Заключительный тур олимпиады Росатом, весна, 2016, Математика, 9 класс

Задание

1. В летнем лагере в первую смену отдыхали 57 школьников. За время отдыха 27 ребят читали книги, 25 – ловили рыбу, 26 – собирали грибы, при этом каждый школьник принял участие хотя бы в одном из этих дел. Известно, что 9 из читающих ребят собирали грибы, 8 грибников успели сходить на рыбалку. Сколько ребят читали книги, ходили на рыбалку, но не собирали грибы? Какое максимальное число ребят могли, при этих условиях, собирать грибы, но не читать книг и не ловить рыбу.

2. При каких a уравнение $P(x^2) = P(x)$, где $P(x) = ax^2 - 3x + 5$ имеет ровно три различных решения?

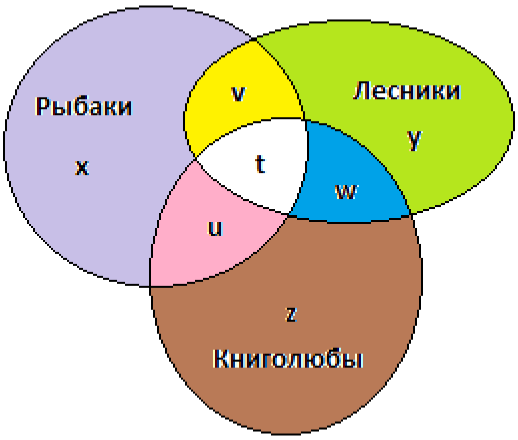
3. Найти целые, положительные числа x и y, для которых $x + y = 12$ и $x \cdot \text{НОД}(x, y) = \text{НОК}(x, y)$.

4. Найти наименьшее возможное значение выражения $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 - действительные корни уравнения $4x^2 + 4(a+2)x + 6a + 7 = 0$.

5. Точка M расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$ так, что $CM : MD = 1 : 2$. На отрезке AM выбрана точка N так, что $AN : NM = 3 : 1$. Прямая DN пересекает отрезок MB в точке P. Найти отношение $MP : PB$.

Решения

1. На диаграмме изображено распределение ребят по интересам:



Буквами x, y, z, u, v, w, t обозначены количества школьников, занимающиеся одним из вариантов деятельности. Например, буквой v обозначено число рыбаков, занимающихся сбором грибов, но не читающих книг. Запишем уравнения, отвечающие условиям задачи:

$$\begin{cases} x+y+z+u+v+w+t=57 \\ x+u+v+t=25 \\ y+v+w+t=26 \\ z+u+w+t=27 \\ w+t=9 \\ v+t=8 \end{cases}$$

После преобразований 2-6 уравнений, получаем: $\begin{cases} x+u=17 \\ y+v=17 \\ z+u=18 \\ w=9-t \\ v=8-t\geq 0\to 0\leq t\leq 8 \end{cases} \to \begin{cases} x=17-u \\ y=9+t \\ z=18-u \\ w=9-t \\ v=8-t\geq 0\to 0\leq t\leq 8 \end{cases}$

Подставим x,y,z,v,w в первое уравнение системы $17-u+9+t+18-u+u+8-t+9-t+t=57$. Отсюда $61-u=57$ или $u=4$.

Тогда $\begin{cases} x=13 \\ y=9+t \\ z=14 \\ w=9-t \\ v=8-t\geq 0\to 0\leq t\leq 8 \end{cases}$. Максимальное значение y соответствует $t=8$ и равно 17.

2. Запишем $P(x^2)=ax^4-3x^2+5$. Тогда $P(x^2)-P(x)=ax^2(x^2-1)-3x(x-1)=0$. Это уравнение имеет решения $x=0,\ x=1$ при любых a. Остальные корни удовлетворяют уравнению: $ax^2+ax-3=0$. Исходное уравнение имеет три корня, если $x=0$ или $x=1$ являются решениями уравнения $ax^2+ax-3=0$. Для $x=0$ это невозможно, $x=1$ является решением при $a=3/2$. В этом случае, $x=-2$ является третьим корнем. Второй вариант возможен, когда дискриминант уравнения $ax^2+ax-3=0$ равен нулю, т.е. $a^2+12a=0\to\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-12 \end{array}\right.$. При $a=0$ корней нет, а при $a=-12$ есть корень $x=-1/2$. Таким образом, при $a=\dfrac{3}{2}$ и $a=-12$ исходное уравнение имеет ровно три различных решения.

3. Умножим правую и левую части второго уравнения на НОД(x,y) и воспользуемся равенством НОД$(x,y)\cdot$НОК$(x,y)=x\cdot y$. Тогда $x\cdot(\text{НОД}(x,y))^2=xy$ или $y=(\text{НОД}(x,y))^2$. Следовательно, y является квадратом целого числа. Из всех допустимых $y\in[1;11]$ таких чисел всего три:

$y_1=1,\ y_2=4,\ y_3=9$. Проверим каждое и них:

Случай 1. $y_1=1,\ x_1=11\to\text{НОД}(x_1,y_1)=1,\ \text{НОК}(x_1,y_1)=11\to$ уравнение удовлетворяется.

Случай 2. $y_2=4,\ x_2=8\to\text{НОД}(x_2,y_2)=4,\ \text{НОК}(x_2,y_2)=8\to$ уравнение не удовлетворяется.

Случай 3. $y_3=9,\ x_3=3\to\text{НОД}(x_3,y_3)=3,\ \text{НОК}(x_1,y_1)=9\to$ уравнение удовлетворяется.

Таким образом, решениями уравнения являются: 1) $x=3,\ y=9$ 2) $x=11,\ y=1$.

4. Задача 4 Ответ: $0,5$

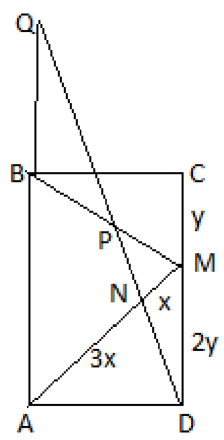
Запишем условие существования корней квадратного уравнения:

$$D/4=4(a+2)^2-4(6a+7)=4\left(a^2-2a-3\right)=4(a+1)(a-3)\geq 0 \to a\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty) .$$

Запишем теорема Виета для корней квадратного уравнения: $\begin{cases} x_1+x_2=-(a+2) \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{6a+7}{4} \end{cases}$. Вычислим $x_1^2+x_2^2$:

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=(a+2)^2-\dfrac{6a+7}{2}=a^2+a+0,5$. Квадратный трехчлен $a^2+a+0,5$ достигает наименьшее значение при $a=-1$ и это значение равно $0,5$.

5. Обозначим $CM=y$, тогда $MD=2y$. Аналогично, пусть $NM=x$, тогда $AN=3x$ (см. рис).



Заметим, что $\triangle ANQ \sim \triangle MND$ с коэффициентом подобия $k=3$. Тогда $AQ=6y$, $BQ=3y$. Кроме того $\triangle QBP \sim \triangle DMP$ с коэффициентом подобия $3/2$. Тогда отношение сходственных сторон $MP:PB=2:3$.