2}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right).$$

Теперь ясна и дальнейшая структура формул. Сила натяжения левой нити, привязанной к n-му стержню, будет определяться суммой конечной геометрической прогрессии

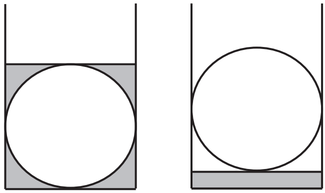
$$T_n = \frac{mg}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right).$$

Используя формулу суммы прогрессии и учитывая, что $(1/5)^{2018}$ – чудовищно малое число, получим

$$T_{2018} = \frac{mg}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2018}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5mg}{8} = 6{,}25 \text{ Н}.$$



3. Работу, которую нужно совершить, найдем как изменение потенциальной энергии воды и цилиндра при его вытаскивании из воды.



Кювета в разрезе, перпендикулярном высоте цилиндра, показана на рисунке, из которого заключаем, что объем налитой в кювету воды V равен разности объема параллелепипеда с основанием $2R\times 2R$ и высотой h. Т.е.

$$V=(4-\pi)R^2h\,.$$

Минимальная высота Δh, на которую нужно поднять цилиндр, чтобы он полностью вытащить его из воды (см. рисунок), находится из очевидного соотношения

$$(4-\pi)R^2h=2R\Delta hh \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h=\frac{(4-\pi)}{2}R\,.$$

Поэтому потенциальная энергия цилиндра возрастает на величину

$$\Delta\Pi_{ц}=Mg\Delta h=3\rho\pi R^2hg\frac{(4-\pi)}{2}R=\frac{3\pi(4-\pi)}{2}\rho ghR^3\,.$$

Центр тяжести воды находился в центре сечения цилиндра, а будет находиться на высоте $\Delta h/2$ от дна кюветы. Поэтому потенциальная энергия воды уменьшится на величину

$$\Delta\Pi_{в}=mg\left(R-\frac{\Delta h}{2}\right)=\rho(4-\pi)R^2hg\left(R-\frac{(4-\pi)}{4}R\right)=\frac{\rho(4-\pi)\pi R^3hg}{4}\,.$$

Поэтому работа, которую необходимо совершить для вытаскивания цилиндра из воды (равная увеличению потенциальной энергии системы цилиндр-вода), равна

$$A = \Delta\Pi_{ц} - \Delta\Pi_{в} = \frac{3\pi(4-\pi)}{2}\rho g h R^3 - \frac{\rho(4-\pi)\pi R^3 hg}{4} =$$

$$= \frac{5\rho(4-\pi)\pi R^3 hg}{4}.$$

4. Поскольку колеса имеют одинаковые размеры и не проскальзывают, они вращаются с одинаковыми угловыми скоростями ω, которые определяются соотношением:

$$\omega = \frac{v}{R}, \qquad (1)$$

где v – скорость велосипеда; R – радиус колеса. Поэтому угол между радиусами-векторами камней $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ относительно центров колес в любой момент времени составляет $90°$ (рис. 1).

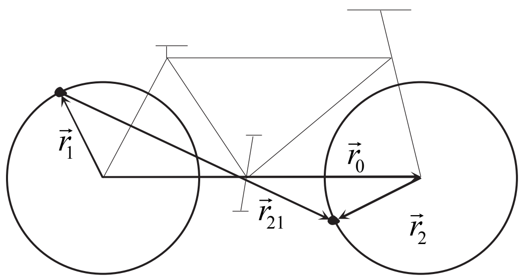


Рис. 1

Радиус-вектор второго камня относительно первого $\vec{r}_{21}$ можно найти из очевидного векторного равенства

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_0 + \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \qquad (2)$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор центра переднего колеса относительно центра заднего. Так как угол между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ всегда равен $90°$, то вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ имеет длину $\sqrt{2}R$ (R – радиус колес), и вращается с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости колес. Таким образом, радиус-вектор второго камня относительно первого можно найти как сумму вектора $\vec{r}_0$ и вектора, имеющего длину $\sqrt{2}R$ и вращающегося с угловой скоростью (1). Сложение этих векторов показано на рис. 2, причем концы векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_{21}$ лежат на окружности радиусом $\sqrt{2}R$ с центром в конце вектора $\vec{r}_0$.

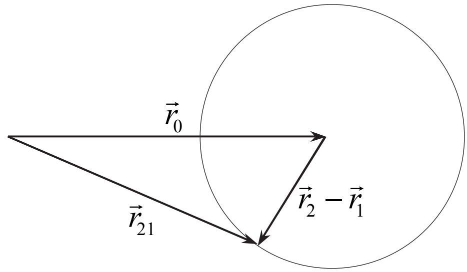


Рис. 2

Из рис. 2 следует, что минимальную длину вектор $\vec{r}_{21}$ (2) имеет в тот момент времени, когда вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ направлен противоположно вектору $\vec{r}_0$, максимальную – когда вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ направлен так же, как и вектор $\vec{r}_0$. Поэтому

$$r_{21}^{\min} = 3R - \sqrt{2}R = R\left(3 - \sqrt{2}\right); \quad r_{21}^{\max} = 3R + \sqrt{2}R = R\left(3 + \sqrt{2}\right).$$

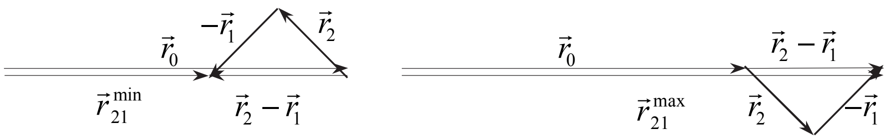


Рис. 3а Рис. 3б

Вычитание векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, отвечающее этим двум случаям, показано на рис. 3а и 3б соответственно. Поэтому длина вектора $\vec{r}_{21}$ будет минимальна, когда вектор $\vec{r}_2$ повернется на угол $5\pi/4$, а максимальна – на угол $\pi / 4$ по сравнению с начальным положением. Отсюда находим моменты времени $t^{\min}$ и $t^{\max}$, когда расстояние между камнями достигает минимального и максимального значения

$$t^{\min} = \frac{5\pi}{4\omega} = \frac{5\pi R}{4v}, \qquad t^{\max} = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi R}{4v}.$$

5. Обычно, когда рассматривают принципы работы тепловой машины, считают, что температуры нагревателя и холодильника в процессе отдачи или получения тепла не изменяются. Это верно для бесконечно больших теплоемкостей нагревателя и холодильника. Если же теплоемкости этих тел конечны, необходимо учитывать, что их температуры в процессе работы машины будут изменяться. Очевидно, что, в конце концов, температуры нагревателя и холодильника сравняются. Действительно, в процессе работы машины рабочее тело берет некоторое количество теплоты у нагревателя, часть его превращает в работу, оставшуюся часть передает холодильнику. Другими словами, происходит теплообмен между горячим нагревателем и холодным холодильником, но с одновременным «уходом» части энергии из этой системы тел в виде механической работы. Учтем этот «уход» в уравнениях теплового баланса.

Пусть в какой-то момент времени температура нагревателя равна T_1, холодильника – T_2. Поскольку нужно найти минимальную температуру тел, необходимо «увести» из системы максимальную работу. Поэтому проведем на этих телах цикл Карно. Возьмем малое количество теплоты δQ у нагревателя (чтобы его температура практически не изменилась). Поскольку КПД цикла Карно при температурах нагревателя и холодильника T_1 и T_2 равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \tag{1}$$

то работа двигателя составит

$$\delta A = \eta \delta Q = \delta Q - \frac{T_2}{T_1} \delta Q. \tag{2}$$

Поэтому более холодному телу будет передано количество теплоты δQ_1, равное

$$\delta Q_1 = \delta Q - \delta A = \frac{T_2}{T_1}\delta Q\,. \tag{3}$$

Таким образом, тепловой баланс в системе тел с учетом «ухода» из системы механической работы выглядит так: если горячее отдает количество теплоты δQ, холодное получает количество теплоты δQ_1 (3).

Найдем теперь, как изменятся температуры тел после осуществления рассмотренного процесса. Так как нагреватель отдает количество теплоты δQ, его температура уменьшится на величину $\delta Q / C$ (C – теплоемкость нагревателя) и составит

$$T_1' = T_1 - \frac{\delta Q}{C}\,. \tag{4}$$

Температура холодильника возрастет на величину $\delta Q_1 / 2C$ ($2C$ – теплоемкость холодильника) и составит

$$T_2' = T_2 + \frac{T_2}{T_1}\frac{\delta Q}{2C}\,. \tag{5}$$

Возводя уравнение (5) в квадрат и учитывая, что δQ – малая величина, и потому слагаемое, содержащее δQ^2, является малым, и им можно пренебречь, получим

$$\left(T_2'\right)^2 \approx \left(T_2\right)^2 + \frac{\left(T_2\right)^2}{T_1}\frac{\delta Q}{C}\,. \tag{6}$$

Перемножим теперь почленно формулы (4) и (6). Имеем

$$T_1'\left(T_2'\right)^2 = T_1\left(T_2\right)^2 - \left(T_2\right)^2\frac{\delta Q}{C} + \left(T_2\right)^2\frac{\delta Q}{C} + \frac{\left(T_2\right)^2}{T_1}\frac{\delta Q^2}{C^2} \approx T_1\left(T_2\right)^2 \tag{7}$$

(в формуле (7) снова отброшено слагаемое, квадратичное по величине δQ). Равенство (7) означает, что в рассмотренном процессе не меняется произведение температуры нагревателя на квадрат температуры холодильника. А поскольку этот результат будет иметь место при любых температурах тел, то он будет иметь место и для конечной температуры нагревателя и холодильника $T_{\text{х}}$:

$$3T(T)^2 = T_{\text{х}}(T_{\text{х}})^2 = T_{\text{х}}^3 \qquad \Rightarrow \qquad T_{\text{х}} = \sqrt[3]{3}\,T = 1{,}442\,T. \tag{8}$$

Таким образом, в результате работы рассмотренной тепловой машины в течение длительного времени температуры нагревателя и холодильника сравняются и станут равными величине (8).

Если бы энергия не уходила из системы, то в результате теплообмена между нагревателем и холодильником их температуры также сравнялись бы, но установившаяся температура была бы больше величины (8). Установившуюся в этом случае температуру тел $T_{\text{у}}$ можно найти из «обычного» уравнения теплового баланса: количество теплоты, отданное нагревателем, равно количеству теплоты, полученному холодильником, при этом указанные количества теплоты можно стандартным образом связать с начальной и конечной температурами тел и их теплоемкостями:

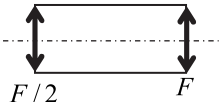
$$C\left(3T - T_{\text{у}}\right) = 2C\left(T_{\text{у}} - T\right). \tag{9}$$

Из формулы (9) получаем

$$T_{\text{у}} = \frac{5}{3}T = 1{,}667\,T. \tag{10}$$

Энергия, связанная с разностью установившихся температур $T_{\text{у}} - T_{\text{х}}$ (10), (11), и есть полная механическая работа, совершенная двигателем до того момента, как температуры нагревателя и холодильника сравняются, и двигатель больше не сможет совершать работу. Поскольку суммарная теплоемкость тел равна $3C$, то эта работа равна

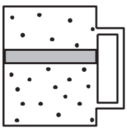
$$A = 3C\cdot\left(T_{\text{у}} - T_{\text{х}}\right) = CT\left(5 - 3\sqrt[3]{3}\right) = 0{,}675CT.$$



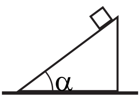
1. Две собирающие линзы одинакового диаметра вставлены в трубу с зачерненными внутренними боковыми стенками (все лучи, падающие на стенки, поглощаются). Известно, что фокусное расстояние одной линзы вдвое больше фокусного расстояния другой, и что параллельные лучи, падающие вдоль оси трубы с любой стороны, после прохождения трубы остаются параллельными. На трубу падает пучок параллельных лучей одинаковой интенсивности сначала слева, а потом справа. Найти отношение освещенностей экрана, расположенного соответственно справа и слева от трубы.

Указание. Освещенностью поверхности называется отношение световой энергии, падающей на малый элемент поверхности, к его площади.

2. Граната брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. В верхней точке своей траектории граната разрывается на множество осколков, которые разлетаются во все стороны с одинаковыми скоростями. Известно, что осколки падали на землю в течение интервала времени Δt. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок?

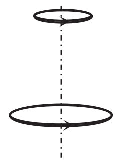


3. Вертикальный цилиндрический сосуд разделен подвижным поршнем массой m и площадью S на два отсека. Под действием силы тяжести поршень медленно опускается. При этом давления газа в сосуде остаются неизменными, что обеспечивается перетеканием газа по трубке малого объема. Температуры газа в отсеках поддерживаются постоянными: T в верхнем и $1,2T$ в нижнем. Найти давление газа в отсеках.



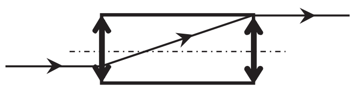
4. На вершину клина, одна грань которого наклонена под углом α, а вторая перпендикулярна горизонтальной поверхности, кладут маленькое тело массой m (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и клином равен k, трение между клином и поверхностью таково, что клин не скользит по поверхности. Возможно ли опрокидывание клина? При какой массе клина?

5. Имеются два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найти силу взаимодействия колец.



Ответы и решения

1. Чтобы пучок оставался параллельным, у линз должны совпадать фокусы. При падении лучей на левую линзу на правую линзу попадут лучи, идущие на расстоянии, не большем половины радиуса левой линзы. Поэтому на площадь, равную площади падающего пучка, придется одна четверть его энергии (остальная попадет на боковые стенки трубы).



При падении лучей справа, луч, идущий через край правой линзы, окажется на расстоянии, равном половине радиуса левой. Поэтому вся энергия пучка придется на вчетверо меньшую площадь. Поэтому

$$\frac{W_{\text{правый экран}}}{W_{\text{левый экран}}} = \frac{1}{16}.$$

2. Граната поднимается на высоту

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

В этот момент времени граната взрывается и осколки разлетаются во все стороны с одинаковыми скоростями. Пусть скорости осколков сразу после взрыва равна v. Тогда, очевидно, осколки будут падать на землю в течение времени

$$\Delta t = \frac{2v}{g}. \qquad (*)$$

Действительно, первым на землю упадет осколок, летящий после взрыва вертикально вниз, последним – вертикально вверх. А поскольку последний вернется в точку взрыва через время (*) после взрыва, а затем в точности повторит движение первого, то время (*) и будет интервалом между падениями на землю последнего и первого. Из формулы (*) находим скорости осколков сразу после взрыва

$$v = \frac{g\Delta t}{2}.$$

Чтобы найти время падения на землю первого осколка, применим к нему закон равноускоренного движения

$$h = vt + \frac{gt^2}{2}, \qquad (**)$$

где t – время падения на землю первого осколка. Решая квадратное уравнение (**), находим

$$t = \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} - \frac{\Delta t}{2}.$$

3. Поскольку поршень движется медленно, то он в любой момент времени находится в равновесии. Поэтому

$$mg = \left(p_{\text{н}} - p_{\text{в}}\right)S, \qquad (*)$$

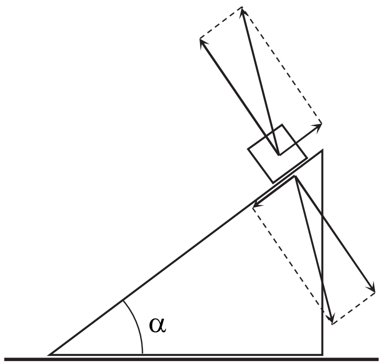
где $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{в}}$ – давления газа снизу и сверху от поршня; S – площадь сосуда. Поскольку давления и температуры газов над и под поршнем не изменяются, то не изменяются и концентрации газов. А поскольку изменения объемов верхнего и нижнего отсеков одинаковы по величине, и все молекулы из нижнего отсека переходят в верхний, то концентрации газов над и под поршнем одинаковы. Используя далее основное уравнение МКТ $p = nkT$, где n – концентрация молекул газа; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура, получим из (*)

$$n=\frac{mg}{kS\left(T_н-T_в\right)}=\frac{mg}{0,2kST}=\frac{5mg}{kST}.$$

Теперь из основного уравнения МКТ находим давления

$$p_н=nkT_н=\frac{5mgT_н}{ST}=\frac{6mg}{S},\qquad p_в=nkT_в=\frac{5mgT_в}{ST}=\frac{5mg}{S}.$$

4. Если коэффициент трения таков, что тело покоится на наклонной грани клина ($k>\operatorname{tg}\alpha$), то клин не может опрокинуться. Действительно, в этом случае сила, действующая на тело со стороны клина, направлена вертикально вверх и равна по величине силе тяжести тела (тело покоится!). Поэтому сила, действующая на клин со стороны тела, направлена вертикально вниз и не может опрокинуть прямоугольный клин. Если же тело движется с ускорением, направленным вниз вдоль плоскости, то ситуация другая.



