Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Математика, 11 класс

1. Найти наибольшее значение выражения $x-2y$ для $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2+9y^2=25$.

2. Найти все решения $(x;y)$ уравнения $(2\sin(x+y)+3)(\cos(2x-y)-1)=-10$, лежащие на прямой $6x+5y=15\pi$.

3. Найти зависимость от n числа целых неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_n=m$ при $m=2$ и $m=3$. При каком n число решений для $m=3$ будет в четыре раза большим, чем число решений для $m=2$?

4. В гостиной находится двое часов с боем, показывающих разное время. Каждый час они производят звуковые сигналы в количестве, на которое указывает часовая стрелка, при этом минутная стрелка направлена на 12. Интервал между сигналами для первых часов 3 сек., для вторых – 4 сек. Часы начали и закончили бой одновременно. Петя, находясь в соседней комнате, насчитал 13 ударов, принимая совпадающие сигналы за один. Какое время показывали первые и вторые часы в момент первого удара боя? Продолжительность одного сигнала мала и ее можно не учитывать, качество сигнала у обоих часов одинаковое.

5. Для всех целых $k<0$ найти целые решения x и y системы уравнений $\begin{cases} x^2+xy^2-ky^2=0 \\ x^2-xy+ky^2=0 \end{cases}$.

6. Волк окружен собаками, расположенными в точках M,N,P и Q на сторонах квадрата $ABCD$, $M\in[A;B], N\in[B;C], P\in[C;D], Q\in[D;A]$ так, что $AM:MB=BN:NC=CP:PD=DQ:QA=1:3$. Волк, находящийся внутри квадрата в точке пересечения прямых MP и NQ, может бежать со скоростью v_w по прямой в любом направлении. Собаки бегают только по сторонам квадрата со скоростью, не превосходящей v_c. Волк может вырваться из окружения, если на границе квадрата встретит не более одной собаки. При каких значениях отношения v_c/v_w волк имеет шанс спастись?

Ответы и решения

1. Если $\varphi\in[0;2\pi]$, то числа $x=\frac{5}{2}\cos\varphi$ и $y=\frac{5}{3}\sin\varphi$ удовлетворяют уравнению. Тогда

$$x-2y=\frac{5}{2}\cos\varphi-\frac{10}{3}\sin\varphi=\frac{5}{6}(3\cos\varphi-4\sin\varphi)=\frac{25}{6}\left(\frac{3}{5}\cos\varphi-\frac{4}{5}\sin\varphi\right)=$$
$$=\frac{25}{6}(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)=\frac{25}{6}\cos(\varphi+\theta),$$

где $\theta = \arccos\frac{3}{5}$. Поскольку наибольшим возможным значением $\cos(\varphi+\theta)$, $\varphi \in [0;2\pi]$ является 1, то $(x-2y)_{\max} = \frac{25}{6}$.

2. Поскольку $|2\sin(x+y)+3| \le 5,\ |\cos(2x-y)-1| \le 2$, равенство возможно только при

$$\begin{cases} \sin(x+y)=1 \\ \cos(2x-y)=-1 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, \\ 2x-y=\pi+2\pi n \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}(m+n) \\ y=\frac{2\pi}{3}(2m-n) \end{cases},\ m,n\in Z\ .$$

Подставляя найденные x и y в уравнение прямой, получим

$$3\pi+4\pi(m+n)+\frac{10\pi}{3}(2m-n)=15\pi \to 32m+2n=36 \to \begin{cases} m=t \\ n=18-16t \end{cases}, t\in Z \ \text{. Тогда } \begin{cases} x=\frac{5\pi}{2}(5-4t) \\ y=12\pi(t-1) \end{cases}, t\in Z\ .$$

3. 1) Обозначим через k_n^m число неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_n=m$.

Для $m=2$ число решений , для которых $x_i=2$, а $x_j=0,\ j\ne i$ равно $C_n^1=n$. Число решений, для которых $x_i=1,\ x_j=1,\ x_k=0, k\ne i,j$, равно $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. Тогда $k_n^2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2$.

