

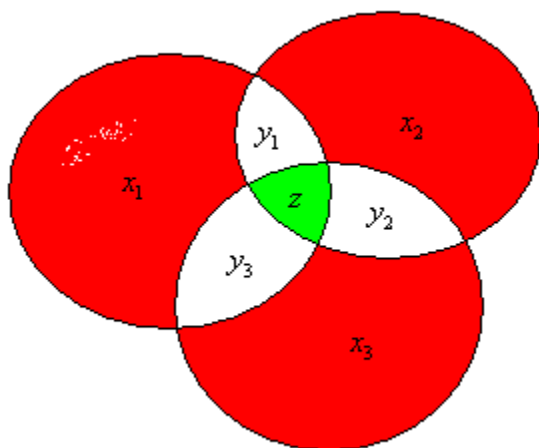
**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,  
математика, 2013 г.,  
10 класс**

- Петя, Ваня и Егор проверяли уровень своего IQ. Петя правильно ответил на 55 вопросов, Ваня – на 50, а Егор – на 45. Оказалось, что втроем они правильно ответили на 80 вопросов. Вопрос считался «трудным», если на него правильно ответил только один из мальчиков. Вопрос считался «легким», если на него правильно отвечали все трое. На сколько больше оказалось «сложных» вопросов, чем «простых»?
- Координаты  $(x; y)$  точек на плоскости являются решениями системы уравнений:
 
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 2x^3 + 3x^4 + y^2 + 2y^3 + 3y^4 = 74 \end{cases}$$
 Найти наименьший радиус круга, содержащего все эти точки.
- Длины сторон прямоугольного треугольника – целые числа. Периметр треугольника численно равен удвоенной его площади. Найти стороны треугольника.
- Четырехзначное натуральное число  $a$  при делении на сумму его цифр имеет частное 78 и остаток 10. Найти такие числа  $a$ .
- В треугольнике  $ABC$  длины сторон  $AB$  и  $AC$  равны 5 и 2 соответственно. Окружность радиуса 3 проходит через вершины  $A$ ,  $B$  и пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ . Найти радиус окружности, описанной около треугольника  $ACD$ .

**Решения**

1. Ответ. на 10 вопросов

**Решение.**



Число сложных вопросов (красные)  $x = x_1 + x_2 + x_3$ ,

число легких вопросов (зеленые)  $z$

Число «средних» (белые)  $y = y_1 + y_2 + y_3$

По условию  $x + y + z = b$  и  $\begin{cases} x_1 + y_1 + y_3 + z = a_1 \\ x_2 + y_1 + y_2 + z = a_2 \\ x_3 + y_2 + y_3 + z = a_3 \end{cases}$ . Складывая уравнения, получим

$$x + 2y + 3z = a_1 + a_2 + a_3. \text{ Тогда } x - z = 2b - a_1 - a_2 - a_3$$

2.

Ответ:  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$   $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ,  $R_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение: Обозначим  $t = xy$ . Тогда  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2t = 9 - 2t$ .

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 27 - 9t$$

$$x^4 + y^4 = (9 - 2t)^2 - 2t^2 = 81 - 36t + 2t^2$$

Второе уравнение:  $9 - 2t + 2(27 - 9t) + 3(81 - 36t + 2t^2) = 74 \rightarrow$

$$3t^2 - 64t + 116 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{58}{3} \end{cases}$$

Для первого корня  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$  или  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Для второго корня система не совместна.

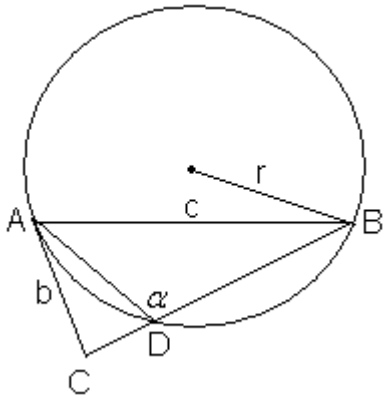
Расстояние между точками равно  $\sqrt{2}$ , поэтому  $R_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Ответ: 3, 4, 5

4. Ответ:  $a = 1258$

5. Ответ:  $R = \frac{r \cdot b}{c} = \frac{6}{5}$

Решение.



$$c = 2r \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \angle ADC \rightarrow \frac{c}{b} = \frac{r}{R} \rightarrow R = \frac{br}{c},$$

т.к.  $\sin \alpha = \sin \angle ADC$