Заключительный тур олимпиады «Росатом», математика, 2013 г., 9 класс

Задание

1. Упростить: $\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)$

2. Возраст Пети (целое число) в 2010 году был на 6 лет меньше, чем удвоенная сумма цифр года его рождения. В каком году родился Петя?

3. Сколько существует трехзначных чисел, у которых число сотен равно среднему арифметическому числа десятков и единиц?

4. При каких значениях a решения уравнения $\left(x+a-7\right)\left(x^2+\left(8-a\right)x+a+15-6a^2\right)=0$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

5. Круг, который описан около треугольника со сторонами $3, 5$ и 6, вписан в треугольник со сторонами параллельными сторонам первого треугольника. Найти длины сторон второго треугольника.

Решения

1. Ответ: -1

2. Ответ: 1) 1968 2) 1974 3)1980 4) 2004 5) 2010

3. Ответ: 49

4. Ответ: $a=\dfrac{14}{9},\ a=\dfrac{22}{3},\ a=-\dfrac{4}{3}$

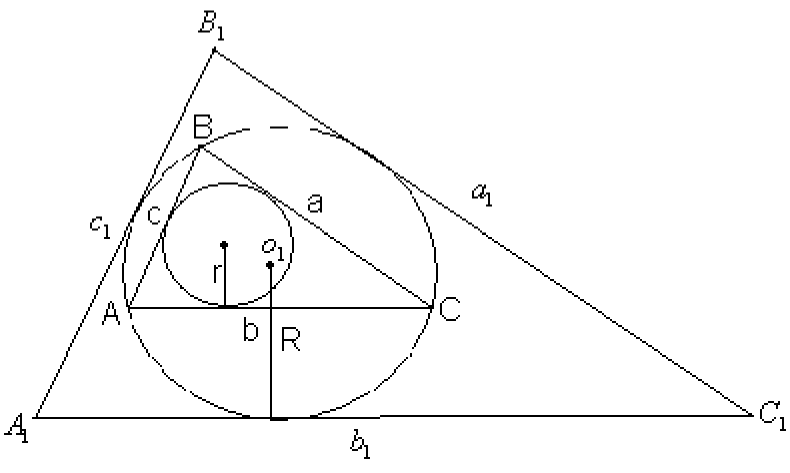
5. Ответ:

$$a_1=\frac{2a^2bc}{\left(a+b-c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+c-a\right)}=\frac{135}{16}$$

$$b_1=\frac{2ab^2c}{\left(a+b-c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+c-a\right)}=\frac{225}{16};$$

$$c_1=\frac{2abc^2}{\left(a+b-c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+c-a\right)}=\frac{270}{16}$$

Решение.



Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $k=\dfrac{R}{r}$; $S=pr$; $S=\dfrac{abc}{4R}$

$$rR=\frac{abc}{4p}\rightarrow k=\frac{R}{r}=\frac{abc}{4pr^2}=\frac{abcp}{4S^2}=\frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{2abc}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Тогда $a_1=ka$, $b_1=kb$, $c_1=kc$.