Для $m=3$ число решений, для которых $x_i=3$, а $x_j=0,\ j\ne i$ равно $C_n^1=n$. Число решений, для которых $x_i=2,\ x_j=1,\ x_k=0, k\ne i,j$, равно $A_n^2=2!C_n^2=n(n-1)$. Число решений, для которых $x_i=1,\ x_j=1,\ x_k=1,\ x_r=0,\ r\ne i,j,k$, равно $C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Тогда

$$k_n^3=C_n^1+2C_n^2+C_n^3=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=n+\frac{n(n-1)(n+4)}{6}=$$
$$=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=C_{n+2}^3 .$$

2) Условие $k_n^3=4k_n^2$ приводит к равенству $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=4\cdot\frac{n(n+1)}{2}\to n+2=12\to n=10$

4. Пусть $t_1,\ t_2-$ время на первых и вторых часах. $L=3\cdot(t_1-1)=4\cdot(t_2-1)-$ время от первого до последнего удара часов. $t_1=4k+1, t_2=3k+1, L=12k, k\in Z$. Количество совпадающих сигналов, включая первый и последний, равно $k+1$. Общее число сигналов, услышанных Петей, равно $t_1+t_2-k-1=6k+1=13\to k=2\to t_1=9, t_2=7.$

5. Складываем и вычитаем уравнения

$$\begin{cases} x(2x+y(y-1))=0 \\ y(x(y+1)-2ky)=0 \end{cases} \to 1) x=0\to y=0, \forall\ k<0 \ \ 2)\ y=0\to x=0, \forall\ k<0$$

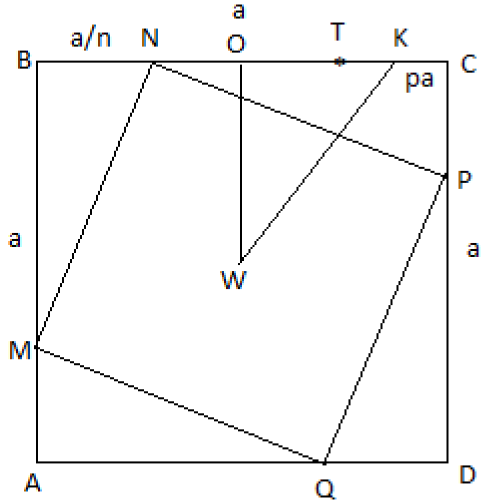
$$3)\ x\ne 0,\ \ y\ne 0 \to \begin{cases} x(y+1)=2ky \\ 2x=-y(y-1) \end{cases} \to \begin{cases} y^2=1-4k \\ x=-\frac{y(y-1)}{2} \end{cases}$$

С учетом целочисленности y имеем: $1-4k=m^2, m\in Z\to k=\frac{(1-m)(1+m)}{4}<0\to |m|>1$. Целочисленность k достигается только при нечетном m, т.е. $m=2l+1,\ l\ne 0,-1,\ l\in Z$. При $k=-l(l+1)$, $l\ne 0,-1,\ l\in Z$, помимо $x=0, y=0$, система имеет решения:

$$\begin{cases} y_1=m=2l+1, \\ x_1=-l(2l+1) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_2=-m=-2l-1 \\ x_2=-(l+1)(2l+1) \end{cases}$$

При $k<0, k\in Z, k\ne -l(l+1), \forall l\in Z$ имеется только нулевое решение.

6.



Пусть $AM:MB=BN:NC=CP:PD=DQ:QA=1:n$, $a-$ сторона квадрата $ABCD$, волк находится в точке W - центре квадрата $MNPQ$. Точка T на стороне BC определена условием $NT=TC+CP=a/2$, $TC=\dfrac{n-2}{2n}a$, $K-$ точка выхода волка на границу квадрата, $KC=p\cdot a$, $p-$ параметр.

Случай 1. $K\in[T;C]\to p\in\left[0;\dfrac{n-2}{2n}\right]$

$WK=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2p+2p^2}$, $NK=\dfrac{a(n-1-pn)}{n}\ge\dfrac{a}{2}$

$t_w=\dfrac{a\sqrt{1-2p+2p^2}}{v_w\sqrt{2}}-$ время попадания волка в точку K,

$t_c=\dfrac{a(n-1-pn)}{nv_c}-$ время появления двух собак в точке K .