В этом случае нормальная компонента силы реакции плоскости равна $mg\cos\alpha$ (m – масса тела), а компонента силы реакции, направленная вдоль плоскости (сила трения), меньше, чем $mg\sin\alpha$. А это значит, что суммарная сила, действующая на тело со стороны клина, направлена левее вертикали (см. рисунок), а на клин со стороны тела (противоположная и равная по величине первой силе) – правее. Следовательно, эта сила может опрокинуть клин.

Найдем «границу» опрокидывания клина через вершину прямого угла. В момент опрокидывания сила реакции будет сосредоточена в вершине, поэтому для опрокидывания клина момент суммарной силы, действующей на клин со стороны тела (сила реакции + трения), должен стать больше момента силы тяжести (относительно вершины прямого угла). Пусть ширина нижней грани клина равна a. Тогда момент силы тяжести относительно вершины прямого угла равен

$$M_{mg} = \frac{1}{3} Mga .$$

Момент суммарной силы, действующей на клин со стороны тела, можно вычислить отдельно для сил реакции и трения, а затем сложить. Имеем

$$M_{\text{тр}} = kmg \cos\alpha \cdot a \sin\alpha ,$$

где $a\sin\alpha$ – плечо силы трения относительно вершины прямого угла. Аналогично для момента силы реакции имеем

$$M_{\text{реак}} = -mg\cos\alpha \cdot a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = -mga\sin^2\alpha ,$$

где $a\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ – плечо силы реакции относительно вершины прямого угла (знак «–» – потому что сила реакции «вращает» клин по часовой стрелке относительно вершины прямого угла). Отсюда заключаем, что клин перевернется, если

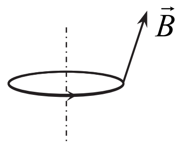
$$mga\sin^2\alpha \ge kmga\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{3}Mga$$

или

$$m \ge \frac{M}{3\sin\alpha\left(\sin\alpha - k\cos\alpha\right)} .$$

5. Найдем индукцию магнитного поля, созданного кольцом радиусом $2R$ в области второго кольца, а затем по закону Ампера найдем силу взаимодействия колец.

Индукция магнитного поля кольца на его оси направлена вдоль оси, а в точках, расположенных на некотором расстоянии от оси (т.е. в области второго кольца), под некоторым углом к оси (см. рисунок). Используя далее закон взаимодействия магнитного поля и тока (закон Ампера), заключаем, что суммарная сила Ампера, действующая на кольцо радиусом R со стороны магнитного поля второго кольца, направлена вдоль оси колец и определяется составляющей вектора $\vec{B}$, направленной перпендикулярно оси



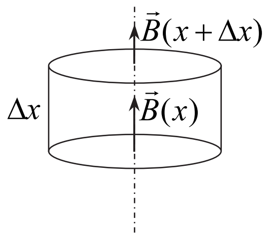
$$F = 2\pi RIB_{\perp}, \quad (1)$$

где $B_{\perp}$ – составляющая вектора индукции, перпендикулярная оси кольца. Найдем $B_{\perp}$.

Используем известное выражение для индукции магнитного поля кольца на его оси на расстоянии x от его плоскости

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I(2R)^2}{((2R)^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

где I – ток в кольце; $2R$ – его радиус. Рассмотрим вспомогательную цилиндрическую поверхность соосную оси кольца, с радиусом, равным радиусу второго кольца R, и малой высотой Δx (см. рисунок). Так как величина индукции на оси кольца уменьшается с ростом расстояния от кольца, то поток вектора магнитной индукции через верхнее основание цилиндрической поверхности меньше потока через нижнее. А поскольку поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю (отсутствуют магнитные заряды), то разница потоков через основания



$$\Delta\Phi = \pi R^2 (B(x) - B(x + \Delta x)) \quad (3)$$

(πR^2 – площадь оснований цилиндра) равна потоку вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра

$$\Delta\Phi = B_{\perp} 2\pi R \Delta x, \tag{4}$$

где $2\pi R \Delta x$ – площадь его боковой поверхности. Из формул (3), (4) находим

$$B_{\perp} = -\frac{R}{2} \frac{(B(x+\Delta x) - B(x))}{\Delta x} \tag{5}$$

Так как Δx мало, то выражение (5) сводится к производной величины индукции на оси кольца (2) по x. Дифференцируя функцию (2), находим по формулам (5), (1) в пределе $x >> R$

$$F = 6\pi\mu_0 \frac{I^2 R^4}{x^4}.$$

Приложение

Материалы образовательной периодики об олимпиаде «Росатом» по физике

Потенциал. Математика. Физика. Информатика № 03 (159) 2018

Олимпиады 63

Муравьёв Сергей Евгеньевич
Доцент, исполняющий обязанности заместителя зав. кафедрой Теоретической физики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, кандидат физико-математических наук.

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» 2017–2018 учебного года. Заключительный тур по физике

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» в течение многих лет организуется Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ». Олимпиада «Росатом» проводится для школьников 7–11 классов по математике и физике во многих городах нашей страны и за рубежом.

В олимпиаде «Росатом» 2017–2018 учебного года приняли участие около 25 тысяч школьников. Несколько тысяч участвовали в заключительном этапе, победителями и призёрами стали около 1000 участников.

Олимпиада «Росатом» по физике 2017–2018 учебного года входит в Перечень олимпиад школьников (первый уровень), потому её победители и призёры могут воспользоваться особыми правами при поступлении в вузы, в которых в качестве вступительного испытания есть физика. В список таких вузов входят, в частности, НИЯУ МИФИ, Физтех, МГУ им. М. В. Ломоносова, МВТУ им. Н. Э. Баумана и многие-многие другие.

Ниже приводится разбор заданий заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике 2017–2018 учебного года.

Формулировки задач

7 класс

1. Вес ведёрка, до краёв заполненного водой, равен $P_1 = 20$ Н. В ведёрко кладут камень, плотность которого втрое больше плотности воды и который полностью погружается в воду. Вес ведёрка становится равным $P_2 = 24$ Н. Каким будет вес ведёрка, если из него аккуратно вытащить первый камень и положить другой, с той же плотностью, но с вдвое меньшим объёмом, чем у первого?

2. Винни Пух пошёл в гости к Пятачку. Перед выходом Винни заметил, что его настенные часы стоят, показывая время 10 часов 10 минут. Поскольку Винни не знал точного времени, он завёл часы, не переводя стрелок. Когда Винни Пух пришёл к Пятачку, он увидел, что часы в доме Пятачка показывали время 14 часов 30 минут. Винни ушёл от Пятачка в 15 часов 10 минут. Когда Винни вернулся домой, его часы показывали 14 часов 20 минут. Увидев это, Винни Пух сразу же выставил на своих часах точное время. Какое время он выставил на своих часах?

3. Кубик составили из двух частей, имеющих разную плотность (см. рис. 1). Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объёма кубика, но четвёртую часть его массы. Найдите плотность второй части кубика.

Рис. 1

4. Нечестный спортсмен при подготовке к Олимпийским играм принимал допинг, который позволял достигать очень высокой скорости, но при медленном разгоне. В результате спортсмен бежал дистанцию $l = 100$ м по следующему графику: в начале каждой следующей секунды он мгновенно увеличивал свою скорость на величину $\Delta v = 1{,}8$ м/с (до начала первой секунды его скорость была нулевой). На какое время обгонит или отстанет этот спортсмен от своих конкурентов, которые бегут с постоянной скоростью $v = 10$ м/с?

5. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены в самом низу тонкой трубкой, перекрытой краном (рис. 2). Вторая узкая трубка соединяет сосуды на высоте h. В сосуды налиты жидкость плотности ρ в одно колено и жидкость плотности 6ρ в другое, причём высота слоя жидкости с плотностью ρ равна h,

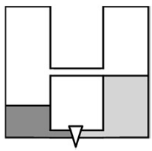


Рис. 2

высота слоя жидкости с плотностью 6ρ равна $h/2$. Кран открывают. Найти высоту столба лёгкой жидкости в том сосуде, где первоначально была только тяжёлая жидкость.

8 класс

1. Тело составлено из трёх частей одинакового объёма, но с разными плотностями, которые относятся друг к другу как $\rho_1:\rho_2:\rho_3=1:2:4$. Удельные теплоёмкости этих частей также различны и относятся друг к другу как $c_1:c_2:c_3=3:2:1$. Найти среднюю удельную теплоёмкость тела, если большая из удельных теплоёмкостей его частей равна c.

2. Задача 3 из задания для 7-го класса.

3. Задача 5 из задания для 7-го класса.

4. Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры – один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рис. 3. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на другом конце коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?

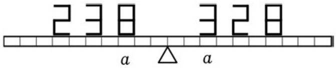


Рис. 3

5. Имеется прямоугольник 1234, изготовленный из металлических стержней одинакового материала и одинакового сечения (рис. 4), причём длины сторон прямоугольника относятся как «1–2»:«1–4»=1:2. Вершины 2 и 4 связаны таким же (но кривым) стержнем с длиной, втрое большей длины стержня 1–2. Температуры вершин 1 и 3 поддерживаются постоянными и равными

$$t_1=100\ ^\circ\text{C},\ t_3=0\ ^\circ\text{C}.$$

Найти температуры вершин 2 и 4.

Считать, что боковые поверхности стержней теплоизолированы.

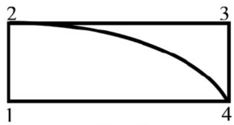


Рис. 4

Указание. Тепловой поток между точками, температуры которых поддерживаются постоянными, пропорционален разности температур точек, обратно пропорционален расстоянию между ними и коэффициенту теплопроводности среды между ними (закон Фурье).

9 класс

1. Задача 3 из задания для 7-го класса.

2. Задача 4 из задания для 8-го класса.

3. В калориметр налита вода комнатной температуры $t_1=20\ ^\circ\text{C}$. Объём воды составляет половину объёма

калориметра. Когда в калориметр доливают столько же воды, имеющей температуру $t_2 = 30\,°\mathrm{C}$, в нём устанавливается температура $t_0 = 24\,°\mathrm{C}$. Другой точно такой же калориметр, находящийся при комнатной температуре, содержит воду, объём которой составляет одну треть объёма калориметра. Какая установится температура в этом калориметре, если его доверху заполнить водой с температурой t_2? Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

4. Минутная стрелка часов в 2 раза длиннее часовой. В некоторый момент времени стрелки совпали. Через какое время после этого конец часовой стрелки будет удаляться от конца минутной с максимальной скоростью?

5. Тело начинает движение из состояния покоя с ускорением a_0 и далее движется прямолинейно. Из-за действия силы сопротивления воздуха ускорение тела уменьшается с увеличением его скорости v по закону $a = a_0 v_0 / (v + v_0)$, где v_0 – известная постоянная. Через какое время скорость тела достигнет значения $2v_0$?

10 класс

1. К батарее с ЭДС ε и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями (рис. 5). Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, а показания вольтметра в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.

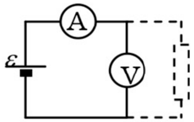


Рис. 5

2. Задача 4 из задания для 8-го класса

3. Задача 5 из задания для 8-го класса.

4. Задача 4 из задания для 9-го класса.

5. Буй составлен из двух одинаковых металлических конусов с высотой $h = 1$ м и углом при вершине $\alpha = 20°$ (см. рис. 6). Буй плавает в воде в вертикальном положении, погрузившись в воду до половины. Через щели внутрь буя просачивается вода, выходит воздух, и буй медленно погружается в воду. Будет ли меняться разность уровней воды внутри и снаружи буя в процессе его погружения в воду? Найти разность уровней воды внутри и снаружи буя в тот момент времени, когда она будет минимальной. Толщиной стенок буя пренебречь.

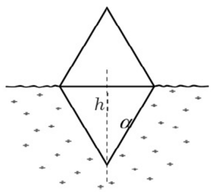


Рис. 6

Указание. Объём прямого кругового конуса определяется соотношением $V = (1/3)\pi R^2 h$, где R – радиус основания конуса, h – его высота.

11 класс

1. Вырезанный из листа фанеры плоский прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся друг другу, как 1:2, подвешен шарнирно за вершину меньшего острого угла к горизонтальному потолку. Треугольник удерживают так, что его длинный катет горизонтален (см. рис. 7). Какую минимальную силу нужно приложить к треугольнику для этого? Масса треугольника m.

Рис. 7

2. Задача 1 из задания для 10-го класса.

3. Задача 5 из задания для 9-го класса.

4. В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью сечения S и длиной h находится очень лёгкий подвижный поршень, к которому с помощью длинного стержня прикреплена лёгкая чашка (рис. 8). В отсеках, на которые поршень делит сосуд, находится по одному молю идеального одноатомного газа под давлением p_0, а поршень в равновесии делит сосуд на равные части. На чашку кладут тело массой m, и поршень после нескольких колебаний приходит в новое положение равновесия. Найти смещение поршня относительно первоначального положения. Сосуд теплоизолирован, поршень хорошо проводит тепло, теплоёмкостью поршня и сосуда пренебречь. Каким будет смещение поршня при $m \to \infty$ и почему?

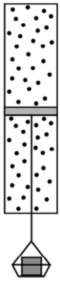


Рис. 8

5. Индуктивность замкнутого квадратного витка, сделанного из тонкой проволоки, равна L (рис. 9 *а*). Если рядом с этим витком перпендикулярно его плоскости и без электрического контакта с ним расположить точно такой же по размеру, но сверхпроводящий виток (так, что они образуют соседние грани куба), то индуктивность первого витка станет равна L_1 (рис. 9 *б*). Какой будет индуктивность витка, если сверхпроводящий виток расположить параллельно его плоскости так, что они образуют с первым противоположные грани куба (см. рис. 9 *в*)?

