

**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,  
физика, Москва, 24 февраля 2013 г.,  
11 класс**

**Задание**

1. Цилиндрический сосуд с идеальным газом разделен подвижным поршнем на две части. Газ в левой части имеет температуру  $T_1$ , в правом - температуру  $T_2$ . При этом отношение объемов оказывается равным  $V_1/V_2 = 3/2$ . После того как температуры выровнялись, соотношение объемов изменилось:

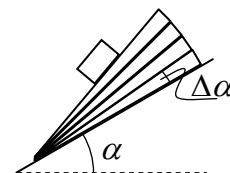
$V_1'/V_2' = 2/3$ . Найти отношение температур  $T_1/T_2$ .

2. Три одинаковых точечных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Напряженность электрического поля в точке, находящейся посередине между двумя зарядами, равна  $E$ . Найти потенциал электрического поля в этой точке.

3. Ширина реки равна  $l$ . Если лодка плывет против течения реки, ее скорость относительно земли равна  $v$ , если по течению -  $3v$ . За какое минимальное время лодка может пересечь реку?

4. (Л.Эйлер, Статья «Об ударе пуль при стрельбе по доске», 1771 г.) В центр квадратной свободно ви-сящей доски попадает пуля. Пуля пробивает доску насквозь, если ее скорость до удара больше  $v_0$ . С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость пули до удара  $2v_0$ ? Масса пули  $m$ , доски  $M$ , силу сопротивления считать независимой от скорости.

5. На наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом,  $\Delta\alpha$  лежит стопка из 10 одинаковых по форме клиньев с малым углом при вершине  $\Delta\alpha$  (см. рисунок; клинья нарисованы не все). По поверхности верхнего клина скользит тело массой  $M$ . Найти силу, действующую на наклонную плоскость со стороны стопки клиньев, если известно, что все они покоятся, а трение между всеми поверхностями отсутствует.



**Решения**

1. Условие равновесия перегородки в начальном положении дает

$$\frac{v_1 RT_1}{V_1} = \frac{v_2 RT_2}{V_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} \quad (*)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  - количество вещества газа в левой и правой частях сосуда. После выравнивания температур (неважно, с потерей энергии, или нет) условие равновесия перегородки дает

$$\frac{v_1 RT}{V_1'} = \frac{v_2 RT}{V_2'} \Rightarrow \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{v_1}{v_2} \quad (*)$$

Откуда, используя (\*), получим

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1 V_2'}{V_2 V_1'} = \frac{9}{4}$$

2. Напряженность электрического поля в рассматриваемой точке равна (поля двух зарядов складываются в нуль)

$$E = \frac{4kQ}{3a^2}$$

где  $k$  - постоянная закона Кулона. Отсюда

$$\frac{kQ}{a} = \frac{3Ea}{4}$$

Потенциал поля в рассматриваемой точке есть

$$\varphi = \frac{kQ}{\sqrt{3}a/2} + \frac{kQ}{a/2} + \frac{kQ}{a/2} = \frac{2(2\sqrt{3}+1)kQ}{\sqrt{3}} = \frac{(6+\sqrt{3})Ea}{2}$$

3. Из условия следует, что

$$3v = w + u$$

$$v = w - u$$

где  $w$  - скорость лодки относительно воды,  $u$  - скорость течения. Отсюда находим, что  $w = 2v$ . Чтобы переправиться за минимальное время лодка должна плыть так, чтобы вектор ее скорости относительно воды был перпендикулярен берегам реки. Поэтому минимальное время переправы равно

$$t_{\min} = \frac{l}{w} = \frac{l}{2v}$$

4. Для скорости  $v_0$  законы сохранения энергии и импульса дают

$$mv_0 = (m + M)v_1$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m + M)v_1^2}{2} + Q$$

