Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Математика, 9 класс

1. Саша ехал в автобусе по улице и увидел через окно своего друга Колю, идущего по другой стороне улицы в противоположном направлении. Через две минуты автобус остановился на остановке. Саша быстро вышел из автобуса, перебежал улицу и побежал догонять Колю. Через сколько минут он догонит Колю, если он бежит в три раза быстрее, чем идет Коля и в пять раз медленнее, чем едет автобус? Время выхода из автобуса и перехода улицы не учитывать.

2. Доказать формулу «сложного корня» $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ и с ее помощью вычислить величину $\left(\frac{\sqrt{13+\sqrt{48}}-1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}\right)^2$.

3. $\{a_k\}-$ арифметическая прогрессия, $S_n -$сумма первых n ее членов. Известно, что $S_m : S_n = m(m+2) : n(n+2)$ при любых целых, положительных m и n. Найти отношение $a_{2015} : a_{2014}$.

4. Найти целые x и y, для которых $x^4 - 3x^2y + 2y^2 = 35$.

5. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 2. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

Ответы и решения

1. $v_A, v_k, v_c -$скорости автобуса, Коли и Саши соответственно, $T-$ искомое время. Расстояние между Колей и Сашей в момент остановки автобуса: $2(v_A + v_k)$. Скорость их сближения: $v_C - v_k$, $v_C = 3v_k, v_A = 5v_C = 15v_k -$ условия задачи. $T = \frac{2(v_A+v_k)}{v_C - v_k} = \frac{2(15v_k+v_k)}{3v_k - v_k} = 16$

2. Данное в условии равенство $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ доказывается возведением в квадрат.

1. $\sqrt{13+\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{13+\sqrt{169-48}}{2}} + \sqrt{\frac{13-\sqrt{169-48}}{2}} = \sqrt{12}+1$
2. $\sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-24}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} = \sqrt{6}-1$
3. $\frac{\sqrt{13+\sqrt{48}}-1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$.

3. $S_2 = 2a_1 + d,\ S_1 = a_1 \to S_2 : S_1 = \frac{2a_1+d}{a_1} = \frac{8}{3} \to \frac{d}{a_1} = \frac{2}{3}$

$$\frac{a_{2015}}{a_{2014}} = \frac{a_1 + d\cdot 2014}{a_1 + d \cdot 2013} = \frac{3+2\cdot 2014}{3+2\cdot 2013} = \frac{4031}{4029}$$

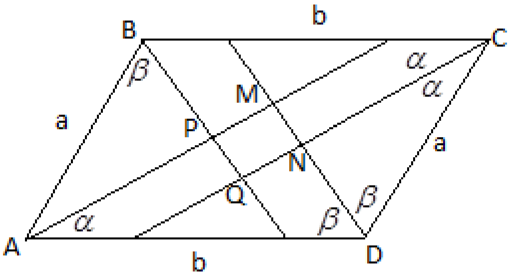
4. Разложим левую часть на множители: $\left(x^2-y\right)\left(x^2-2y\right)=35$. В целых числах это возможно в следующих восьми случаях:

1. $\begin{cases} x^2-y=1 \\ x^2-2y=35 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2-y=-1 \\ x^2-2y=-35 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2-y=5 \\ x^2-2y=7 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2-y=-5 \\ x^2-2y=-7 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2-y=7 \\ x^2-2y=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-y=-7 \\ x^2-2y=-5 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x^2-y=35 \\ x^2-2y=1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^2-y=-35 \\ x^2-2y=-1 \end{cases}$

Целые решения $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=2 \end{cases}$ имеет только система 5. , остальные системы целых решений не имеют.

5.



На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с острым углом 2α и четырехугольник $MNPQ$, образованный биссектрисами внутренних углов. Поскольку $\alpha+\beta=90^0$ четырехугольник $MNPQ$ - прямоугольник. Вычислим его стороны.

$$\begin{aligned} MN &= DM-DN = b\sin\alpha - a\sin\alpha = (b-a)\sin\alpha \\ QN &= CQ-CN = b\cos\alpha - a\cos\alpha = (b-a)\cos\alpha \end{aligned}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= MN\cdot QN = (b-a)^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{(b-a)^2}{2}\sin 2\alpha \\ S_{ABCD} &= a\cdot b\cdot \sin 2\alpha \\ S_{MNPQ}:S_{ABCD} &= \frac{(b-a)^2}{2ab} \end{aligned}.$$

Поскольку $a=2,\ b=3$, то $S_{MNPQ}:S_{ABCD}=1:12$.