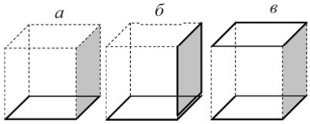


Рис.9

Ответы и решения

7 класс

1. $P_3 = \frac{3P_1 + P_2}{4} = 21$ Н.

2. Пусть время, которое показывают часы Пуха, равно t_1 (10 часов 10 минут), время, которое он увидел, придя к Пятачку, – t_2 (14 часов 30 минут), время, когда он ушёл от Пятачка, – t_3 (15 часов 10 минут), время на часах Пуха, когда он вернулся домой, – t_4 (14 часов 20 минут). Путешествие заняло время $t_4 - t_1$. Из них $t_3 - t_2$ он провёл у Пятачка. Следовательно, на дорогу в каждый конец он затратил

$$\tau = \frac{1}{2}\left(t_4 - t_1 - \left(t_3 - t_2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t_4 - t_1 - t_3 + t_2\right) = 1 \text{ час } 45 \text{ мин.}$$

Поэтому в тот момент, когда часы Пуха показывали $t_1 = 10:10$, точное время составляло $t_2 - \tau = 12:45$.

А значит, часы Пуха нужно перевести на 2 часа 35 минут вперёд. То есть когда часы Пуха показывали 14:20, точное время составляло 16:55.

3. Пусть объём всего кубика V, а плотность его второй части ρ_2. Тогда из условия имеем

$$\rho_1 \frac{V}{3} + \rho_2 \frac{2V}{3} = 4\rho_1 \frac{V}{3}.$$

Решая это уравнение относительно ρ_2, получаем

$$\rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1.$$

4. Нечестный спортсмен отстанет от конкурентов на время $t_1 = 0{,}05$ с.

5. Давление около дна сосуда с тяжёлой жидкостью $(p = 6\rho gh/2 = = 3\rho gh)$ больше давления около дна в сосуде с лёгкой жидкостью ($p_1 = \rho gh$). Поэтому при открывании крана тяжёлая жидкость по нижней трубке будет перетекать в сосуд, в котором первоначально была лёгкая жидкость, которая, в свою очередь, по верхней трубке будет перетекать в сосуд с тяжёлой жидкостью. Процесс перетекания будет происходить до тех пор, пока не выровняются давления около дна в левом и правом сосудах. Пусть к этому моменту в сосуд с лёгкой жидкостью перетечёт столб тяжёлой жидкости высотой x. Тогда точно такой же столб лёгкой жидкости перетечёт по верхней трубке в сосуд с тяжёлой жидкостью, и условие равновесия жидкости в сосуде даёт

$$6\rho g\left(h/2 - x\right) + \rho gx = 6\rho gx + \rho g\left(h - x\right).$$

Отсюда

$$x = \frac{h}{5}.$$

8 класс

1. $c_{\text{ср}} = \frac{c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3} = \frac{11c}{21}.$

2. Задача 3 из задания для 7-го класса.

3. Задача 5 из задания для 7-го класса.

4. Посчитаем моменты сил, действующих на правое и левое плечи коромысла.

1) «Двойка» (слева) и «восьмёрка» (справа). У «восьмёрки» есть два лишних стержня, расположенных на расстояниях $6a$ и $7a$ относительно опоры. Значит, для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{\text{прав}} = 6amg + 7amg = 13amg\,.$$

2) «Тройка» (слева) и «двойка» (справа). У «двойки» есть лишний стержень на расстоянии $5a$ от опоры и не хватает стержня на расстоянии $4a$ от опоры. Следовательно, избыточный момент, действующий на правое плечо коромысла весов, есть

$$\Delta M_{\text{прав}} = 13amg + 5amg - 4amg = 14amg.$$

3) «Восьмёрка» (слева) и «тройка» справа. У восьмёрки есть два лишних стержня на расстоянии $2a$ от опоры. Поэтому для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{\text{прав}} = 14amg - 4amg = 10amg.$$

Следовательно, число 328 справа от опоры перевесит. Поскольку восстанавливающий равновесие весов груз нужно положить на самый конец левого колена коромысла (плечо $10a$), для его массы m_0 имеем

$$10am_0g = 10amg,$$

откуда находим

$$m_0 = m.$$

5. В равновесном состоянии (когда температуры всех точек не меняются) тепловой поток по стержню 1–2 равен сумме тепловых потоков по стержням 2–3 и 2–4. Поэтому из закона Фурье имеем

$$\frac{t_1 - t_2}{l} = \frac{t_2 - t_3}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l},$$

где l – длина стержня 1–2.

Отсюда

$$6t_1 + 3t_3 = 11t_2 - 2t_4. \qquad (1)$$

Тепловой поток по стержню 4–3 равен сумме тепловых потоков по стержням 2–4 и 1–4. Поэтому

$$\frac{t_4 - t_3}{l} = \frac{t_1 - t_4}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l},$$

откуда

$$3t_1 + 6t_3 = -2t_2 + 11t_4. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1)–(2), получим

$$t_2 = \frac{72t_1 + 45t_3}{117} = 61{,}5\ ^\circ\text{C},$$

$$t_4 = \frac{45t_1 + 72t_3}{117} = 38{,}5\ ^\circ\text{C}.$$

9 класс

1. Задача 3 из задания для 7-го класса.

2. Задача 4 из задания для 8-го класса.

3. В калориметре установится температура $t_x = \dfrac{7t_1 + 8t_2}{15} = 25{,}3\ ^\circ\text{C}$.

4. Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вместе с минутной стрелкой. В ней часовая стрелка вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}$, где $\omega_{\text{мин}}$ и $\omega_{\text{час}}$ – угловые скорости минутной и часовой стрелок, и, следовательно, её конец движется с постоянной по величине скоростью. Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной тогда, когда вектор скорости часовой стрелки направлен вдоль прямой, соединяющей концы стрелок (см. рис. 10).

Поэтому в этот момент прямая, проведённая из конца минутной стрелки к концу часовой, является касательной к окружности, по которой движется конец часовой стрелки.

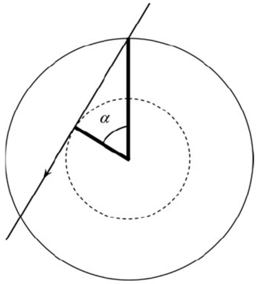


Рис. 10

А поскольку длина часовой стрелки вдвое меньше длины минутной, угол между стрелками составляет $\alpha = 60°$. Поскольку этот угол составляет шестую часть полного угла, стрелка пройдёт его за шестую часть времени, за которое она совершает полный оборот вокруг минутной стрелки, которое, в свою очередь, равно

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}} = \frac{60 \cdot 12}{11} = 65{,}5 \text{ мин.}$$

Здесь учтено, что

$$\omega_{\text{мин}} = 2\pi / 60 \text{ мин}^{-1},$$

$$\omega_{\text{мин}} = 2\pi / (12 \cdot 60) \text{ мин}^{-1}.$$

Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной через 1/6 часть этого времени, т.е. через

$$\Delta t = \frac{2\pi / 6}{\omega_{\text{мин}} - \omega_{\text{час}}} = \frac{60 \cdot 12}{11 \cdot 6} = 10{,}9 \text{ мин.}$$

5. Из определения ускорения следует, что изменение скорости Δv за малый интервал времени и величина этого интервала Δt связаны соотношением

$$\frac{\Delta v}{a} = \Delta t.$$

Разбивая полное время движения на малые интервалы и суммируя их, получим

$$\sum_n \frac{\Delta v_n}{a_n} = \sum_n \Delta t_n,$$

где v_n – значение скорости внутри n–го интервала времени Δt_n, a_n – ускорение тела внутри этого интервала времени. Подставляя в эту формулу зависимость ускорения от скорости, найдём

$$\frac{1}{a_0 v_0} \sum_n \Delta v_n \left(v_n + v_0 \right) = \sum_n \Delta t_n.$$

Сумма в правой части дает значение времени τ в тот момент, когда скорость станет равна $2v_0$. Графический образ суммы в левой части есть площадь под графиком функции $f(v) = v + v_0$ (ср. с вычислением работы переменной силы). Вычисляя эту площадь (см. рис. 11), окончательно получим

$$\tau = \frac{4v_0}{a_0}.$$

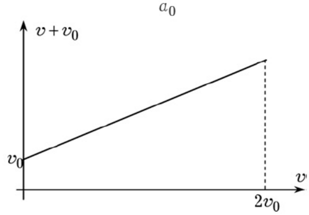


Рис. 11

10 класс

1. По закону Ома для замкнутой цепи имеем в первом случае для тока через амперметр

$$I = \frac{\varepsilon}{r + r_A + r_V},$$

где r – внутреннее сопротивление источника, r_A – сопротивление амперметра, r_V – сопротивление вольтметра. Отсюда находим напряжение на вольтметре

$$U_V = Ir_V = \frac{\varepsilon r_V}{r + r_A + r_V} = \varepsilon - I(r + r_A). \quad (1)$$

Аналогично находим, что когда параллельно вольтметру подключают сопротивление R, напряжение на вольтметре будет равно

$$U'_V = \varepsilon - I'(r + r_A)$$

(I' – ток через амперметр). Поскольку показания амперметра увеличиваются вдвое ($I' = 2I$), а показания вольтметра вдвое уменьшаются ($U'_V = U_V / 2$), имеем

$$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2I(r + r_A). \quad (2)$$

Выражая теперь величину $I(r + r_A)$ из формулы (1) и подставляя её в формулу (2), получим

$$U_V = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

2. Задача 4 из задания для 8-го класса
3. Задача 5 из задания для 8-го класса.
4. Задача 4 из задания для 9-го класса.
5. Пусть в буй просочилась вода, и он погрузился на некоторую глубину (рис. 12). В равновесии сила тяжести равна силе Архимеда. Поэтому

$$(M + m)g = \rho g V_{\text{п.ч.}},$$

где M – масса буя, m – масса воды в буе, ρ – плотность воды, $V_{\text{п.ч.}}$ – объём погружённой в воду части буя. С другой стороны, объём погружённой в воду части буя складывается из объёма $V_{\text{п.ч.с.в.}}$ его погружённой части, заполненной водой, и объёма $V_{\text{п.ч.б.в.}}$ его погружённой части без воды. Поэтому

$$(M + m)g = \rho g\left(V_{\text{п.ч.с.в.}} + V_{\text{п.ч.б.в.}}\right).$$

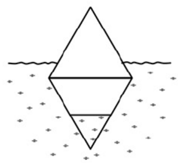


Рис. 12

Но если пренебречь толщиной стенок, то, очевидно, $m = \rho V_{\text{п.ч.с.в.}}$. Поэтому условие равновесия буя даёт

$$M = \rho V_{\text{п.ч.б.в.}}.$$

Из этой формулы следует, что объём его подводной части, не заполненной водой, определяется только массой самого буя, т.е. не меняется в процессе его погружения в воду из-за наполнения водой. А поскольку ширина центральной части буя больше ширины его концов, расстояние между уровнем воды внутри буя и уровнем воды в водоёме будет максимальным, когда максимальна ширина части буя, расположенной между этими уровнями. То есть это расстояние будет минимально, если расстояния от середины буя до уровня воды внутри буя и уровня воды в водоёме будут одинаковы (на рис. 13 эти расстояния обозначены буквой x). Найдём эти расстояния.

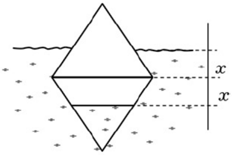


Рис. 13

Из условия равновесия буя без воды (учитывая, что он погружается в воду ровно наполовину) имеем

$$M = \rho V_{\text{п.ч.б.в.}} = \rho \frac{1}{3}\pi R^2 h = \rho \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha,$$

где R – радиус самой широкой части буя. Если буй заполнен водой слоем высотой h_1, то объём незаполненной водой части буя от его средней части до уровня воды внутри буя будет равен

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(h^3 - h_1^3\right)\operatorname{tg}^2\alpha. \qquad (1)$$

Поскольку в случае минимального расстояния между уровнями воды внутри буя и в водоёме расстояния от средней части буя до уровней воды внутри буя и в водоёме одинаковы, объём незаполненной водой подводной части буя равен удвоенному объёму (1) и равен объёму половины буя. Поэтому

$$\frac{2}{3}\pi\left(h^3 - h_1^3\right)\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Отсюда находим

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = h - h_1 = \frac{h\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)}{\sqrt[3]{2}}.$$

А минимальное расстояние между уровнями воды внутри буя и в водоёме равно

$$\Delta h_{\min} = 2\left(h - h_1\right) = \frac{2h\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)}{\sqrt[3]{2}} = 0{,}41h = 0{,}41\text{м}.$$

От угла при вершине буя ответ не зависит.

11 класс

1. В равновесии момент искомой силы $\vec{F}$ относительно шарнира равен моменту силы тяжести. Поэтому сила F будет минимальна, если будет максимальным её плечо относительно шарнира. Следовательно, внешнюю силу нужно приложить к точке, максимально удалённой от шарнира, и направить перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с шарниром. То есть внешняя сила $\vec{F}$ должна быть приложена к вершине того угла треугольника, который равен $\pi/2 - \alpha$, и направлена перпендикулярно гипотенузе треугольника (см. рис. 14).

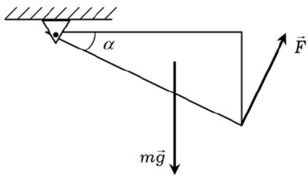


Рис. 14

Найдём моменты всех сил. Пусть длина меньшего катета треугольника равна a. Тогда длина большего катета $2a$, а длина гипотенузы $\sqrt{5}a$. Поэтому момент силы $\vec{F}$ относительно шарнира равен $M_F = \sqrt{5}Fa$. Найдём момент силы тяжести. Центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан. А поскольку точка пересечения медиан делит каждую медиану на части, относящиеся друг к другу, как 2:1, плечо силы тяжести относительно шарнира равно двум третьим частям его горизонтального катета. Поэтому

$$M_{mg} = (2/3)mg2a = (4/3)mga.$$

Следовательно, условие равенства моментов силы тяжести и силы $\vec{F}$ даёт

$$\sqrt{5}Fa = \frac{4}{3}mga.$$

Отсюда находим

$$F = \frac{4}{3\sqrt{5}}mg.$$

2. Задача 1 из задания для 10-го класса.

3. Задача 5 из задания для 9-го класса.

