Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
математика, 2013 г., Москва
11 класс

Задание

1. Найти все числа x, являющиеся решениями неравенства $\dfrac{(x-2a)(x-a)}{\log_2(x+a)}\le 0$ для хотя бы одного целого a - решения неравенства $3^a+3^{6-a}\le 90$.

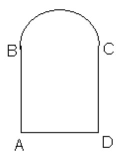
2. Обозначим через X множество решений уравнения $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cdot\cos x$. Найти такое $x\in X$, для которого выражение $x^2+\dfrac{\pi^4}{x^2}$ принимает наименьшее возможное значение.

3. Три неравных между собой числа x, y и z в указанном порядке являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Известно, что их можно переставить так, что они станут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа, если $3x^2+5y^2+7z^2=324$.

4. Найти все целые числа на отрезке $[500;5000]$, остатки от деления которых на 3, 5 и 7 равны 2, 4 и 6 соответственно.

5. При каких значениях a неравенство $x^2-2ax+y^2+(8-2a)y+a^2-8a+16\le 0$ выполняется для всех пар $(x;y)$,
для которых $1\le x\le 3,\ 1\le y\le 3$?

6. Поле для гольфа имеет форму, изображенную на рис. $ABCD-$ прямоугольник. Криволинейная часть границы представляет полуокружность. Периметр поля равен L. Найти размеры поля, если его площадь имеет наибольшее, возможное при этих условиях, значение.



Решения

1. Ответ: $x\in(-4;-1)\cup[2;8],\quad x\ne -3;-2$

Решение.

Неравенство $3^a+3^{6-a}\le 90$ имеет три целых решения $a=2;3;4$

Случай. $a=2$. Неравенство $\dfrac{(x-4)(x-2)}{\log_2(x+2)}\le 0$ имеет решения

$x\in(-2;-1)\cup[2;4]$

Случай. $a=3$. Неравенство $\dfrac{(x-6)(x-3)}{\log_2(x+3)}\le 0$ имеет решения

$x\in(-3;-2)\cup[3;6]$

Случай. $a=4$. Неравенство $\dfrac{(x-8)(x-4)}{\log_2(x+4)}\le 0$ имеет решения

$x\in(-4;-3)\cup[4;8]$

Объединяя эти решения, получим $x\in(-4;-1)\cup[2;8]$, $x\ne -3;-2$

2. Ответ: $x=\dfrac{5\pi}{4}$

Решение.

Уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cdot\cos x$ имеет серию решений $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. Замена $t=x^2>0$. Функция $f(t)=t+\dfrac{\pi^4}{t}$ принимает наименьшее значение в точке $t^*=\pi^2$. Найдем $t_1\le t^*$, для которого $t_1=\max\limits_{x\in X} t$:

$x^2\le\pi^2\to(x-\pi)(x+\pi)\le 0\to x\in[-\pi;\pi]$. Максимальное значение функции $t=x^2$ на решениях достигается в точке $x_1=-\dfrac{3\pi}{4}$,

т.е. $t_1=\dfrac{9\pi^2}{16}$. Найдем $t_2\ge t^*$, для которого $t_2=\min\limits_{x\in X} t$:

$x^2\ge\pi^2\to(x-\pi)(x+\pi)\ge 0\to x\in(-\infty,-\pi]\cup[\pi;+\infty)$.Минимальное значение функции $t=x^2$ на решениях достигается в точках $x_2=\dfrac{5\pi}{4}$,

т.е. $t_2=\dfrac{25\pi^2}{16}$. Сравним значения $f(t_1)$ и $f(t_2)$:

$$f(t_1)-f(t_2)=(t_1-t_2)\left(1-\frac{\pi^4}{t_1\cdot t_2}\right)=-\pi^2\left(1-\frac{256}{25\cdot 9}\right)>0\to f(t_2)<f(t_1)$$

т.е. минимальное значение достигается в точке $x_2=\dfrac{5\pi}{4}$.

3. Ответ: $\begin{cases} x=-2z \\ y=-\dfrac{z}{2} \\ z=\pm 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\pm\dfrac{12\sqrt{129}}{43} \\ y=-\dfrac{x}{2} \\ z=-2x \end{cases}$

Решение.