$t_w<t_c$ – условие спасения волка. $\dfrac{t_c}{t_w}>1\to\varphi_1(p)=\dfrac{t_c}{t_w}=\dfrac{v_w\sqrt{2}}{nv_c}\cdot\dfrac{n-1-pn}{\sqrt{1-2p+2p^2}}>1$.

Функция монотонно убывает при $p\in\left[0;\dfrac{n-2}{2n}\right]$ (проверяется дифференцированием), поэтому максимум $\varphi(p)$ на отрезке достигается в точке $p=0$.

Если $\varphi_1(0)=\dfrac{v_w(n-1)\sqrt{2}}{nv_c}>1$, то прорыв волка на границе $[K;C]$ возможен при $\dfrac{v_c}{v_w}<\dfrac{(n-1)\sqrt{2}}{n}$.

Случай 2. $K\in[N;T]$, $p\in\left[\dfrac{n-2}{2n};\dfrac{n-1}{n}\right]$

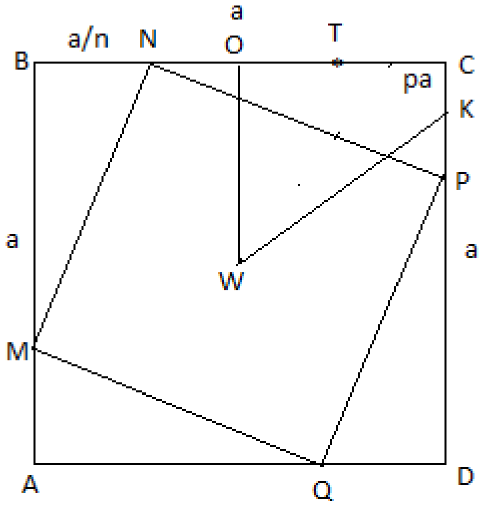
$t_c=(pa+\dfrac{a}{n})/v_c=\dfrac{a(pn+1)}{nv_c}-$ время появления в точке K двух собак,

$t_w=\dfrac{a\sqrt{1-2p+2p^2}}{v_w\sqrt{2}}-$время появления волка в точке K.

$\dfrac{t_c}{t_w}>1\to\varphi_2(p)=\dfrac{t_c}{t_w}=\dfrac{v_w\sqrt{2}}{nv_c}\cdot\dfrac{pn+1}{\sqrt{1-2p+2p^2}}>1.$

Функция $\varphi_2(p)$ возрастает при $p \in \left[\frac{n-2}{2n};\frac{n-1}{n}\right]$, поэтому при ее максимум достигается на правом конце отрезка: если $\varphi_2\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{v_w n\sqrt{2}}{v_c\sqrt{n^2-2n+2}} > 1$, то прорыв волка на отрезке $[N;T]$ границы возможен. т.е. если $\frac{v_c}{v_w} < \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-2n+2}}$ волк может спастись через участок границы $[N;T]$

Случай 3. Участок границы $[C;P]$



$CK = p \cdot a,\ \ p \in \left[0;\frac{1}{n}\right]$, $t_c = (\frac{n-1}{n}a + pa) : v_c = \frac{a\left(pn+n-1\right)}{nv_c}$, $t_w = \frac{a\sqrt{2p^2-2p+1}}{v_w\sqrt{2}}$

$\frac{t_c}{t_w} > 1 \to \varphi_3(p) = \frac{t_c}{t_w} = \frac{v_w\sqrt{2}}{nv_c} \cdot \frac{n-1+pn}{\sqrt{1-2p+2p^2}} > 1$ хотя бы в одной точке $p \in \left[0;\frac{1}{n}\right]$.

Функция $\varphi_3(p)$ возрастает на отрезке $p \in \left[0;\frac{1}{n}\right], n \ge 2$, поэтому если $\varphi_3\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{nv_w\sqrt{2}}{v_c\sqrt{n^2-2n+2}} > 1$,то волк может покинуть квадрат через отрезок $[C;P]$ границы квадрата, т.е. $\frac{v_c}{v_w} < \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-2n+2}}$.

В варианте 1 $n=3$, случай 1 дает условие $\frac{v_c}{v_w} < \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94$, случаи 2 и 3 приводят к неравенству $\frac{v_c}{v_w} < \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \approx 1,89$, поэтому волк имеет шанс покинуть квадрат, если $\frac{v_c}{v_w} < \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \approx 1,89$