4. Поскольку поршень хорошо проводит тепло, можно считать, что температура газа в отсеках одинакова. После того, как на чашку положили тело и тело вместе с поршнем опустилось вниз, потенциальная энергия тела перешла во внутреннюю энергию газа. Поэтому если поршень опустился на величину Δx вниз, закон сохранения энергии дает

$$mg\Delta x = \frac{3}{2}p_{\text{в}}S(l+\Delta x) + \frac{3}{2}p_{\text{н}}S(l-\Delta x) - \frac{3}{2}2p_0Sl, \qquad (1)$$

где $2l$ – длина сосуда, $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{в}}$ – давления газа в нижней и верхней частях сосуда соответственно. С другой стороны, из условия равновесия поршня имеем

$$mg = (p_{\text{н}} - p_{\text{в}})S. \qquad (2)$$

Кроме того, внутренние энергии газа над и под поршнем равны. Поэтому

$$p_{\text{в}}(l+\Delta x) = p_{\text{н}}(l-\Delta x). \qquad (3)$$

Исключая из системы уравнений (1)–(3) давления газа, получим уравнение относительно Δx:

$$5mg\Delta x^2 + 6p_0Sl\Delta x - 3mgl^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \left(\frac{\sqrt{9p_0^2S^2 + 15m^2g^2} - 3p_0S}{5mg}\right)l.$$

При $m \to \infty$ поршень не ляжет на дно сосуда, даже несмотря на бесконечную силу тяжести. Это связано с тем, что при большой массе груза даже небольшое его смещение приводит к высвобождению большой потенциальной энергии и, соответственно, сильному нагреванию газа в сосуде, возрастанию его давления и увеличению разности давлений между нижним и верхним газами. Пренебрегая в случае большой массы величиной p_0S по сравнению с mg, получим $\Delta x = \sqrt{\frac{3}{5}}l.$

5. Пропустим через первый виток ток I. Тогда поток магнитного поля через него будет равен

$$\Phi = LI, \qquad (1)$$

где L – его индуктивность. Поскольку магнитных зарядов не существует, суммарный поток через любую замкнутую поверхность (и, в частности, через куб, для которого рассматриваемый виток является одной гранью) будет равен нулю. Поэтому

$$\Phi = 4\Phi_{12} + \Phi_{16}, \qquad (2)$$

где Φ_{12} – поток магнитного поля через соседнюю грань куба, Φ_{16} – поток магнитного поля через противоположную грань. Магнитный поток через сверхпроводящий виток должен быть равен нулю, поэтому при внесении его в магнитное поле в нём индуцируется такой ток I_1, который создаёт точно такой же (но противоположный) поток через самого себя. Очевидно, ток I_1 создаёт магнитный поток через соседний виток, который во столько же раз меньше потока Φ, во сколько раз ток I_1 меньше тока I. Поэтому поток магнитного поля через основной виток при поднесении к нему сверхпроводящего витка будет равен

$$\Phi - \frac{I_1}{I}\Phi_{12} = \Phi - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi^2}\right). \qquad (3)$$

С другой стороны, этот поток по определению равен $L_1 I$. Отсюда получаем

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi} = \sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}. \qquad (4)$$

В результате из формулы (2) находим

$$\Phi_{16} = \Phi\left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right). \qquad (5)$$

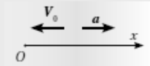
Если теперь мы уберём боковой виток и разместим сверхпроводящий виток на противоположной грани куба, то в нём возникнет такой ток I_2, который, с одной стороны, будет компенсировать магнитный поток Φ_{16} основного тока через самого себя, а, с другой стороны, создаст поток через основной виток, во столько же раз меньший потока Φ_{16}, во сколько ток I_2 меньше тока I. Поэтому поток магнитного поля через основной виток в этом случае равен

$$\Phi_2 = \Phi - \frac{I_2}{I}\Phi_{16} = \Phi - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi^2}\right).$$

Но этот поток по определению равен $L_2 I$, где L_2 – индуктивность основного витка в присутствии сверхпроводящего витка на противоположной грани. Поэтому из предыдущей формулы получаем

$$L_2 = L\left(1 - \left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right)^2\right).$$

А	Б



B4. Тело равноускоренно движется вдоль оси *X*. Ускорение тела $\boldsymbol{a}$, начальная скорость тела $\boldsymbol{v}_0$, время движения *t*. Направления начальной скорости и ускорения тела указаны на рисунке.

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать. К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) Проекция перемещения тела на ось *X* за время *t*. Б) Проекция скорости тела на ось *X* в некоторый момент времени *t*.	1) $v_{0x}t - a_xt^2/2$; 2) $v_{0x}t + a_xt^2/2$; 3) $-v_{0x} + a_xt$; 4) $v_{0x} + a_xt$.

А	Б

Критерии оценивания и ответы

ЧАСТЬ 1

За правильный ответ на каждое задание части 1 ставится 1 балл. Если указаны два и более ответов (в том числе правильный), неверный ответ или ответ отсутствует – 0 баллов.

Коды ответов

A1	2	***A9***	2	***A17***	1
A2	3	***A10***	3	***A18***	1
A3	4	***A11***	3	***A19***	1
A4	1	***A12***	2	***A20***	3
A5	2	***A13***	4	***A21***	1
A6	4	***A14***	1	***A22***	2
A7	1	***A15***	3	***A23***	3
A8	4	***A16***	4	***A24***	4
				A25	2

ЧАСТЬ 2

Задание с кратким ответом считается выполненным верно, если в заданиях ***B1–B4*** правильно указана последовательность цифр. За полный правильный ответ ставится 2 балла, 1 балл – допущена одна ошибка; за неверный ответ (более одной ошибки) или его отсутствие – 0 баллов.

Коды ответов: ***B1*** (121); ***B2*** (212); ***B3*** (31); ***B4*** (24).

Продолжение следует

Физико-математическая олимпиада памяти профессора И.В. Савельева

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: решение задач, олимпиада, МИФИ

С.А. ГРИШИН,
С.Е. МУРАВЬЁВ
mura@theor.mephi.ru,
НИЯУ МИФИ, г. Москва

В начале декабря 2010 г. в Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» (в Москве, Обнинске, Северске, Новоуральске, Ангарске, Димитровграде) проходила традиционная физико-математическая олимпиада памяти профессора И.В. Савельева для школьников 7–11 классов. Эта олимпиада является одним из туров традиционной физико-математической олимпиады школьников «Росатом». Подробнее об этой олимпиаде можно узнать в приёмной комиссии НИЯУ МИФИ по телефону 8-(495)-324-8417 и на сайте института www.mephi.ru.

Первый тур олимпиады «Росатом» посвящался памяти профессора Игоря Владимировича Савельева, который в течение многих лет был заведующим кафедрой общей физики МИФИ. Будучи крупным учёным и педагогом, И.В. Савельев разработал концепцию преподавания физики в технических вузах. Он является автором ряда классических учебников и задачников по физике, которые используются в качестве основного учебника в целом ряде российских технических университетов, переведены на многие иностранные языки, являются настольными книгами молодых инженеров и физиков во всём мире.

В 2010/2011 уч. г. более 4500 школьников приняли участие в олимпиаде по математике и более 3500 – в олимпиаде по физике, что значительно больше, чем в прошлом году. Нам кажется, что существенный рост числа участников (особенно в олимпиаде по математике в Москве), есть хороший знак изменения отношения общества к точным и естественным наукам, без которого невозможно развитие образования, науки, да и всей жизни страны.

Поскольку и математический, и физический туры олимпиады представляют собой единое целое, мы привели варианты задания олимпиады памяти И.В. Савельева 2010 г. и по математике, и по физике для учащихся 11-х классов*.

Вариант задания олимпиады по физике

1. Стержень массой $m = 1$ кг лежит на столе, выступая за его край на 1/3 своей длины (*см. рисунок*). Какую минимальную силу нужно приложить к выступающему концу, чтобы опрокинуть стержень? Считать $g = 10$ м/с².

Решение. Очевидно, в момент опрокидывания стержня сила реакции опоры сосредоточена вблизи края стола. Поэтому из условия равенства нулю суммы моментов внешней силы $\boldsymbol{F}$ и силы тяжести $\boldsymbol{mg}$ относительно края стола имеем $\frac{1}{3}Fl = \frac{1}{6}mgl$

(здесь учтено, что точкой приложения силы тяжести является центр стержня, поэтому плечо силы тяжести относительно края стола равно $l/6$).

Отсюда находим $F = \frac{mg}{2} = 5$Н.

2. В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем находится одноатомный идеальный газ при температуре T. Массу поршня уменьшают в два раза, одновременно увеличивая температуру газа на величину ΔT. Во сколько раз увеличится объём газа? Атмосферным давлением пренебречь.

Решение. Из условия равновесия поршня заключаем, что давление газа в начальном состоянии вдвое больше давления газа в конечном. Поэтому из закона Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний газа имеем:

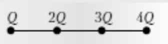
$$\begin{cases} 2pV_1 = \nu RT, \\ pV_2 = \nu R(T + \Delta T), \end{cases}$$

где V_1 и V_2 – объём газа в начальном и конечном состояниях. Деля уравнения друг на друга, находим

$$\frac{V_2}{V_1} = 2\frac{T + \Delta T}{T}.$$

3. Четыре точечных заряда Q, $2Q$, $3Q$ и $4Q$ связаны тремя нитями длиной l так, как показано на рисунке. Найдите модуль силы натяжения средней нити.

*Решение**. Сила натяжения средней нити T компенсирует суммарную кулоновскую силу отталкивания, действующую на два правых (или два левых) заряда со стороны двух левых (или правых) зарядов. Используя принцип суперпозиции и закон Кулона, получим

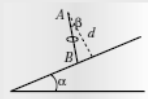


$$T = F_{Q,3Q} + F_{Q,4Q} + F_{2Q,3Q} + F_{2Q,4Q} =$$

$$= \frac{3kQ^2}{4l^2} + \frac{4kQ^2}{9l^2} + \frac{6kQ^2}{l^2} + \frac{8kQ^2}{4l^2},$$

где $k = 4(\pi\varepsilon_0)^{-1}$ – постоянная в законе Кулона (остальные обозначения очевидны). Приводя подобные члены, находим $T = \frac{331}{36}\cdot\frac{kQ^2}{l^2}$.

4. Точка A, расположенная над наклонной плоскостью на расстоянии d от неё, соединена тонкой спицей с точкой B на плоскости. По спице без трения соскальзывает маленькое колечко. При какой длине спицы время движения колечка от точки A до плоскости будет минимально? Известно, что угол наклона плоскости к горизонту равен $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$.



Решение. Если бы спица была расположена вертикально, колечко имело бы максимальное ускорение $a = g$, однако путь, пройденный колечком до плоскости, был бы больше, чем путь, пройденный колечком по спице, наклонённой вправо. Поэтому при каком-то расположении спицы (*см. рисунок*) время движения колечка до плоскости будет минимально. Найдём это положение.

Пусть угол наклона спицы к перпендикуляру, опущенному на плоскость равен β (*см. рисунок*). Тогда, очевидно, угол наклона спицы к горизонту равен $90° - (\alpha - \beta)$. Следовательно, ускорение колечка $a = g\sin(90° - (\alpha - \beta)) = g\cos(\alpha - \beta)$, а пройденный им путь (который равен длине спицы) $l = \frac{d}{\cos\beta}$.

Из закона равноускоренного движения находим время движения колечка до плоскости:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{g\cos\beta\cos(\alpha-\beta)}} = \sqrt{\frac{4d}{g[\cos\alpha + \cos(\alpha - 2\beta)]}}.$$

Из последней формулы заключаем, что время движения как функция угла β минимально, если

* Подробные решения задач по математике приведены на диске к № 8/2011, а более полный комплект математических задач с решениями появится в газете «Математика» в 2011 г. – *Ред.*

*Достаточно рассмотреть условие равновесия двух зарядов Q и $2Q$ (или $3Q$ и $4Q$), то есть применить к каждому из зарядов второй закон Ньютона. – *Ред.*

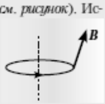
максимален $\cos(\alpha - 2\beta)$, то есть при $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$.

Отсюда получаем длину спицы: $l = \dfrac{d}{\cos(\alpha/2)}$.

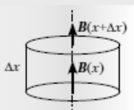
Используя далее известную тригонометрическую формулу $\cos(\alpha/2) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$, находим $l = \sqrt{\dfrac{6}{5}}d$.

5. Имеются два кольца радиусами $2R$ и R, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии x друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найдите модуль силы взаимодействия колец.

Решение. Найдём индукцию магнитного поля, созданного кольцом радиусом $2R$ в области второго кольца, а затем, по закону Ампера, найдём силу взаимодействия колец. Индукция магнитного поля кольца на его оси направлена вдоль оси, а в точках, расположенных на некотором расстоянии от оси (то есть в области второго кольца) под некоторым углом к оси (*см. рисунок*). Используя далее закон взаимодействия магнитного поля и тока (закон Ампера), заключаем, что суммарная сила Ампера, действующая на кольцо радиуса R со стороны магнитного поля второго кольца, направлена вдоль оси колец и определяется составляющей вектора $\boldsymbol{B}$, направленной перпендикулярно оси, $F = 2\pi RIB_\perp$, где $B_\perp$ – составляющая вектора магнитной индукции, перпендикулярная оси кольца.



Найдём $B_\perp$. Используем выражение* для индукции магнитного поля кольца на его оси на расстоянии x от его плоскости $B = \dfrac{\mu_0}{2}\cdot\dfrac{I(2R)^2}{((2R)^2 + x^2)^{3/2}}$, где I – ток в кольце, $2R$ – его радиус. Рассмотрим вспомогательную цилиндрическую поверхность, соосную оси кольца, с радиусом, равным радиусу второго кольца R, и малой высотой Δx (*см. рисунок*). Так как величина индукции на оси кольца уменьшается с ростом расстояния от кольца, то поток вектора магнитной индукции через верхнее основание цилиндрической поверхности меньше потока чем через нижнее. А поскольку поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю (отсутствуют магнитные заряды), то разница потоков $\Delta\Phi = \pi R^2\left(B(x) - B(x+\Delta x)\right)$ через основания цилиндра площадью πR^2 каждое равна потоку вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра $\Delta\Phi = B_\perp 2\pi R\Delta x$, где $2\pi R\Delta x$ – площадь его боковой поверхности.



Объединяем формулы: $B_\perp = -\dfrac{R}{2}\dfrac{\left(B(x+\Delta x) - B(x)\right)}{\Delta x}$.

Так как Δx мало, то последнее выражение сводится к производной величины индукции на оси кольца по x: Дифференцируя функцию $B = \dfrac{\mu_0}{2}\cdot\dfrac{I(2R)^2}{((2R)^2 + x^2)^{3/2}}$, находим в пределе $x \gg R$:

$$F = 6\pi\mu_0\frac{I^2R^4}{x^4}.$$

Примеры задач по математике

1. Решите уравнение $\sin(1005\pi x) = \cos(2010\,\pi x)$. Сколько решений принадлежит отрезку [0,2]?

Ответ. *а)* $x_1 = \dfrac{4k+1}{6030}$, $k \in Z$, $x_2 = \dfrac{4m-1}{2010}$, $m \in Z$;

б) 3015 решений.

2. Для любого целого n решите уравнение: $|2x + n| + (-1)^n|3x + 11 - 4n| = 0$. При каких уравнение имеет два целых решения?

а) $n = 2m, m \in Z, m \neq 1, x \in \varnothing$; $n = 2, x = -1$;

$n = 2m + 1, m \in Z, x_1 = 10m - 6, x_2 = \dfrac{6m-8}{5}$.

б) $n = 10t + 7, t \in Z, x_1 = 6t + 2, x_2 = 50t + 24$.

3. Представьте, что вы находитесь на скачках кузнечиков, проводимых по следующим правилам: два кузнечика начинают прыгать по прямой из точки A в точку B и обратно. Вернувшись в A, они повторяют маршрут и так далее. Скорость первого кузнечика 12 с$^{-1}$, второго 5 с$^{-1}$, расстояние между A и B равно 60 единиц. Бега продолжаются 60 с. Какое время кузнечики могут видеть друг друга? Считать, что кузнечик прыгает головой вперёд и видит то, что находится перед ним.

Ответ. $T = \dfrac{240}{17}$ с.

