Заключительный тур олимпиады Росатом, весна, 2016, Математика, 7 класс

Задание

1. Учитель попросил Петю задумать целое положительное число. Умножить его на число, превышающее задуманное на два и прибавить к результату единицу. После объявления результата счета 36, учитель сразу назвал число, которое задумал Петя. Найти это число.

2. При каких целых a уравнение $(2a+3)x = 4a+9$ имеет целые решения?

3. Вова, Петя и Маша сидят за круглым столом и играют в устный счет. Игра состоит в том, что каждый, услышав «на ушко» от соседа справа число, умножает его на свое, заранее придуманное простое число, и сообщает результат соседу слева. Круг игры начинается с Вовы и заканчивается им, игра завершается после 3 кругов. Первое натуральное число сообщает Вове «на ушко» его бабушка. Вова объявляет всем последнее, услышанное им число 86400. Какое число сообщила Вове бабушка, если все придуманные игроками числа были различными?

4. Найти a, при которых множество решений системы $\begin{cases} ax-2 \le 0 \\ 2x+a \ge 0 \end{cases}$ представляет отрезок на действительной оси длиной 2.

5. На какое минимальное число треугольников можно разрезать ножницами выпуклый $90-$угольник?

Решения

1. Обозначим задуманное число через x. Из условий задачи имеем

$x(x+2)+1 = x^2+2x+1 = (x+1)^2 = 36 \to x+1 = 6 \to x = 5$.

2. Коэффициент $2a+3 \ne 0$ при целых a, поэтому уравнение имеет единственное решение для всех целых a. Это решение $x = \dfrac{4a+9}{2a+3} = \dfrac{2(2a+3)+3}{2a+3} = 2+\dfrac{3}{2a+3}$.

Целочисленность x возможна при 1) $2a+3=-1$; 2) $2a+3=1$; 3) $2a+3=-3$; 4) $2a+3=3$.

Случай 1) дает $a=-2$, случай 2) - $a=-1$, случай 3) - $a=-3$, случай 4) - $a=0$.

3. Разложим число 86400 на простые множители: $86400 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. Пусть p, q и r различные простые числа, придуманные Петей, Машей и Вовой соответственно, а A - число, сообщенное бабушкой. Так как игра продолжалась 3 круга, то последнее, услышанное Вовой, число равно $A \cdot p^3 \cdot q^3 \cdot r^2$. Сравнивая его с числом $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, приходим к выводу, что $r=5$, Петя и Маша придумали числа 2 и 3, а бабушка число $2^4 = 16$

4. Рассмотрим три случая. Случай 1. $a > 0$. Имеем $\begin{cases} x \le \dfrac{2}{a} \\ x \ge \dfrac{-a}{2} \end{cases}$. Решением системы является отрезок $\left[-\dfrac{a}{2}; \dfrac{2}{a}\right]$, длина которого равна $\dfrac{2}{a} + \dfrac{a}{2} = 2 \to \dfrac{(a-2)^2}{2a} = 0 \to a = 2$.

Случай 2. $a = 0$. Первое неравенство выполняется для всех x , второе – при $x \ge 0$. Решением системы является полуось, а не отрезок.

Случай 3 $a < 0$. Решение первого неравенства $x \ge \dfrac{2}{a}$, второго - $x \ge -\dfrac{a}{2}$. Решением системы является полуось $x \ge -\dfrac{a}{2}$, а не отрезок.

Условию задачи удовлетворяет $a = 2$.

5. Заметим, что сумма всех углов выпуклого $90-$угольника равна $(90-2)\cdot 180^0 = 88\cdot 180^0$. Так как сумма углов треугольника равна 180^0, то минимально возможное число треугольников равно 88. 88 треугольников можно получить, если разрезать многоугольник по лучам, исходящим из одной вершины (не важно какой!) .