В измененном порядке следования чисел три возможных случая:

Случай 1. (y – на втором месте) $\to z, y, x$ являются последовательными членами геом. прогрессии:

$$\begin{cases} x+z=2y \\ y^2=xz \\ 3x^2+5y^2+7z^2=324 \end{cases}$$

Числа x, z являются решениями кв. уравнения $u^2-2yu+y^2=0 \to$ $u=y$ (кратные корни) $\to x=y=z$. Условия задачи невыполнены.

Случай 2. (z – на втором месте) $\to x, z, y$ (или y, z, x) являются последовательными членами геом. прогрессии:

$$\begin{cases} x+z=2y \\ z^2=xy \\ 3x^2+5y^2+7z^2=324 \end{cases}$$

Число x выражается через $y: x=2y-z$. Тогда y является решением

кв. уравнения $2y^2-zy-z^2=0 \to \left[\begin{array}{l} y=z \\ y=-\dfrac{z}{2} \end{array}\right.$

Первое не удовлетворяет условию, а второе дает $x=-2z$.

Подставляя в последнее уравнение системы, получим $z^2=16$ первый ответ.

Случай 3. (x – на втором месте) $\to z, x, y$ (или y, x, z) являются последовательными членами геом. прогрессии:

$$\begin{cases} x+z=2y \\ x^2=zy \\ 3x^2+5y^2+7z^2=324 \end{cases}$$

Число z выражается через $x: z=2y-x$. Тогда y является решением

кв. уравнения $2y^2-xy-x^2=0 \to \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-\dfrac{x}{2} \end{array}\right.$

Первое не удовлетворяет условию, а второе дает $z=-2x$.

Подставляя в последнее уравнение системы, получим $x^2=\dfrac{432}{43}$ и второй ответ.

4. Ответ: $x=105s-1,\ \ s=5,6,\dots,47$

Решение.

$$\begin{cases} x = 3n+2 \\ x = 5m+4 \\ x = 7k+6 \end{cases}; n,m,k \in Z \to 5m-3n=-2 \to \begin{cases} m=-1+3t \\ n=-1+5t \end{cases}; t \in Z$$

$$x = 3(5t-1)+2 = 15t-1 \to 15t-1 = 7k+6 \to 15t-7k=7$$

$$15t = 7(k+1) \to \begin{cases} t = 7s \\ k = 15s-1 \end{cases}; s \in Z \to x = 7(15s-1)+6 = 105s-1 \in Z$$

Ограничения: $500 \le 105s - 1 \le 5000 \to s = 5, 6, ..., 47$

5. Ответ: $a \in \left[8-\sqrt{14}; 6+\sqrt{10}\right]$.

Решение.

Перепишем неравенство в форме: $\left(x-a\right)^2 + \left(y-a+4\right)^2 \le a^2$ –

– круг радиуса $|a|$ с центром в точке $x_0 = a,\ y_0 = a-4$.

Найдем значения a , при которых расстояние до вершин квадрата $1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 3$ до центра круга не превосходят $|a|$.

Вершина $A(1;1): \left(a-1\right)^2 + \left(a-5\right)^2 \le a^2 \to a^2 - 12a + 26 \le 0$

$a \in \left[6-\sqrt{10}; 6+\sqrt{10}\right]$

Вершина $B(1;3): \left(a-1\right)^2 + \left(a-7\right)^2 \le a^2 \to a^2 - 16a + 50 \le 0$

$a \in \left[8-\sqrt{14}; 8+\sqrt{14}\right]$

Вершина $C(3;3): \left(a-3\right)^2 + \left(a-7\right)^2 \le a^2 \to a^2 - 20a + 58 \le 0$

$a \in \left[10-\sqrt{42}; 10+\sqrt{42}\right]$

Вершина $D(3;1): \left(a-3\right)^2 + \left(a-5\right)^2 \le a^2 \to a^2 - 16a + 34 \le 0$

$a \in \left[8-\sqrt{30}; 8+\sqrt{30}\right]$

Пересекая полученные множества, получим допустимые значения $a \in \left[8-\sqrt{14}; 6+\sqrt{10}\right]$.

6. Ответ: $AD = \dfrac{2L}{\pi+4}; AB = \dfrac{L}{\pi+4} = R$.