4. При каких значениях параметра b прямая с уравнением $y = (b^2 + 2b - 2)x + bd$ пересекает прямоугольник: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$ на плоскости? Найти длину отрезка прямой, лежащего внутри прямоугольника при $b = 1$.

Ответ. *а)* $b \in (-\infty; -3] \cup [0; 2]$; *б)* $l = \sqrt{2}$.

---

* Материал существенно выходит за рамки общеобразовательной, и даже 5-часовой программы по физике. Законы Био–Савара–Лапласа и Ампера и их применение к решению задач (в частности указанную ниже формулу) можно найти в учебнике Г.Я. Мякишева «Электродинамика. 10–11 классы» (§ 4.6, 4.11). – *Ред.*

Олимпиада «Росатом» 2014 – 2015 учебного года

В течение 2014 – 2015 учебного года Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» проводил традиционную физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада проводилась в несколько туров в Москве и на 33 выездных площадках (во многих из них расположены научные и промышленные предприятия атомной отрасли) для школьников 7 – 11 классов. В олимпиаде принимали участие более 15 тысяч участников. Ниже приведены задания заключительного тура олимпиады «Росатом» по математике и физике для школьников 11 класса. Задания олимпиады «Росатом» для школьников 7 – 10 классов можно найти на сайте олимпиады[1].

Задание заключительного тура

Физика

1. В двух полупространствах созданы однородные магнитные поля с индукциями $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ $(B_2 = 2B_1)$, векторы которых параллельны. Частица с зарядом q и массой m находится на границе раздела полей и имеет скорость $\vec{v}_0$, направленную перпендикулярно границе раздела (рис. 1). Найти среднюю скорость смещения частицы вдоль границы раздела полей за большое время.

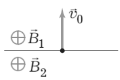


Рис. 1

2. Цилиндр объёмом V разделён тремя подвижными поршнями на четыре отсека, объёмы которых относятся как 1:1:1:2 (начиная с левого) (рис. 2).

He	Ne	Kr	Ar

Рис. 2

В отсеках содержатся гелий He, неон Ne, криптон Kr и аргон Ar. Давление в сосуде p. В некоторый момент поршни становятся полупроницаемыми и начинают пропускать молекулы газов, которые были слева от каждого поршня (левый поршень пропускает гелий, но не пропускает остальные газы, средний пропускает гелий и неон, но не пропускает криптон и аргон, правый поршень пропускает все газы, кроме аргона). Найти давление в правом отсеке и его объём после установления равновесия.

3. Цилиндр из сухого льда (твёрдой углекислоты) радиусом R и высотой $h = R/2$ стоит на своём основании на плоской поверхности. Лёд испаряется так, что с единицы площади в единицу времени с открытой поверхности льда испаряется масса σ. За какое время весь лёд испарится? Плотность льда ρ.

4. Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник массой m и поставили его в угол между тремя взаимно перпендикулярными поверхностями так, что треугольник касается своими сторонами всех трёх граней угла между поверхностями (см. рис. 3). Какой минимальной горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней стороны треугольника, чтобы он покоился?

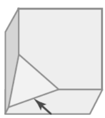


Рис. 3

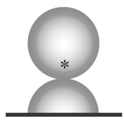


Рис. 4

5. На вершину закреплённой полусферы радиуса R ставят шар того же радиуса со смещённым центром тяжести («ванька-встанька»). При каком положении центра тяжести (см. рис. 4; центр тяжести шара показан звёздочкой) положение шара будет устойчивым? Проскальзывания нет. Ответ обосновать.

конце отрезка в точке $x=1$ и равен $f_3(1)=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Таким образом, условием спасения волка в случае 3 является выполнение неравенства $\frac{v_с}{v_в}<\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Объединяя все три случая, приходим к выводу, что наилучшей стратегией для волка является бежать на одну из собак, и у него есть шанс спастись, если $\frac{v_с}{v_в}<\frac{4}{\sqrt{5}}\approx 1{,}79$.

Физика

1. В верхнем и нижнем полупространствах частица будет двигаться по полуокружности с постоянной скоростью. Однако из-за неодинаковости индукций магнитного поля радиусы этих окружностей

$$R=\frac{mv_0}{qB}$$

будут различными, причём радиус окружности в верхнем полупространстве R_1 будет вдвое больше радиуса окружности в нижнем R_2 (см. рис. 8).

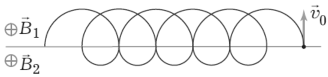


Рис. 8

Поэтому за период частица сдвинется вдоль границы раздела полупространств на расстояние, равное разности диаметров полуокружностей

$$\Delta x=2(R_1-R_2)=\frac{2mv_0(B_2-B_1)}{qB_1B_2}.$$

Время полного оборота легко найти, учитывая то обстоятельство, что величина скорости частицы не меняется (магнитное поле не совершает работы)

$$t=\frac{\pi R_1}{v_0}+\frac{\pi R_2}{v_0}=\frac{\pi(R_1+R_2)}{v_0}=$$
$$=\frac{\pi m(B_2+B_1)}{qB_1B_2}.$$

Поэтому средняя скорость частицы за время одного прохождения по двум полупространствам (или за большое время, включающее в себя много таких прохождений) будет равна

$$v_{ср}=\frac{\Delta x}{t}=\frac{2v_0(B_2-B_1)}{\pi(B_2+B_1)}=\frac{2v_0}{3\pi}.$$

2. Гелий будет распределён по сосуду с одинаковой концентрацией независимо от положения всех поршней. Поэтому парциальное давление гелия на все поршни (и справа, и слева) будет одинаковым. Поэтому при исследовании положений поршней гелий можно не учитывать. А поскольку в самом левом отсеке других газов нет, левый поршень прижмётся к левой стенке сосуда.

По аналогичным причинам при исследовании положения среднего и правого поршней можно не учитывать неон. А поскольку во втором слева отсеке нет других газов, кроме гелия и неона (которые никак не повлияют на положение среднего поршня), а справа от него есть криптон, второй поршень также окажется около левой стенки сосуда.

Точно так же около левой стенки сосуда находится и третий поршень. Поэтому объём самой правой части сосуда будет равен объёму всего сосуда V. Найдём давление газов.

Пусть количество вещества гелия в сосуде равно ν. Тогда очевидно, что количество вещества неона и криптона также равно ν, аргона – 2ν (так как в начальном положении давление всех газов одинаково). Тогда давление газа в сосуде до прохождения газов через поршни можно найти по закону Клапейрона – Менделеева для газа в любом отсеке:

$$p = \frac{\nu RT}{(V/5)} = \frac{5\nu RT}{V}.$$

С другой стороны, после установления равновесия все четыре газа будут заполнять весь объём сосуда, поэтому по закону Дальтона имеем для конечного давления газа в сосуде $p_к$:

$$p_к = \frac{(\nu + \nu + \nu + 2\nu)RT}{V} = \frac{5\nu RT}{V}.$$

Отсюда заключаем, что конечное давление равно начальному.

А.П. Дегтярева

3. Испарение цилиндра происходит с верхнего основания и с боковой поверхности. Поэтому с течением времени меняется и площадь основания (из-за бокового испарения), и площадь боковой поверхности (за счет уменьшения радиуса и высоты) (рис. 9). Найдём скорость уменьшения размеров цилиндра.

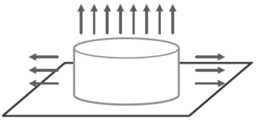


Рис. 9

Пусть открытая поверхность углекислоты (с которой и происходит испарение) равна S. Тогда за малое время Δt испарится тонкий слой, толщиной Δh, которую можно найти из очевидного соотношения:

$$\sigma S \Delta t = \rho \Delta h S.$$

Отсюда находим скорость уменьшения размеров углекислоты:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = v = \frac{\sigma}{\rho}.$$

Из этой формулы следует, что скорость уменьшения размеров не зависит от площади поверхности, с которой происходит испарение. Это значит, что испарение с боковой поверхности не изменяет скорость уменьшения высоты цилиндра, а испарение с основания – скорость уменьшения радиуса. Поэтому с боковой поверхности и с основания углекислота испарится за время

$$t_{бок} = \frac{R}{v} = \frac{R\rho}{\sigma}, \quad t_{осн} = \frac{h}{v} = \frac{R\rho}{2\sigma}.$$

Поскольку время испарения с основания меньше, цилиндр испарится с верхнего основания (становясь в процессе испарения всё более и более «блинообразным») за время

$$t = \frac{R\rho}{2\sigma}.$$

4. Очевидно, что в данном положении пластинка взаимодействует с вертикальными стенками угла только в одной точке. Действительно, треугольник может касаться своими сторонами граней угла только в единственном положении; если сдвинуть треугольник вниз на бесконечно малую величину, контакт между стенками и сторонами треугольника пропадёт, и он будет опираться на ребро угла только своей вершиной. Следовательно, на треугольник действуют: две силы реакции (со стороны вертикального ребра и нижней грани угла), сила тяжести, приложенная к центру тяжести – точке пересечения медиан, искомая сила $\vec{F}$.

Геометрически очевидно, что (см. рис. 10)

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{a}{2}.$$

Поэтому условие моментов относительно середины нижней стороны треугольника (с учётом того, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в соотношении 2:1) даёт:

$$Nx = mg\frac{1}{3}y \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{3\sqrt{2}}.$$

А поскольку $F = N$ (это следует из проекции уравнения сил на горизонтальную ось), то

$$F = \frac{mg}{3\sqrt{2}}.$$

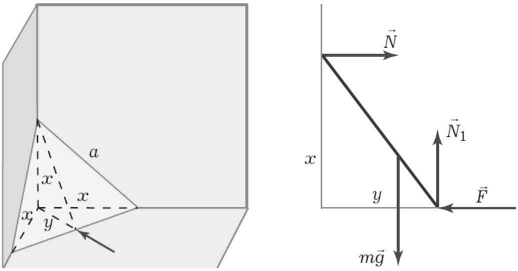


Рис. 10

5. Отклоним верхний шар от положения равновесия и исследуем вопрос о смещении центра тяжести. Если он поднимется, положение равновесия шара будет устойчивым. В начальном состоянии центр тяжести верхнего шара находился на высоте

$$h_0 = 2R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R.$$

Пусть верхний шар отклонился так, что направление на точку касания шаров составляет малый угол α с вертикалью (см. рис. 11). Тогда (поскольку проскальзывания шаров нет) направление на центр тяжести верхнего шара из его центра будет составлять такой же угол α с направлением на новую точку касания. Поэтому высоту нового положения центра тяжести по отношению к основанию нижнего полушара можно найти как

$$h_1 = 2R\cos\alpha - \frac{2}{3}R\cos 2\alpha.$$

Используя далее известную тригонометрическую формулу

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha / 2)$$

и учитывая, что для малого угла $\sin\alpha \approx \alpha$, получим:

$$h_1 = \frac{4}{3}R - R\alpha^2 + \frac{4}{3}R\alpha^2 =$$

$$= \frac{4}{3}R + \frac{1}{3}R\alpha^2 > h.$$

Таким образом, центр верхнего шара при отклонении поднимается, и, следовательно, его положение на «вершине» полушара – устойчивое.

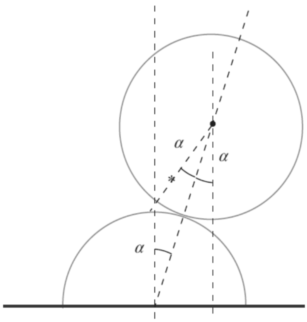


Рис. 11

С.А. Гришин, С.Е. Муравьев *НИЯУ МИФИ.*

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Природа – бесконечная сфера, центр которой везде, а окружность нигде.

Б. Паскаль

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» 2015 – 2016 учебного года (отборочный тур)

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) более 20 лет с целью выявления одарённых школьников, ориентированных на инженерно-технические специальности, способных к техническому творчеству и инновационному мышлению и проявляющих интерес к вопросам науки, техники и высоких технологий.

Олимпиада «Росатом» проводится по математике и физике для школьников 7 – 11 классов. Школьники невыпускных классов составляют около половины участников олимпиады. Отборочный этап состоит из нескольких независимых туров и проходит в октябре-январе. Один из отборочных туров проходит дистанционно (с использованием сети Интернет). До заключительного этапа олимпиады допускаются лучшие участники отборочного этапа (до 45%, но обычно около 30%). «Пропуск» на заключительный этап можно получить на любом из отборочных туров, количество участий в которых никак не ограничивается.

Для широкого продвижения олимпиады «Росатом» в регионы РФ и отборочный, и заключительный этапы олимпиады «Росатом» проходят в очной форме во многих регионах РФ с обязательным выездом представителей оргкомитета. В 2015 – 2016 учебном году олимпиада проводилась на следующих региональных площадках: Алматы (Казахстан), Арзамас (Нижегородская обл.), Байконур, Балаково (Саратовская область), Владимир, Волгодонск (Ростовская область), Глазов (Удмуртская республика), Дзержинск (Нижегородская обл.), Димитровград (Ульяновская обл.), Екатеринбург, Железногорск (Красноярский край), Заречный (Пензенская обл.), Зеленогорск (Красноярский край), Калининград, Калуга, Киров, Ковров (Владимирская обл.), Курчатов (Курская обл.), Лесной (Свердловская обл.), Липецк, Нижний Новгород, Нововоронеж (Воронежская обл.), Новоуральск (Свердловская обл.), Обнинск (Калужская обл.), Озерск (Челябинская обл.), Рязань, С.-Петербург, Саров (Нижегородская обл.), Северск (Томская обл.), Сергиев Посад (Московская обл.), Смоленск, Снежинск (Челябинская обл.), Трехгорный (Челябинская обл.), Тамбов, Ярославль. И здесь мы хотим поблагодарить наших друзей и коллег – региональных соорганизаторов олимпиады «Росатом», благодаря которым тысячи лучших школьников страны могут участвовать в олимпиаде.

Каждый год в олимпиаде «Росатом» принимают участие 15 – 17 тысяч школьников из 60 – 65 субъектов Российской Федерации и всех федеральных округов (в сумме по математике и физике и по всем классам). Несколько тысяч участвуют в заключительном этапе, победителями и призёрами становятся около 500 – 600 участников.

Олимпиада «Росатом» много лет входит в Перечень олимпиад школьников (в 2015 – 2016 учебном году математика – 2 уровень, физика – 1 уровень), поэтому её победители и призёры могут получить особые права при зачислении в вузы, в которых в качестве вступительных испытаний есть математика или физика. Ежегодно в НИЯУ МИФИ поступает около 40 – 50% победителей и призёров олимпиады «Росатом», ещё столько же поступает победителей и призёров других олимпиад школьников, обеспечивая около 40% бюджетного набора в университет.

Ниже приведены задания отборочного тура олимпиады «Росатом» 2015 – 2016 учебного года по математике и физике для школьников 11 класса.

Физика

1. Искусственный спутник планеты, ускорение свободного падения на поверхности которой равно g, движется на малой высоте над поверхностью со скоростью, вдвое превышающей первую космическую скорость для данной планеты. Чему равна и как направлена сила, действующая на спутник со стороны его двигателя? Масса спутника m.

2. Точечный заряд, расположенный в точке C, создает в точках A и B электрическое поле с потенциалом φ_A и φ_B (рис. 1; угол ACB – прямой). Найти потенциал поля, создаваемого этим зарядом в точке M, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB.

