**Заключительный тур олимпиады Росатом, весна, 2016, Математика, 8 класс**

**Задание**

**1.** При каких целых $a$ уравнение $(ax-8)(2x-a)=0$ имеет ровно два целых решения. Найти эти решения.

**2.** В стеклянной банке разместилась коллекция жуков. Часть жуков имеет 6 лапок, остальные – по 8 лапок. Коля внимательно пересчитал все лапки, их оказалось 86 штук. Какое минимально возможное количество жуков могло находиться в банке?

**3.** Найти ближайшую к числу 5 дробь вида $\dfrac{19p-3}{p-2}$, где $p-$ целое число.

**4.** Пятизначное четное число $a$, являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное $a$, удовлетворяющее этим условиям.

**5.** На плоскости расположены три точки $A, B$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Построить на плоскости треугольник $MNP$, подобный треугольнику $ABC$, в котором точки $A, B$ и $C$ являются серединами его сторон. Найти площадь такого треугольника, если площадь треугольника $ABC$ равна 4. Возможно ли построить треугольник $MNP$, подобный треугольнику $ABC$, на сторонах которого находятся точки $A, B$ и $C$, но они не являются их серединами?

**Решения**

**1.** При $a=0$ уравнение имеет одно целое решение $x=0$. При $a\neq 0$ уравнение имеет решения $x_1=\dfrac{8}{a}$ и $x_2=\dfrac{a}{2}$, которые совпадают при $a^2=16\to a=\pm 4$. Решение $x_1$ целое, если $a=\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 8$ . Решение $x_2$ целое, если $a-$ четное число. Условиям задачи удовлетворяют $a=\pm 2$ и $a=\pm 8$. При $a=2$ имеем: $x_1=4,\ x_2=1$, при $a=-2$ имеем: $x_1=-4,\ x_2=-1$, при $a=8$ имеем: $x_1=1,\ x_2=4$, при $a=-8$ имеем: $x_1=-1,\ x_2=-4.$

**2.** Пусть $n$ жуков имеют по 6 лапок, а $m$ жуков имеют по 8 лапок. Тогда общее число лапок равно $6n+8m=86$ или $3n+4m=43$. Запишем общее решение этого уравнения: $\begin{cases} n=4t-43\geq 1 \\ m=43-3t\geq 1 \end{cases}, t\in\mathbb{Z}.$ .

Так как $n\geq 1$ и $m\geq 1$, то $t=11,12,13,14$. Общее число жуков равно $n+m=t$, следовательно, наименьшее число жуков равно 11.

**3.** Рассмотрим $\left|\dfrac{19p-3}{p-2}-5\right|=\left|\dfrac{14p+7}{p-2}\right|=7\left|\dfrac{2p+1}{p-2}\right|=7\left|2+\dfrac{5}{p-2}\right|.$

Следовательно, нам нужно найти целочисленное $p$, при котором минимально выражение $\left|2+\dfrac{5}{p-2}\right|$.

Заметим, что при $p>2$ это выражение больше 2. Рассмотрим $p<2$. При $p=1$ имеем

$\left|2+\frac{5}{1-2}\right|=|-3|=3$, при $p=0$ имеем $\left|2+\frac{5}{0-2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, при $p=-1$ имеем $\left|2+\frac{5}{-1-2}\right|=\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$, при $p=-2$ имеем $\left|2+\frac{5}{-2-2}\right|=\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$, и т. д., с уменьшением $p$ выражение будет стремиться к 2.

Таким образом, $p=-1$ обеспечивает наименьшее отклонение, а искомое число равно $\frac{22}{3}$.

**4.** Число $a=m^2$ может делиться на 21только в том случае, если $m$ делится на 3 и на 7, т.е. $m=21k \to a=441k^2$. Из того, что число $a=m^2$ п $a=m^2$, пятизначное следует неравенство $10000 \le 441k^2 \le 99999 \to 23 \le k^2 \le 226$. Минимальное четное $k=6$ , поэтому $a_{\min}=441\cdot 36=15876$