где  $v_1$  - скорость пули и доски (одинаковая, поскольку  $v_0$  - минимальная для пробивания доски скорость),  $Q$  - количество выделившейся теплоты. Отсюда

$$Q = \frac{mMv_0^2}{2(m + M)} \quad (*)$$

Поскольку сила сопротивления по условию не зависит от скорости, работа силы трения (и, следовательно, количество выделившейся теплоты) не зависит от скорости пули. Поэтому в случае, когда пуля имеет скорость  $v = 2v_0$ , законы сохранения энергии и импульса дают

$$mv = mv_1 + Mv_2$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + Q$$

где  $Q$  определяется формулой (\*). Выражая из первого уравнения  $v_1$  и подставляя во второе, получим уравнение для  $v_2$

$$v_2^2 - \frac{2mv}{m + M}v_2 + \frac{2mQ}{M(m + M)} = 0$$

Решая квадратное уравнение (с  $Q$  из (\*)), получим

$$v_2 = \frac{m}{m + M} \left( v \pm \sqrt{v^2 - v_0^2} \right)$$

(очевидно, нужно взять «-», т.к. при  $v = v_0$  должно получиться

$$v_2 = v_1 = \frac{mv_0}{m + M}$$

Поэтому

$$v_2 = \frac{m}{m + M} \left( v - \sqrt{v^2 - v_0^2} \right)$$

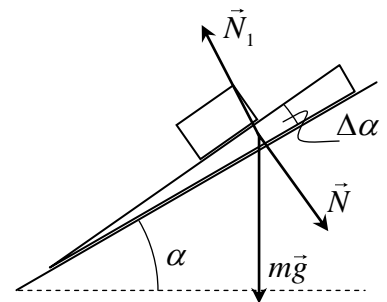
Если  $v = 2v_0$ , то

$$v_2 = \frac{mv_0}{m + M} (2 - \sqrt{3})$$

5. Рассмотрим один клин с углом  $\Delta\alpha$ , находящийся в равновесии на гладкой наклонной плоскости с углом при основании  $\alpha$ , по которому скользит тело. На клин действуют: сила тяжести  $m\vec{g}$  ( $m$  - масса клина), сила реакции со стороны тела  $\vec{N}$  ( $N = Mg \cos(\alpha + \Delta\alpha)$ ,  $M$  - масса тела), перпендикулярная его верхней грани, сила реакции  $\vec{N}_1$ , перпендикулярная его нижней грани. И поскольку клин находится в равновесии, то из проекции условия равновесия на ось, параллельную нижней поверхности клина, имеем

$$mg \sin \alpha = N \sin \Delta\alpha$$

Отсюда находим, что



$$m = \frac{N \sin \Delta\alpha}{\sin \alpha}$$

С другой стороны, проецируя условие равновесия клина на ось, перпендикулярную нижней поверхности клина, находим силу  $N_1$ , с которой клин действует на плоскость

$$N_1 = N \cos \Delta\alpha + mg \cos \alpha$$

Подставляя сюда массу клина, получим

$$N_1 = N \cos \Delta\alpha + \frac{N \sin \Delta\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{N \sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin \alpha}$$

Если бы в равновесии на плоскости было два клина, на верхнем из которых двигалось тело, то сила, с которой нижний клин действовал бы на плоскость, находилась бы так

$$N_2 = \frac{N_1 \sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{N \sin(\alpha + 2\Delta\alpha) \sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin(\alpha + \Delta\alpha) \sin \alpha} = \frac{N \sin(\alpha + 2\Delta\alpha)}{\sin \alpha}$$

где  $N = Mg \cos(\alpha + 2\Delta\alpha)$  - сила реакции, действующая на тело. Поэтому если клиньев 10, то сила, с которой нижний клин действует на плоскость, может быть найдена так

$$N_{10} = \frac{N \sin(\alpha + 10\Delta\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{Mg \cos(\alpha + 10\Delta\alpha) \sin(\alpha + 10\Delta\alpha)}{\sin \alpha}$$

Возможен и другой подход к решению задачи. Поскольку клинья покоятся друг относительно друга, их можно заменить одним клином с углом наклона  $10\Delta\alpha$ , и провести для него те же вычисления, что проведены выше.