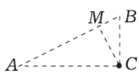


Рис. 1

3. «Круглый» хлеб с изюмом имеет радиус $r = 20$ см. На вертикальном разрезе, проходящем через центр, в среднем оказываются разрезанными $n = 6$ изюмин (рис. 2). Оцените число изюмин в хлебе, если диаметр изюмины $d = 0,5$ см.

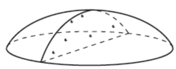


Рис. 2

4. Вертикальный сосуд объёмом V поделён на две части тонкой перегородкой. Объёмы верхнего и нижнего отсеков относятся как 1:2. В перегородке имеется отверстие с клапаном. Клапан открывается, если давление нижнего газа превысит давление

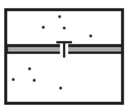


Рис. 3

верхнего на величину Δp. Если нагреть газ в сосуде (и в верхней, и в нижней части) до температуры T_0, клапан откроется. Какое количество вещества газа перейдёт из нижнего отсека в верхний при нагревании его до температуры T_1 ($T_1 > T_0$)?

5. Длинный тонкостенный диэлектрический цилиндр массой m, радиусом R и длиной l расположен горизонтально и может вращаться вокруг своей оси (рис. 4). Цилиндр заряжен зарядом Q. На цилиндр намотана нить, ко второму концу которой привязан груз массой $m/2$. Груз отпускают. С учётом явления самоиндукции найти ускорение груза.

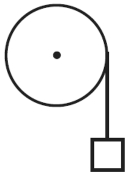


Рис. 4

Решения

1. Очевидно, сила тяги двигателя должна быть направлена к центру планеты, поскольку при скорости спутника, большей первой космической, сила гравитации не сможет удержать спутник на орбите. Поэтому закон вращательного движения даёт

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} + F, \qquad (*)$$

где $v = 2v_0$ – скорость спутника (v_0 – первая космическая скорость), $G\dfrac{mM}{R^2} = mg$ – сила гравитации на поверхности планеты (g – ускорение свободного падения на поверхности), F – искомая сила тяги двигателя. А поскольку

$$\frac{mv_0^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} = mg,$$

из формулы (*) находим

$$F = \left(2^2 - 1\right)mg = 3mg.$$

2. Из определения потенциала имеем

$$\varphi_A = \frac{kQ}{AC}, \ \varphi_B = \frac{kQ}{BC},$$

где k – постоянная закона Кулона, Q – заряд, расположенный в точке C. Далее из подобия треугольников AMC и ABC заключаем, что

$$\frac{MC}{BC} = \frac{AC}{\sqrt{AC^2 + BC^2}}.$$

Отсюда находим

$$\varphi_M = \frac{kQ}{MC} = \frac{kQ\sqrt{AC^2 + BC^2}}{AC \cdot BC} =$$

$$= kQ\sqrt{\frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AC^2}} = \sqrt{\varphi_A^2 + \varphi_B^2}.$$

3. Будем считать для оценки, что хлеб имеет форму диска (цилиндра) с одинаковыми верхним и нижним основаниями. Изюминка будет разрезана, если разрез пройдёт на расстоянии не меньше, чем $d/2$ от её центра. Это значит, что разрезанными будут изюминки, центры которых попадут в «ломоть» хлеба толщиной d, содержащий центр хлеба. Объём этого ломтя $V = 2rhd$ (h – высота хлеба), и по условию в него попадает n изюмин. Поэтому концентрация n_0 изюминок в хлебе равна

$$n_0 = \frac{n}{V} = \frac{n}{2rhd}.$$

Отсюда находим полное число изюминок в хлебе:

$$N = n_0 \pi r^2 h = \frac{\pi n r}{2d} \sim 180 \text{ штук.}$$

Если считать хлеб не диском (с одинаковыми верхним и нижним основаниями), а конусом, оценка числа изюминок отличается на множитель 2/3, т. е. по порядку величины будет такой же:

$$N = \frac{\pi n r}{3d} \sim 120 \text{ штук.}$$

4. Пусть количество вещества газа в верхней части сосуда ν_1, в нижней ν_2. Тогда из условия открывания клапана имеем:

$$pV = \nu_1 R T_0,$$

$$(p + \Delta p) 2V = \nu_2 R T_0,$$

где p и V – давление в верхней части сосуда в момент открытия клапана и её объём. Вычитая эти уравнения, получим:

$$\Delta p V = \left(\frac{\nu_2}{2} - \nu_1\right) R T_0. \qquad (*)$$

При нагревании газа до температуры, большей T_0, перепад давлений будет больше, чем Δp. Клапан откроется и начнёт пропускать газ из нижней части сосуда в верхнюю. Это приведёт к уменьшению давления внизу и увеличению вверху сосуда. Клапан снова закроется, когда перепад снова станет равным Δp. В этот момент для газа в верхней и нижней частях сосуда имеем:

$$p_1 V = (\nu_1 + \Delta\nu) \nu_1 R T_1,$$

$$(p_1 + \Delta p) 2V = (\nu_2 - \Delta\nu) R T_1,$$

где p_1 – давление в верхней части сосуда в момент закрытия клапана, $\Delta\nu$ – количество молей газа, перетекшего из нижней части сосуда в верхнюю. Вычитая, находим

$$\Delta p v = \left(\frac{\nu_2}{2} - \nu_1\right) R T_1 - \frac{3}{2} \Delta\nu R T_1.$$

Отсюда и формулы (*) получаем окончательно

$$\Delta\nu = \frac{2}{9} \frac{\Delta p V (T_1 - T_0)}{R T_1 T_0}.$$

5. Вращение заряженного цилиндра эквивалентно кольцевому току. Силу такого тока найдем как отношение заряда, прошедшего через сечение боковой поверхности цилиндра, к соответствующему интервалу времени. Поскольку за время Δt через сечение пройдёт заряд $\Delta q = \sigma v \Delta t l$, где v – скорость вращения цилиндра в этот момент, то

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \sigma v l.$$

Магнитное поле соленоида, в котором течёт ток I, и на единицу длины приходится число витков n, есть $\mu_0 n I = \mu_0 I_l$, где I_l – ток, текущий через единицу длины соленоида. Поэтому внутри нашего цилиндра возникнет следующее магнитное поле:

$$B = \mu_0 \sigma v.$$

Это поле создает следующий магнитный поток через цилиндр:

$$\Phi = \pi R^2 \mu_0 \sigma v.$$

И, следовательно, при изменении скорости вращения цилиндра (при разгоне груза) возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi R^2 \mu_0 \sigma \frac{\Delta v}{\Delta t} = \pi R^2 \mu_0 \sigma a, \quad (1)$$

которая согласно правилу Ленца будет препятствовать ускорению зарядов цилиндра, а поскольку цилиндр диэлектрический, будет препятствовать его разгону. (В формуле (1) a – ускорение цилиндра). Поскольку ЭДС индукции есть работа вихревого электрического поля над единичным зарядом при его кольцевом перемещении, из (1) можно найти напряжённость вихревого электрического поля E. Используя осевую симметрию задачи, имеем:

$$2\pi RE = \mathscr{E} = \pi R^2 \mu_0 \sigma a \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma R a.$$

Теперь можно записать второй закон Ньютона для тела и цилиндра:

$$(m / 2)a = (m / 2)g - T,$$

$$ma = T - QE,$$

где $Q = 2\pi Rl\sigma$ – заряд цилиндра. Складывая эти уравнения и подставляя напряжённость вихревого поля и заряд цилиндра, получим:

$$3ma / 2 = mg / 2 - \pi\mu_0\sigma^2 R^2 la,$$

откуда найдём

$$a = \frac{mg}{3m + 2\pi\mu_0\sigma^2 R^2 l}.$$

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом»

В течение 20 лет в Московском инженерно-физическом институте (ныне Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ») проводится Всероссийская отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом». Олимпиада проводится в несколько туров – с ноября по март. В 2011 – 2012 учебном году олимпиада «Росатом» входила в перечень олимпиад школьников, утверждённый министром образования РФ, что позволяет победителям и призёрам олимпиады «Росатом» получать значительные льготы при поступлении в вузы.

В олимпиаде «Росатом» 2011 – 2012 года участвовало более 12 тысяч школьников из различных регионов нашей страны. Многие города (а таковых более 20) стали выездными площадками проведения олимпиады. Это Москва, Байконур, Балаково, Волгодонск, Димитровград, Железногорск (Красноярский край), Курск, Курчатов, Липецк, Нижний Новгород, Нововоронеж, Новоуральск, Обнинск, Озерск, Рязань, Санкт-Петербург, Саров, Северск, Сергиев Посад, Смоленск, Снежинск, Тамбов.

Ниже приводятся варианты заданий заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике и математике 2011 – 2012 учебного года для 11 класса.

Задание по физике

1. Сосуд разделён на две части закреплённой перегородкой. В одну часть сосуда помещают ν молей кислорода, в другую – 2ν молей гелия. В некоторый момент времени перегородка становится проницаемой для гелия (но непроницаемой для кислорода). Найти отношение объёмов частей сосуда, если давление газа в той части, где первоначально был кислород, увеличилось в $n = 1{,}5$ раза. Температуры газов одинаковы и не меняются в течение процесса.

2. На часах 16.00. Через какое время после этого часовая и минутная стрелки часов встретятся во второй раз?

3. Тело массой $m = 2$ кг аккуратно положили на горизонтальную поверхность и подействовали на него силой $F = 6\,\text{Н}$, направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис. 1). Коэффициент трения между телом и поверхностью равен $k = 0{,}4$. Найти силу трения, действующую на тело ($g = 10$ м/с^2).

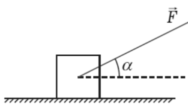


Рис. 1

4. В схеме, изображённой на рисунке 2, проводят следующий процесс: замыкают правый ключ, а после установления равновесия его размыкают и замыкают левый ключ. Найти напряжение на среднем конденсаторе после этого. Чему будет равно напряжение на среднем конденсаторе через очень большое число переключений ключей? Изначально конденсаторы не заряжены. ЭДС источников и ёмкости конденсаторов приведены на рисунке.

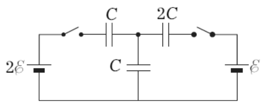


Рис. 2

5. Невесомый недеформируемый стержень длиной l подвешен на трёх одинаковых вертикальных нитях, привязанных к концам и точке, лежащей на расстоянии $l/3$ от его левого конца (см. рисунок 3). На каком максимальном расстоянии справа от точки крепления средней нити можно подвесить массивное тело так, чтобы все нити были натянуты. Считать, что нити упругие, но слабо растяжимые, а стержень жёсткий.

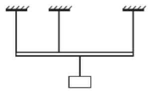


Рис. 3

Задание по математике

1. Найти наибольшее целое число x из области определения функции

$$f(x) = \log_{|x+1|}\frac{(x+3)^2}{(1-x)}.$$

2. Решить неравенство:

$$f(f(x)+1) \le f(x) + \frac{1}{3}, \text{ где } f(x) = \frac{x-2}{x+3}.$$

3. Блоха, находясь в любой точке плоскости, может прыгать в любом направлении, причём длина её прыжка всегда одинаковая и равна $\sqrt{3}$ см. Перед ней стоит задача: из точки A попасть в точку B, удалённую от A на расстояние 187 см. Докажите, что эта задача для неё всегда выполнимая. Какое наименьшее число прыжков она должна совершить?

4. Найти натуральные числа x, для которых

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\text{НОД}(4;x)\right)\cdot\sin\frac{\pi x}{4} = 0.$$

Из них найти наименьшее x, кратное 22.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases}(2x+y-a+3)(2x+y-a-5)=0,\\(x-1)^2+y^2=\dfrac{16}{5}\end{cases}$$

имеет ровно два решения? Найти эти решения.

6. В основании треугольной пирамиды $SABC$ расположен правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{5}$. Ребро SA перпендикулярно основанию и имеет длину $2\sqrt{5}$. Точки M и N расположены на рёбрах AS и BC так, что $AM:MS=1:2$, $BN:NC=1:1$. Найти: 1) расстояние между точками M и N; 2) наименьшую длину ломаной, лежащей на поверхности (полной) пирамиды, соединяющей точки M и N.

Решение задания по физике

1. Первоначальное давление в той части сосуда, где был кислород, определяется законом Клапейрона–Менделеева:

$$p_1V_1 = \nu RT, \qquad (*)$$

где V_1 – объём этой части сосуда, T – абсолютная температура. После того как перегородка становится проницаемой, гелий распределяется по сосуду равномерно, и потому количество вещества гелия в той части сосуда, где был кислород, определяется соотношением

$$\nu_1 = \frac{2\nu V_1}{V_1 + V_2},$$

где V_2 – объём второй части сосуда. Поэтому по закону Дальтона находим новое давление p_1' в этой части сосуда:

$$p_1'V_1 = (\nu + \nu_1)RT = \left(1 + \frac{2V_1}{V_1 + V_2}\right)\nu RT. \, (**)$$

Деля (**) на (*) и учитывая, что давление в этой части сосуда возросло в $n = 1{,}5$ раза, получим:

$$n = 1 + \frac{2V_1}{V_1 + V_2} = 1 + \frac{2}{1 + x},$$

где $x = V_2 / V_1$. Отсюда находим

$$x = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{n - 1} - 1 = 3.$$

2. Найдём угловые скорости минутной и часовой стрелок часов. Используя определение (отношение угла к тому времени, за которое тело на этот угол повернулось), находим

$$\omega_\text{м} = \frac{2\pi}{T_\text{м}} = \frac{2\pi}{60}\left(\text{мин}^{-1}\right),$$

$$\omega_\text{ч} = \frac{2\pi}{T_\text{ч}} = \frac{2\pi}{12 \cdot 60}\left(\text{мин}^{-1}\right),$$

где число 2π в числителе – угол полного оборота стрелки (в радианах), число 60 в первой формуле в знаменателе – время полного оборота минутной стрелки (в минутах), $12 \cdot 60$ в знаменателе второй формулы – время полного оборота часовой стрелки (в минутах). Поэтому углы, на которые повернутся стрелки до второй встречи, можно найти из соотношений

$$\varphi_\text{м} = \omega_\text{м} t = \frac{2\pi t}{60}\ (\text{рад}),$$

$$\varphi_\text{ч} = \omega_\text{ч} t = \frac{2\pi t}{12 \cdot 60}\ (\text{рад}),$$

где t – искомое время. Поскольку начальный угол между стрелками равнялся $2\pi/3$ (начальное время на часах – 16.00), а встреча – вторая, угол поворота минутной стрелки на $2\pi + 2\pi/3 = 8\pi/3$ больше угла поворота часовой:

$$8\pi/3 = \omega_\text{м} t - \omega_\text{ч} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{8\pi}{3(\omega_\text{м} - \omega_\text{ч})} = 87{,}3 \text{ мин.}$$

3. Очевидно, при действии на первоначально покоящееся тело некоторой «сдвигающей» силы возможны как покой, так и движение тела. При этом в случае покоя сила трения (сила трения покоя) будет равна «сдвигающей» силе, в случае движения (сила трения скольжения) будет равна предельному значению силы трения покоя $F_\text{тр}^\text{max} = kN$, где k – коэффициент трения, N – сила реакции опоры.