**5.** Дадим ответ на первый вопрос задачи. На рис.1 изображен произвольный треугольник $MNP$.

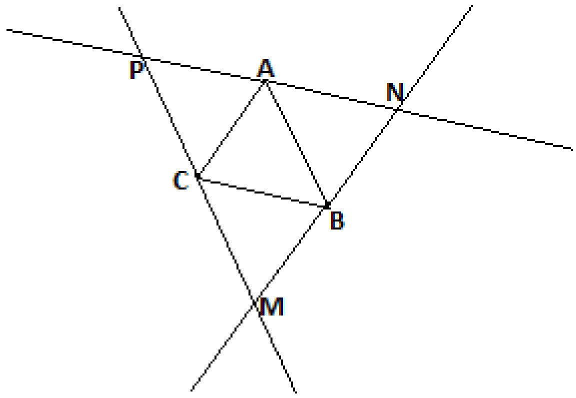



Рис.1

Через точку $A$ проведем прямую $L_A$, параллельную $BC$, через точку $B$ - прямую $L_B$, параллельную $AC$, и через точку $C$ - прямую $L_C$, параллельную $AB$. Построенные прямые попарно пересекаются в точках $M, N$ и $P$. Четырехугольники $ACMB$ и $ACBN-$ параллелограммы (по построению), $MB=CA=BN$ , т.е. $B-$ середина стороны $MN$ . Аналогично, для других сторон. Треугольник $MNP$ подобен треугольнику $ABC$ с коэффициентом подобия $k=2$, поэтому его площадь в 4 раза больше площади треугольника $ABC$, т.е. $S_{MNP}=16$.

Для ответа на второй вопрос задачи построим треугольник $MNP$, подобный треугольнику $ABC$, на сторонах которого находятся точки $A, B$ и $C$, но они не являются их серединами.

Сначала укажем ГМТ на плоскости, из которых заданный отрезок $AB$ виден под заданным углом $\gamma$. Таким ГМТ является дуга окружности, у которой отрезок $AB$ является хордой, стягивающей дугу с центральным углом $2\gamma$. Построение такой дуги изображено на рис.2

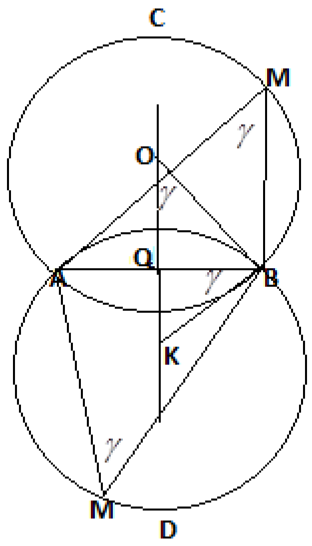



Рис.2

Опишем это построение:

1) Строим отрезок $BK$ под углом $\gamma$ к отрезку $AB$, точка $K$ лежит на срединном перпендикуляре к отрезку $AB$;

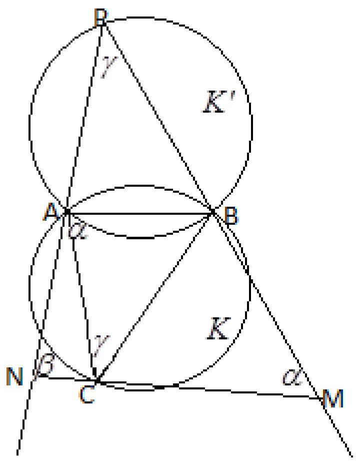
2) Через точку $B$ проводим перпендикуляр $BO$ к отрезку $BK$, точка $O$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$;

3) строим окружность с центром в точке $O$ и радиусом, равным длине отрезка $BO$;

4) Из любой точки $M$ дуги $ACB$ ( и ей симметричной дуги $ADM$ ) отрезок $AB$ виден под углом $\gamma$

Докажем это. $BK-$ касательная к окружности, поэтому дуга между касательной и хордой $AB$ измеряется центральным углом $2\gamma$, а вписанный в окружность угол $AMB$ равен половине этой дуги, т.е. $\gamma$.

Перейдем теперь к построению треугольника $MNP$, подобного $ABC$:




1) Окружность $K$ описана около $\triangle ABC$. Окружность $K'$ симметрична окружности $K$ относительно прямой $AB$. На дуге окружности $K'$ с хордой $AB$, из точек которой отрезок $AB$ виден под углом $\gamma = \measuredangle ACB$, выбираем любую точку $P$, так чтобы стороны угла $APB$ были не параллельны $AC$ и $BC$, а точка $C$ располагалась внутри угла $APB$.

2) Через точку $C$ проводим прямую так, чтобы она образовывала угол $\beta = \measuredangle ABC$ с одной из сторон угла $APB$. Точки пересечения этой прямой со сторонами угла $APB$ обозначим через $M$ и $N$.

3) треугольник $MNP$ подобен $\triangle ABC$ по двум углам. Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на сторонах треугольника $MNP$ и не являются его серединами. Треугольник $MNP$ построен.