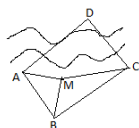


Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Математика, 8 класс

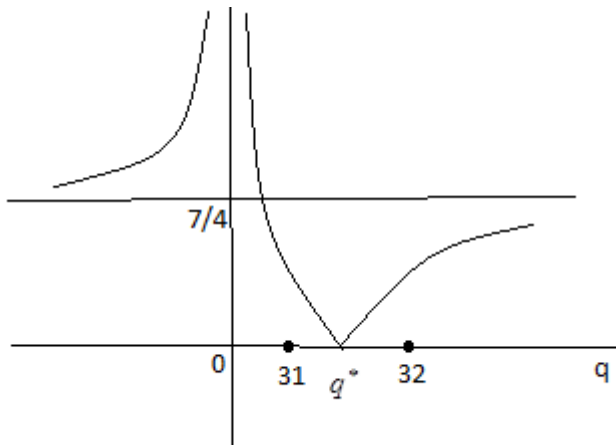
1. Петр Иванович родился в двадцатом веке. В 2014 году его возраст был в три раза большим, чем сумма цифр года его рождения. В каком году родился Петр Иванович?
2. Найти все целые n , при которых выражение $n^2 - 2n - 3$ делится на 13 без остатка.
3. Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a , если общее число его возможных делителей на 63 меньше числа всех делителей a^2 .
4. Среди обыкновенных дробей вида $\frac{p}{q}$, для которых $p + q = 55$, найти дробь наименее удаленную на числовой прямой от числа $\frac{3}{4}$.
5. Перед Петей стоит вполне практическая задача. На рис. указано расположение точек A, B, C на одной стороне реки, точки D на другой и точки M , в которой находится Петя. Расстояние от точки M до точек A, B, C Петя измерил: $MA = 20$, $MB = 30$, $MC = 40$. Пете и вам нужно вычислить расстояние от точки M до точки D , если известно, что $ABCD$ – прямоугольник, а плавать Петя не умеет.



Ответы и решения

1. Пусть $19xy$ – год рождения Петра Ивановича. Из условия имеем
 $2014 - 1900 - 10x - y = 3(1 + 9 + x + y) \rightarrow 84 = 13x + 4y \rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = 21 - 13t, \end{cases} t \in Z$ – общее решение. С учетом цифры $t = 1 \rightarrow x = 4, y = 8$, т.е. год рождения Петра Ивановича - 1948.
2. Выражение $A = n^2 - 2n - 3 = (n+1)(n-3)$ делится на 13, если один сомножителей $n+1$ или $n-3$ делится на 13. Отсюда
$$\begin{cases} n+1=13k \\ n-3=13k, k \in Z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n=13k-1 \\ n=13k+3, k \in Z \end{cases}.$$
3. По условию $a = 2^{2m} \cdot 3^m$. Общее число его делителей, включая единицу, равно $(2m+1)(m+1)$. Общее число делителей $a^2 = 2^{4m} \cdot 3^{2m}$ равно $(4m+1)(2m+1)$. Их разность
$$(4m+1)(2m+1) - (2m+1)(m+1) = 3m(2m+1)$$
по условию равна 63: $2m^2 + m - 21 = 0$.
Последнее уравнение имеет только одно целое решение $m = 3$. Тогда число $a = 2^6 \cdot 3^3 = 1728$.

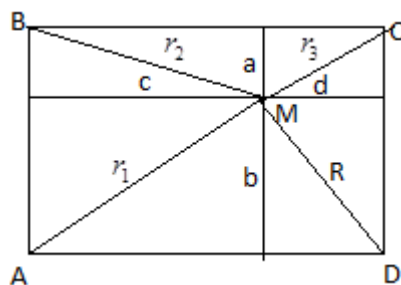
4. Необходимо найти целое q , для которого величина $\Delta = \left| \frac{3}{4} - \frac{55-q}{q} \right| = \left| \frac{7q-220}{4q} \right|$ принимает наименьшее значение. На рис. изображен график зависимости Δ от q :



$q^* = \frac{220}{7} \approx 31,4$ – ноль функции Δ . $q_1 = 31$, $q_2 = 32$ – ближайшие к q^* целые числа.

$\Delta(q_1) = \frac{3}{128} < \Delta(q_2) = \frac{4}{128}$. Искомая дробь $\frac{24}{31}$ соответствует $q = 31$.

5. Пусть a, b – расстояния от точки M до сторон BC и CD , а c, d – расстояния от точки M до сторон AB и CD .



Обозначим через r_1, r_2, r_3 и R – расстояния точки M до вершин A, B, C и D . Тогда

$$c^2 + b^2 = r_1^2, \quad a^2 + c^2 = r_2^2, \quad a^2 + d^2 = r_3^2, \quad d^2 + b^2 = R^2.$$

Заметим, что $r_1^2 + r_3^2 = r_2^2 + R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Откуда $R^2 = r_1^2 + r_3^2 - r_2^2$. Так как

$$r_1 = 20, \quad r_2 = 30, \quad r_3 = 30,$$

то $R^2 = 20^2 + 30^2 - 30^2 = 1100 \rightarrow R = 10\sqrt{11}$.