Для ответа на вопрос о том, будет или не будет двигаться тело, необходимо сравнить «сдвигающую» силу и максимальную силу трения покоя. В данных условиях «сдвигающей» силой является составляющая внешней силы, направленная вдоль поверхности. Для нахождения силы реакции спроецируем второй закон Ньютона для тела

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$$

на ось, перпендикулярную опоре. Получаем:

$$N = mg - F\sin\alpha.$$

Таким образом, тело будет скользить по поверхности при выполнении условия

$$F\cos\alpha > k(mg - F\sin\alpha) \qquad (*)$$

и покоиться в обратном случае. Подставляя в неравенство (*) данные в условии задачи значения, получаем:

$$F\cos\alpha = 5{,}2 \text{ Н},$$

$$k(mg - F\sin\alpha) = 6{,}8 \text{ Н}.$$

Отсюда заключаем, что тело покоится, а сила трения, действующая на него, равна «сдвигающей» силе:

$$F_{тр} = F\cos\alpha = 5{,}2 \text{ Н}.$$

4. После замыкания правого ключа два последовательно соединённых конденсатора C и $2C$ замкнуты на источник ЭДС $\mathscr{E}$. Поэтому заряды этих конденсаторов Q будут равными друг другу и могут быть найдены из соотношения:

$$\frac{Q}{2C} + \frac{Q}{C} = \mathscr{E}.$$

Отсюда находим заряд, а затем и напряжение на среднем конденсаторе:

$$Q = \frac{2\mathscr{E}C}{3},\ U = \frac{2\mathscr{E}}{3}.$$

После размыкания правого и замыкания левого ключа мы имеем два последовательно соединённых конденсатора C, замкнутых на источник $2\mathscr{E}$, причём один из них изначально заряжен зарядом Q. Пусть после замыкания левого ключа верхний левый конденсатор имеет заряд q. Тогда заряд среднего конденсатора будет равен $Q+q$ (см.

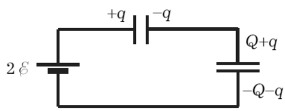


Рис. 4

рис. 4). Поэтому условие равенства суммы напряжений на конденсаторах левой цепи напряжению источника $2\mathscr{E}$ даёт:

$$\frac{q}{C} + \frac{Q+q}{C} = 2\mathscr{E}.$$

Отсюда находим заряд q:

$$q = \frac{2\mathscr{E}C}{3},$$

а затем заряд и напряжение на среднем конденсаторе:

$$q + Q = \frac{4\mathscr{E}C}{3}, \quad U_1 = \frac{4\mathscr{E}}{3}.$$

Напряжение на конденсаторах после большого числа переключений ключей можно найти из следующих соображений. Очевидно, что после большого числа переключений на конденсаторах установятся некоторые напряжения, которые уже не будут меняться при дальнейших переключениях ключей. А это значит, что эти напряжения будут совпадать с напряжениями на конденсаторах при замкнутых ключах. А поскольку результат в этом случае не будет зависеть от того, какой ключ мы замыкаем вначале, замкнём сначала левый ключ (это проще технически). Тогда, поскольку конденсаторы одинаковы, а напряжение левого источника равно $2\mathscr{E}$, и на среднем, и на левом конденсаторе установятся напряжения $\mathscr{E}$. Если теперь замкнуть правый ключ, то благодаря тому, что напряжение правого источника равно $\mathscr{E}$, заряды перемещаться не будут. Следовательно, правый конденсатор вообще не зарядится, а напряжение на среднем конденсаторе останется равным $\mathscr{E}$.

5. Наиболее сложная задача задания, в которой рассматривается так называемая статически неопределённая ситуация. Если бы нити были нерастяжимы, то уравнения статики не позволили бы определить силы натяжения. Действительно, пусть центральная нить на бесконечно малую величину длиннее крайних. В этом случае (при условии нерастяжимости нитей) средняя нить будет ненатянутой и сила её натяжения равна нулю. Если же чуть длиннее будет левая нить, то она останется «провисшей» и сила её натяжения будет равна нулю. Поэтому в условиях нерастяжимости нитей решение задачи зависит от малых разностей длин нитей, а введение в задачу деформаций нитей, превосходящих такие различия в длинах, полностью меняет задачу. Следовательно, в этой задаче необходимо учитывать, что при подвязывании к нитям стержня с грузом они будут деформироваться. Однако по условию деформация нитей мала, поэтому можно считать, что стержень остаётся почти горизонтальным.

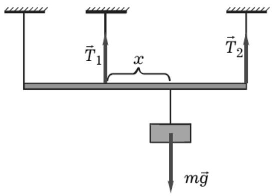


Рис. 5

Далее будем рассуждать так. При отодвигании груза вправо от центральной нити (т. е. при увеличении расстояния x – см. рис. 5) стержень будет немного поворачиваться по часовой стрелке, и будет увеличиваться сила натяжения правой нити и уменьшаться сила натяжения левой. Поэтому при некотором положении груза сила натяжения левой нити может стать равной нулю. Рассмотрим условия равновесия стержня в этот момент. Условия равенства нулю суммы сил и суммы моментов сил (относительно точки прикрепления к стержню нити с грузом) дают:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = mg, \\ T_1 x = T_2\left(\dfrac{2l}{3} - x\right). \end{cases} \qquad (*)$$

Система двух уравнений (*) содержит три неизвестных T_1, T_2 и x и не может быть решена без дополнительных уравнений. Такое уравнение даёт условие упругих деформаций нитей и жёсткости стержня. Очевидно, при нулевой силе натяжения левой нити её удлинение равно нулю. Поэтому удлинения средней и правой нитей относятся друг к другу как 1:3 (см. рис. 6; удлинения нитей отмечены жирными отрезками и обозначены как $\Delta x_{\text{ср}}$ и $\Delta x_{\text{пр}}$). А поскольку деформации нитей по условию упругие, так же относятся друг к другу и силы натяжения:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{3}. \qquad (**)$$

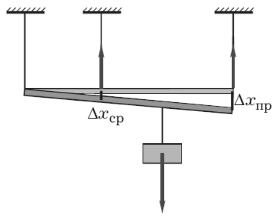


Рис. 6

Решая систему уравнений (*) – (**), находим критическое расстояние x, при котором сила натяжения левой нити становится равной нулю:

$$x = \frac{l}{2}. \qquad (^{***})$$

При расстояниях x, больших критического значения (***), левая нить «провисает», и стержень висит на средней и правой нитях.

Решение задания по математике

1. Область определения функции задаётся системой неравенств:

$$D_f = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^2}{1-x} > 0, \\ |x+1| > 0, \\ |x+1| \neq 1. \end{cases}$$

В её решение попадают все $x < 1$, $x \neq -3, -2, -1, 0$, т. е.

$$D_f = (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ -2) \cup$$
$$\cup (-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1).$$

Максимальное целое $x \in D_f$ равно -4.

2. Неравенство приобретает привычную форму, если проделать замену $t = f(x) \to f(t+1) \le t + \dfrac{1}{3}$.

Подставив в аргумент функции $f(x)$ вместо x выражение $t+1$, получим рациональное неравенство относительно t: $\dfrac{t-1}{t+4} \le t + \dfrac{1}{3}$, преобразуем к виду $\dfrac{(t+1)(3t+7)}{t+4} \ge 0$. Его решением является множество $\left(-4; -\dfrac{7}{3}\right] \cup [-1; +\infty)$.

Это уже множество значений функции $f(x)$ на множестве решений данного неравенства.

Вернёмся к этим решениям:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x+3} \ge -1, \\ -4 < \dfrac{x-2}{x+3} \le -\dfrac{7}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{x+3} \ge 0, \\ \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+3} \le 0, \\ \dfrac{x+2}{x+3} > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

В объединении присутствует система дробно-линейных неравенств с множеством решений $\left(-2; -\dfrac{3}{2}\right]$, а также решение первого неравенства $(-\infty; -3) \cup \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. В результате получаем ответ:

$$x \in (-\infty; -3) \cup \left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

3. Обозначим через m целую часть числа $\dfrac{187}{\sqrt{3}}$, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее (о доказательстве без калькулятора того, что $m = 107$, см. ниже). За m шагов блоха не сможет из точки A попасть в точку B, поскольку $m\sqrt{3} < 187$. Покажем, как за $m+1$ шаг она сможет осуществить этот манёвр.

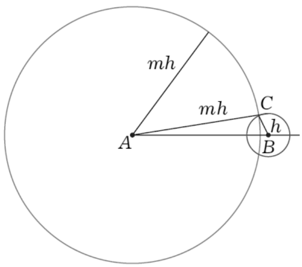


Рис. 1

Нарисуем окружность радиуса mh с центром в точке A ($h = \sqrt{3}$ – шаг блохи), пересекающую окружность радиуса h с центром B в точке C. Путь $A \to C \to B$ – один из

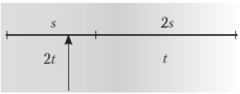
Олимпиада по физике имени проф. И.В. Савельева

Приведён вариант заданий олимпиады по физике имени профессора И.В. Савельева для 11-го класса (с решениями), которая состоялась 11 декабря 2011 г. в Национальном исследовательском ядерном университете МИФИ. Эта олимпиада является отборочным туром Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» для школьников 7–11-х классов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: олимпиада, «Росатом», 11 класс, абитуриенту

С.Е. МУРАВЬЁВ
semuraviev@mail.ru,
НИЯУ МИФИ, г. Москва

1. Тело, двигаясь прямолинейно, прошло два последовательных участка пути, длины которых относятся как 1 : 2. Соответствующие времена относятся друг к другу, как 2 : 1. При этом на каждом участке скорость тела была постоянной. Найдите среднюю скорость тела за первую и вторую половины полного времени движения, если скорость тела на первом участке пути равна v.



Решение. Пусть s – длина первого участка пути, t – время, затраченное на прохождение последнего участка. Поскольку полное время движения равно $3t$, то половина этого времени ($1{,}5t$) заканчивается, когда тело проходит три четверти первого участка пути (этот момент на рисунке отмечен стрелкой). А поскольку на всём первом участке тело двигалось равномерно, для средней скорости тела за первую половину полного времени движения имеем:

$$v_{\text{ср}}^{(1)} = \frac{3s/4}{1{,}5t} = \frac{s}{2t} = v.$$

Для средней скорости тела за вторую половину полного времени движения имеем, по определению средней скорости:

$$v_{\text{ср}}^{(2)} = \frac{2s + s/4}{3t/2} = \frac{3s}{2t} = 3v.$$

2. Два конденсатора ёмкостями C и $2C$ соединены последовательно и подключены к источнику напряжения. Во сколько раз изменится напряжение на конденсаторе C, если всё пространство между обкладками конденсатора $2C$ заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε?

Решение. При последовательном соединении конденсаторов их заряды одинаковы, а напряжения складываются. Поэтому для напряжения источника U имеем в первом случае:

$$U = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{2C} = \frac{3Q}{2C} \Rightarrow Q = \frac{2CU}{3},$$

где Q – заряд каждого конденсатора. Отсюда находим напряжение на конденсаторе C: $U_C = \dfrac{2U}{3}$.

После заполнения конденсатора $2C$ диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε его ёмкость возрастёт в ε раз. Поэтому для напряжения источника имеем во втором случае:

$$U = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{2\ C} = \frac{(2\ \ +1)Q}{2\ C} \qquad Q = \frac{2\ CU}{2\ \ +1},$$

где Q' – заряд каждого конденсатора во втором случае. Поэтому новое напряжение на конденсаторе C определяется соотношением $U'_C = \dfrac{2\varepsilon U}{2\varepsilon + 1}$, откуда находим, что напряжение на конденсаторе C увеличится в $\dfrac{U'_C}{U_C} = \dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}$ раз.

3. Баллон, содержащий некоторое количество кислорода, разрывается при испытаниях при температуре t_1 = 727 °C. Такой же баллон, содержащий смесь вдвое меньшего количества кислорода и вчетверо меньшего (по массе) количества неизвестного газа, разрывается при температуре t_2 = 127 °C. Найдите молярную массу неизвестного газа. μ_{O_2} = 32 г/моль.

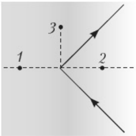
Решение. Пусть баллон выдерживает предельное давление p_0. Тогда для кислорода в баллоне имеем в момент разрыва $p_0 V = \dfrac{m}{\mu_{O_2}} R T_1$, где V – объём баллона, m – масса кислорода в баллоне в первом случае, $T_1 = t_1 + 273$ – абсолютная температура кислорода в момент разрыва.

Во втором случае в момент разрыва закон Дальтона для смеси кислорода и неизвестного газа даёт $p_0 V = \left(\dfrac{m}{2\mu_{O_2}} + \dfrac{m}{4\mu_X}\right) R T_2$, где μ_X – молярная масса неизвестного газа. Деля второе уравнение на первое и решая полученное уравнение, найдём:

$$\mu_X = \frac{\mu_{O_2} T_2}{2(2T_1 - T_2)} = 4 \text{ г/моль}.$$

Таким образом, неизвестный газ – гелий.

4. Бесконечный провод, по которому течёт ток I, изогнут под прямым углом. Индукция магнитного



поля провода в точке *1*, лежащей на продолжении биссектрисы угла, образованного проводом, на некотором расстоянии от угла равна $\vec{B}_1$. Индукция магнитного поля провода в точке *2*, лежащей на биссектрисе угла, образованного проводом, на том же расстоянии от угла равна $\vec{B}_1$. Найдите индукцию магнитного поля провода в точке *3*, лежащей в плоскости провода на перпендикуляре к биссектрисе угла, образованного проводом, на том же расстоянии от вершины угла.

Решение. Основная идея решения заключается в использовании принципа суперпозиции полей: вектор индукции магнитного поля, создаваемого проводником с током в некоторой точке, равен геометрической сумме векторов магнитной индукции полей, создаваемых отдельными участками данного проводника с током. Можно представить, что во всех трёх точках, о которых говорится в условии, магнитное поле создаётся двумя полубесконечными проводами, которые по отношению к этим точкам расположены так, как это показано либо на рис. *а*, либо на рис. *б* (расстояние d от конца провода до всех точек одно и то же). Поэтому можно из данных условия задачи найти векторы индукции магнитных полей, создаваемых этими проводами в заданных точках, а затем использовать это в исследуемом случае.

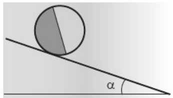
а *б*

Пусть в случае, показанном на рис. *а*, провод создаёт в т. *O* магнитное поле с индукцией $\vec{B}_а$, в случае *б* – магнитное поле с индукцией $\vec{B}_б$. Как видно из рисунка в условии задачи, в точке *1* поле создаётся двумя проводами, расположенными по отношению к этой точке так, как это показано на рис. *а*, причём, по правилу буравчика, векторы индукции магнитных полей направлены одинаково. Поэтому $B_1 = 2B_а$.

В точке *2* (см. рисунок в условии) поле создаётся двумя проводами, расположенными по отношению к этой точке так, как на рис. *б*, причём векторы индукции этих полей также направлены одинаково. Поэтому $B_2 = 2B_б$.

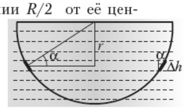
Магнитное поле в точке *3* создаётся двумя проводами, один расположен как на рис. *а*, второй – как на рис. *б*, причём векторы индукции этих полей направлены взаимно противоположно. Поэтому величина результирующего магнитного поля в этой точке равна разности модулей векторов индукции полей, созданных проводами *б* и *а*: $B_3 = B_б - B_а$.

Комбинируя выражения, получаем $B_3 = 0{,}5(B_2 - B_1)$.

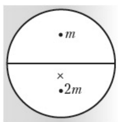


5. Сфера радиуса R спаяна из двух полусфер массами m и $2m$. Сферу аккуратно помещают на наклонную плоскость с углом при основании α. Трение между плоскостью и сферой таково, что сфера не скользит по плоскости. При каком максимальном угле α сфера может находиться в равновесии?

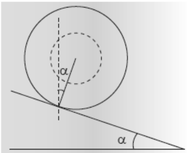
Решение. Для исследования устойчивости найдём положение центра тяжести сферы. Сначала докажем, что центр тяжести однородной полусферы находится на расстоянии $R/2$ от её центра (R – радиус полусферы).



Для этого мысленно разрежем полусферу плоскостями, параллельными кругу, «стягивающему» полусферу, на тонкие «пояски» толщиной Δh. Рассмотрим «поясок», лежащий на расстоянии r от центра полусферы и имеющий радиус $\sqrt{R^2 - r^2}$. Очевидно, площадь поверхности этого пояска можно найти как $\Delta S = 2\pi\sqrt{R^2 - r^2}\,\Delta l = 2\pi\sqrt{R^2 - r^2}\,\dfrac{\Delta h}{\cos\alpha}$, где $\Delta l = \Delta h/\cos\alpha$, α – угол между поверхностью «пояска» и перпендикуляром к его плоскости. Как следует из рисунка, этот угол равен углу между радиусом сферы, проведённым к рассматриваемому «пояску», и радиусом самого «пояска». Поэтому $\Delta S = 2\pi R \cdot \Delta h$ и не зависит от расстояния до центра полусферы. Другими словами, площади всех «поясков» с одинаковыми высотами (а, следовательно, и их массы) одинаковы. Это значит, что масса полусферы распределена в направлении радиуса, проведённого перпендикулярно «стягивающему» полусферу кругу, равномерно и, следовательно, её центр тяжести лежит на расстоянии $R/2$ от центра.



Поэтому центр тяжести сферы, состоящей из двух однородных полусфер массами m и $2m$, можно найти как центр тяжести системы из двух материальных точек массой, равной массе полусферы каждая, лежащих на расстоянии $R/2$ от центра сферы. Находя центр тяжести системы этих материальных точек, заключаем, что центр тяжести сфе-



ры лежит на расстоянии

$$x = \frac{R(2m - m)}{6m} = \frac{R}{6}$$

от центра сферы (на рисунке выше он обозначен крестиком).

Ну а теперь рассмотрим сферу, состоящую из двух полусфер, на наклонной плоскости. При разных положениях границы между полусферами центр тяжести сферы будет занимать различные положения, лежащие на окружности радиуса x от центра сферы (на рисунке, см. с. 48, эта окружность показана пунктиром). Очевидно, что чтобы сфера могла находиться в равновесии на плоскости (при условии, что трение не позволит ей соскальзывать), необходимо, чтобы её центр тяжести находился над точкой касания полусферы и наклонной плоскости, поскольку в противном случае момент силы тяжести относительно точки касания не будет равен нулю. Поэтому сфера может находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вертикаль, проведённая через точку касания, пересекает окружность, на которой лежит центр тяжести сферы, то есть если выполнено условие $x \geq R\sin\alpha$.

При этом, очевидно, нижняя точка пересечения вертикали и окружности, на которой лежит центр тяжести сферы, отвечает устойчивому равновесию, верхняя – неустойчивому. Для рассматриваемой полусферы вышенаписанное условие сводится к условию $\sin\alpha \leq \frac{1}{6}$, или $\alpha \leq \arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = 11°$, что и даёт ограничение на предельный угол наклона плоскости к горизонту.

Сергей Евгеньевич Муравьёв – доцент кафедры теоретической физики НИЯУ МИФИ, к. ф.-м. н. Закончил МИФИ в 1982 г. Автор более 70 научных работ в области ядерной физики низких энергий, 10 учебников и задачников по физике для школьников. В течение многих лет возглавляет методическую комиссию и составляет задания по физике для олимпиады Росатом. Входит в состав команды преподавателей НИЯУ МИФИ, проводящих курсы повышения квалификации учителей математики и физики в регионах РФ. Проводил курсы повышения квалификации и краткосрочные семинары для учителей в городах: Москва, Рязань, Сергиев Посад, Липецк, Димитровград, Снежинск, Саров, Озёрск, Тамбов, Нововоронеж и др.

По следам одного астрономического наблюдения

Проанализировано дневное наблюдение Венеры, проведённое во время кругосветного путешествия русским мореплавателем В.М. Головниным в феврале 1819 г. В это же время на небе наблюдался видимый парад планет. Похожий парад планет состоится в марте 2022 г.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Венера, дневное наблюдение Венеры, парад планет

Е.Б. ГУСЕВ
e.gusev@rsu.edu.ru,
РГУ имени С.А. Есенина,
г. Рязань

О пользе наблюдений светил небесных, а особливо тех перемен, кои редко бывают и великую пользу приносят, не нужно упоминать здесь пространно.

М.В. Ломоносов. Явление Венеры на Солнце, наблюденное в Санктпетербургской Императорской Академии наук Майя 26 дня 1761 года*

Все космические явления уникальны. Если физический эксперимент может быть повторен, то явления на звёздном небе происходят только один раз. Можно увидеть только похожее или однотипное космическое событие. Иногда на небе происходят редкие явления, которые привлекают особое внимание, например, появление яркой кометы, полные затмения Солнца и Луны, прохождение Меркурия и Венеры по диску Солнца, метеорный дождь, полёт болида, пролёт очень яркого искусственного спутника Земли, например, Международной космической станции. Проанализируем описание одного такого интересного астрономического явления.

Во время кругосветного путешествия на шлюпе «Камчатка» в 1819 г. знаменитый русский мореплаватель В.М. Головнин и члены его команды в середине дня невооружённым глазом (!) наблюдали планету Венера. Капитан В.М. Головнин хорошо разбирался в мореходной астрономии и имел немалый интерес к астрономии вообще. В книге «Путешествие вокруг света, совершённое на военном шлюпе «Камчатка» в 1817, 1818 и 1819 годах флота капитана Головнина» (http://knigolubu.ru/russian_classic/golovnin_vm), основывающейся на путевых заметках, об упомянутом астрономическом явлении написано так:

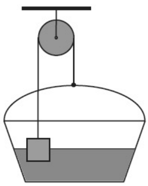
*Ломоносов М.В. ПСС в 11 т. Т. 4. М.-Л.: АН СССР, 1955. С. 361.

Олимпиада «Росатом» по физике

В течение 2012 – 2013 учебного года Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» проводил традиционную физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада проводилась в несколько туров в Москве и на 35 региональных площадках, расположенных в крупных образовательных центрах РФ (Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде, Самаре, Ростове-на-Дону и др.) или в городах размещения предприятий атомной отрасли (Сарове, Снежинске, Северске и др.). В олимпиаде принимали участие более 22 тысяч школьников. Ниже приводятся варианты заданий одного из туров олимпиады «Росатом» по физике для школьников 11 класса.

Задание олимпиады «Росатом»

1. К сосуду с жидкостью суммарной массой m прикреплена невесомая и нерастяжимая нить, переброшенная через блок. Ко второму концу нити прикреплено тело с массой $1{,}2m$, в положении равновесия частично погружённое в жидкость. На какую часть своего объёма тело погружено в жидкость? Плотность тела втрое больше плотности жидкости.



2. Цилиндрический сосуд длиной l разделён на три части подвижными перегородками. В каждом отсеке содержится по одному молю гелия, водорода и кислорода. В некоторый момент времени левая перегородка становится прозрачной для гелия и водорода, правая – только для гелия. На сколько переместится правая перегородка? Температуры газов не меняются в течение всего процесса.

He	H_2	O_2

3. Три металлические концентрические сферы имеют радиусы R, $2R$ и $4R$. Меньшую сферу заряжают зарядом Q, большую – зарядом $-3Q$, а среднюю заземляют с помощью длинного и тонкого проводника. Найти потенциал большей сферы. Ёмкостью проводника пренебречь.

4. На одном из островов Бермудского треугольника ускорение свободного падения отклонено на юг и составляет угол α с вертикалью. На каком расстоянии от туземца упадёт камень, брошенный вертикально вверх с начальной скоростью v_0? В каком направлении его следует бросить, чтобы он вернулся обратно? Вращение Земли не учитывать.

5. Воду нагревают кипятильником, подключённым к источнику напряжения U. Электрическое сопротивление кипятильника линейно зависит от температуры:

$$R = R_0 + \alpha T,$$

где R_0 и α – постоянные. Масса воды равна m, а её удельная теплоёмкость – c. Начальная температура воды – T_0, кипения – $T_к$. Через какое время вода закипит? Потерями тепла пренебречь.

Решения

1. На тело действуют: сила тяжести, сила натяжения нити и выталкивающая сила со стороны жидкости в сосуде, направленная вверх. На сосуд действуют: сила тяжести, сила натяжения нити и сила со стороны тела, равняя по величине силе Архимеда. Поэтому условия равновесия для тела и сосуда дают

$$\begin{cases} T + F_A = 1{,}2mg, \\ T = mg + F_A, \end{cases}$$

где T и F_A – силы натяжения нити и Архимеда соответственно. Вычитая второе уравнение из первого, найдём силу Архимеда:

$$F_A = 0{,}1mg.$$

Поскольку масса тела равна $1{,}2m$, из закона Архимеда имеем:

$$F_A = \frac{0{,}1}{1{,}2}\rho_т V g,$$

где $\rho_т$ и V – плотность и объём тела. С другой стороны, по закону Архимеда имеем:

$$F_A = \rho_ж g V_{п.ч.},$$

где $\rho_ж$ и $V_{п.ч.}$ – плотность и объём погруженной в жидкость части тела. Отсюда находим долю объёма тела, погружённую в жидкость:

$$\frac{V_{п.ч.}}{V} = \frac{0{,}1\rho_т}{1{,}2\rho_ж} = 0{,}25.$$

2. Перегородка будет находиться в равновесии, когда давление газа справа и слева от неё будет одинаковым. А поскольку в каждом отсеке содержится по одному молю газа, из закона Клапейрона – Менделеева для каждого отсека следует, что в начальном положении перегородки делят цилиндр на три равные части. После того как обе перегородки стали проницаемы для гелия, гелий распределится по всему сосуду с равной концентрацией и будет оказывать одинаковое парциальное давление независимо от положения перегородок. Поэтому при исследовании их равновесия гелий можно не учитывать. Водород распределится по среднему и левому отсекам с одинаковой концентрацией, поэтому левая перегородка может занять любое положение, и для исследования равновесия правой перегородки её можно не рассматривать. Справа от правой перегородки находится один моль кислорода, слева – один моль водорода. Поэтому положением равновесия для этой перегородки будет середина сосуда, и, следовательно, её перемещение составит

$$\Delta x = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}.$$

3. Поскольку средняя сфера заземлена, её потенциал равен нулю. С другой стороны, по принципу суперпозиции потенциал средней сферы равен

$$\varphi = \frac{kQ}{2R} + \frac{kx}{2R} + \frac{k(-3Q)}{4R},$$

где k – постоянная закона Кулона, x – заряд средней сферы. Приравнивая этот потенциал к нулю, находим заряд средней сферы x:

$$x = \frac{Q}{2}.$$

Теперь по принципу суперпозиции для потенциалов находим потенциал большей сферы:

$$\varphi = \frac{kQ}{4R} + \frac{k(Q/2)}{4R} + \frac{k(-3Q)}{4R} = -\frac{3kQ}{8R}.$$

4. Для простоты повернём вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ вертикально вниз, а поверхность Земли наклоним. Тогда наша задача полностью эквивалентна задаче о теле, брошенном на плоскости, наклонённой под углом α к горизонту, при условии, что вектор $\vec{g}$ направлен вертикально вниз. И искомое расстояние от упавшего камня до точки бросания есть расстояние вдоль плоскости. Проецируя уравнения движения на ось x, направленную вдоль плоскости, и ось y, направленную перпендикулярно, получим:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{g(\sin\alpha)t^2}{2}, \\ y(t) = v_0 t - \dfrac{g(\cos\alpha)t^2}{2}. \end{cases}$$

Время движения t_0 находим из условия $y(t_0) = 0$:

$$t_0 = \frac{2v_0}{g\cos\alpha}.$$

Подставляя его в уравнение для $x(t)$, найдём искомое расстояние:

$$l = \frac{2v_0^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.$$

Чтобы камень упал в ту же точку, его нужно бросить противоположно вектору $\vec{g}$, т. е. под углом α к вертикали.

5. Для малого интервала времени Δt в тот момент, когда температура воды равна T, имеем:

$$\frac{U^2\Delta t}{R_0 + \alpha T} = cm\Delta T,$$

где ΔT – изменение температуры воды в течение рассматриваемого интервала времени. Отсюда находим:

$$U^2\Delta t = cm\left(R_0 + \alpha T\right)\Delta T =$$

$$= cmR_0\Delta T + cm\alpha T\Delta T.$$

Аналогичные формулы можно написать для любых интервалов времени Δt. Складывая все эти формулы, получим:

$$U^2 t = cmR_0\left(T_\text{к} - T_0\right) + cm\alpha\sum T\Delta T,$$

где t – время нагрева. Второй член суммы в правой части имеет такой же вид, как сумма, которой определяется работа силы упругости пружины при её удлинении от одного значения до другого. Пользуясь этими результатами, получаем:

$$U^2 t = cmR_0\left(T_\text{к} - T_0\right) + cm\alpha\frac{\left(T_\text{к}^2 - T_0^2\right)}{2} =$$

$$= cm\left(T_\text{к} - T_0\right)\left(R_0 + \frac{\alpha\left(T_\text{к} + T_0\right)}{2}\right).$$

Отсюда

$$t = \frac{cm\left(T_\text{к} - T_0\right)}{U^2}\left(R_0 + \frac{\alpha\left(T_\text{к} + T_0\right)}{2}\right).$$

Материал к публикации подготовил ***С.Е. Муравьёв.***

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Всё решило обращение к истории

Выдающийся советский физик, академик Лев Андреевич Арцимович, выступая на различных совещаниях, отстаивал свою точку зрения, невзирая на лица и часто прибегая к юмору, иносказанию. Так, в воспоминаниях о нём академика Виталия Иосифовича Гольданского рассказывается, как Лев Андреевич, будучи членом Комитета по Ленинским и Государственным премиям, «завалил» премирование работ по сооружению Волго-Балтийского водного пути. «Он, – пишет Гольданский в статье "Живая легенда", – сказал в своём выступлении, что работа эта, безусловно, выдающаяся и заслуживает самой высокой оценки, но в авторский коллектив должен быть введён ещё один человек. Посыпались просьбы конкретизировать, кого он имеет в виду. Лев Андреевич не замедлил ответить:

– Петра Алексеевича Романова.

– Кто это такой? – продолжались вопросы.

– Это – Пётр Первый, ведь канал-то впервые заработал при нём.»

Сергей Евгеньевич Муравьев

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом»

Физика

В помощь школьникам 7–11 классов

Учебно-методическое пособие

Редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет подготовлен М.В. Макаровой

Подписано в печать 30.11.2018. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 7,75. Печ. л. 7,75. Изд. № 032-1.
Тираж 1200 экз.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, г. Москва, Каширское ш., д. 31.
ООО «Типография «Миттель Пресс».
127254, г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6